CURSO DE NIVELAMENTO
PEQ/COPPE/UFRJ
M.Sc. – 2009

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Prof. Evaristo Chalbaud Biscaia Junior

Friedrich Wilhelm Bessel

Born: **22 July 1784 in Minden, Westphalia (now Germany)**
Died: **17 March 1846 in Königsberg, Prussia (now Kaliningrad, Russia)**

)

1-) Equações Diferenciais de Primeira Ordem Linear

São equações diferenciais ordinárias da forma:

$$\frac{dy(x)}{dx}+\alpha(x)\cdot y(x)= f(x)$$

Multiplicando-se membro a membro da equação acima por $\mu(x)$, resulta:

$\mu(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx}+\mu(x)\cdot\alpha(x)\cdot y(x)=\mu(x)\cdot f(x)$, considerando que a função $\mu(x)$ seja escolhida de modo que:

$$\frac{d[\mu(x)\cdot y(x)]}{dx}=\mu(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx}+\frac{d\mu(x)}{dx}\cdot y(x)=\mu(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx}+\mu(x)\cdot\alpha(x)\cdot y(x)=\mu(x)\cdot f(x)$$

assim, deve-se ter: $\frac{d\mu(x)}{dx}=\alpha(x)\cdot\mu(x)\Rightarrow\mu(x)=\exp\left(\int_a^x\alpha(\xi)\cdot d\xi\right)$, sendo a uma constante arbitrária convenientemente escolhida.

A função $\mu(x)$ é chamada de ***fator de integração*** da equação original e possibilita, após sua determinação, resolver a equação na forma:

$$\frac{d[\mu(x)\cdot y(x)]}{dx}=\mu(x)\cdot f(x)\Rightarrow\mu(x)\cdot y(x)=\int\mu(x)\cdot f(x)\cdot dx+C^{te}$$

Exemplo Ilustrativo: Resolver a equação diferencial:

$$\frac{dy(x)}{dx}-\frac{2}{x}\cdot y(x)=x$$

Determinação de $\mu(x)$: $\mu(x)=\exp\left(-\int_a^x\frac{2}{\xi}\cdot d\xi\right)=\exp\left[\ln\left(\frac{a}{x}\right)^2\right]=\left(\frac{a}{x}\right)^2$ adotando a =1, resulta: $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$, multiplicando membro a membro da equação por $\frac{1}{x^2}$, resulta: $\frac{1}{x^2}\frac{dy(x)}{dx}-\frac{2}{x^3}\cdot y(x)=\frac{d\left(y/x^2\right)}{dx}=\frac{1}{x}$, assim:

$$d\left(\frac{y}{x^2}\right)=\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{y}{x^2}=\ln(x)+C\Rightarrow y(x)=x^2\cdot\ln(x)+C\cdot x^2$$

2-) Equações Diferenciais de Primeira Ordem Exatas

Seja uma função de *x* e *y*: $\varphi(x,y)$, assim, se $\varphi(x,y)=C^{te}$, tem-se:

$$d\varphi(x,y)=\frac{\partial\varphi(x,y)}{dx}\cdot dx+\frac{\partial\varphi(x,y)}{dy}\cdot dy=0\,.$$

Definindo-se: $M(x,y)=\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{dx}$ e $N(x,y)=\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{dy}$, sendo $\varphi(x,y)$ uma função contínua com as duas primeiras derivadas contínuas, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right]=\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x\partial y}$$, mas:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right]=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\text{ e }\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right]=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$ logo:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,.$$

Permitindo concluir que a equação diferencial ordinária de primeira ordem da forma:

$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0$ se: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, então sua solução é:

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=M(x,y)\Rightarrow\varphi(x,y)=\int_a^x M(\xi,y)\cdot d\xi=C^{te}$$

Ou

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=N(x,y)\Rightarrow\varphi(x,y)=\int_b^y N(x,\eta)\cdot d\eta=C^{te}$$

As constantes *a* e *b* são arbitrárias!

Exemplo Ilustrativo: Resolver a equação diferencial:

$$\left(x\cdot y^2+1\right)\cdot dx+\left(x^2\cdot y+2\cdot y\right)\cdot dy=0\,.$$

Identificando: $M(x,y)=x\cdot y^2+1\Rightarrow\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2\cdot x\cdot y$ e

$N(x,y)=x^2\cdot y+2\cdot y\Rightarrow\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2\cdot x\cdot y$. Assim como: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, busca-se: $\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} = x \cdot y^2 + 1 \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{2} + x + f(y) = C^{te}$ e

$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = x^2 \cdot y + 2 \cdot y \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{2} + y^2 + g(x) = C^{te}$.

Confrontando as duas formas de $\varphi(x,y)$, tem-se $f(y) = y^2$ e $g(x) = x$.A solução da equação diferencial é então:

$$x^2 \cdot y^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot y^2 = A$$

3-) Equações Diferenciais de Primeira Ordem Composta por Funções Homogêneas de Mesmo Grau

Definição: Uma função de x e y é dita *homogênea de grau n* se para uma constante real qualquer λ existe um valor de n tal que: $f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x,y)$.

A equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0$ é dita homogênea se *P(x,y)* e *Q(x,y)* são ambas funções homogêneas de mesmo grau.

Caso as funções *P(x,y)* e *Q(x,y)* forem ambas funções homogêneas de mesmo grau então a equação diferencial $P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0$ pode se transformar em uma equação de variáveis separáveis através da substituição: $v = \frac{y}{x}$, ou seja: $y = v \cdot x$ e $dy = v \cdot dx + x \cdot dv$.

Alternativamente, pode-se adotar a substituição: $u = \frac{x}{y}$, o que resulta em $x = u \cdot y$ e $dx = u \cdot dy + y \cdot du$.

Exemplo Ilustrativo: Resolver a equação diferencial:

$$y^2 + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx}$$

Essa equação pode se rearranjada na forma: $y^2 \cdot dx + (x^2 - x \cdot y) \cdot dy = 0$, permitindo identificar: $P(x,y) = y^2$ e $Q(x,y) = x^2 - x \cdot y$. Como: $P(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^2 \cdot y^2 = \lambda^2 \cdot P(x,y)$ e

$Q(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^2 \cdot x^2 - \lambda^2 \cdot x \cdot y = \lambda^2 \cdot Q(x, y)$ são, ambas, funções homogêneas de segundo grau, adota-se:

(i) a variável $v = \dfrac{y}{x}$ no lugar de *y*, então:

$$v^2 \cdot x^2 \cdot dx + x^2 (1 - v) \cdot (v \cdot dx + x \cdot dv) = 0 \Rightarrow v \cdot dx + (1 - v) \cdot x \cdot dv = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \left(\frac{dv}{v} - dv \right) = 0$$

Integrando cada um dos membros da última equação, resulta:

$\ln(x) + \ln(v) - v = C^{te} \Rightarrow \ln(x \cdot v) = C^{te} + v \Rightarrow x \cdot v = A \cdot e^{v}$, voltando à variável original *y:*

$$y = A \cdot \exp\left(\frac{y}{x} \right)$$

(ii) a variável $u = \dfrac{x}{y}$ no lugar de *x*, então:

$$y^2 \cdot (u \cdot dy + y \cdot du) + y^2 (u^2 - u) \cdot dy = 0 \Rightarrow y \cdot du + u^2 \cdot dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{du}{u^2} = 0$$

Integrando cada um dos membros da última equação, resulta:

$\ln(y) - \dfrac{1}{u} = C^{te} \Rightarrow \ln(y) = C^{te} + \dfrac{1}{u} \Rightarrow y = B \cdot e^{1/u}$, voltando à variável original *x:*

$$y = B \cdot \exp\left(\frac{y}{x} \right)$$

<u>4-) Equações Diferenciais de Primeira Ordem com Coeficientes Lineares</u>

São equações diferenciais ordinárias da forma:

$$(a \cdot x + b \cdot y + c) \cdot dx + (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma) \cdot dy = 0$$

Adotando na equação as novas variáveis: $\begin{cases} u = x + \varepsilon \rightarrow dx = du \\ v = y + \delta \rightarrow dy = dv \end{cases}$, assim:

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c = a \cdot u + b \cdot v + (a \cdot \varepsilon + b \cdot \delta + c) \\ \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + (\alpha \cdot \varepsilon + \beta \cdot \delta + \gamma) \end{cases}$$

Selecionando ε e γ tais que: $\begin{cases} a \cdot \varepsilon + b \cdot \delta + c = 0 \\ \alpha \cdot \varepsilon + \beta \cdot \delta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\beta \cdot c - b \cdot \gamma}{b \cdot \alpha - a \cdot \beta} \\ \delta = \dfrac{a \cdot c - \alpha \cdot \gamma}{b \cdot \alpha - a \cdot \beta} \end{cases}$, chega-se a:

$$(a \cdot u + b \cdot v) \cdot du + (\alpha \cdot u + \beta \cdot v) \cdot dv = 0$$

Que é uma equação diferencial de primeira ordem composta por funções homogêneas de primeiro grau, podendo ser resolvida pelo mesmo procedimento descrito no item 4.

5-) Equações Diferenciais de Primeira Ordem tipo Bernoulli

São equações diferenciais ordinárias da forma:

$$\frac{dy(x)}{dx} + P(x) \cdot y(x) = Q(x) \cdot [y(x)]^n \quad \text{com} \quad n \neq 1$$

Dividindo membro a membro por y^n resulta:

$\frac{1}{[y(x)]^n} \frac{dy(x)}{dx} + P(x) \cdot \frac{1}{[y(x)]^{n-1}} = Q(x)$, como: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{[y(x)]^{n-1}}\right) = (1-n) \cdot \frac{1}{[y(x)]^n} \frac{dy(x)}{dx}$, adota-se a nova variável dependente: $v(x) = \frac{1}{[y(x)]^{n-1}}$, resultando em:

$$\frac{dv(x)}{dx} + (1-n) \cdot P(x) \cdot v(x) = (1-n) \cdot Q(x)$$

Que é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem!

Note que se *n* =1, a equação pode ser escrita na forma: $\frac{dy(x)}{dx} + [P(x) - Q(x)] \cdot y(x) = 0$ que já é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem e homogênea!

6-) Equações Diferenciais de Segunda Ordem Linear

São equações diferenciais ordinárias da forma:

$$a_2(x) \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x) \cdot y(x) = f(x) \quad \text{com} \quad a_2(x) \neq 0$$

6-1) Equações Diferenciais de Segunda Ordem Linear de Coeficientes Constantes

Se os coeficientes da equação [a_o, a_1 e a_2] forem constantes, pode-se resolver a equação homogênea correspondente [considerando *f(x)=0*] por operador *D*, segundo:

Sejam λ_1 e λ_2 as raízes (*valores característicos*) do polinômio de segundo grau (*polinômio característico*): $a_2 \cdot D^2 + a_1 \cdot D + a_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{a_0}{a_2}$, então a solução de: $a_2 \cdot \frac{d^2 y_h(x)}{dx^2} + a_1 \cdot \frac{dy_h(x)}{dx} + a_0 \cdot y_h(x) = 0$ é:

(i) se $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 > 0$, dois valores característicos reais e distintos, dada por:

$y_h(x) = C_1 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot x) + C_2 \cdot \exp(\lambda_2 \cdot x)$;

(ii) se $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 = 0$, dois valores característicos reais e iguais:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\dfrac{a_1}{2 \cdot a_2}$,dada por: $y_h(x) = \exp(\lambda \cdot x) \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$;

(iii) se $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 < 0$, dois valores característicos complexos e conjugados:

$\lambda_1 = \sigma + i \cdot \omega$, $\lambda_2 = \sigma - i \cdot \omega$ sendo $\sigma = -\dfrac{a_1}{2 \cdot a_2}$ e $\omega = \dfrac{\sqrt{4 \cdot a_0 \cdot a_2 - a_1^2}}{2 \cdot a_2}$,dada por:

$y_h(x) = \exp(\sigma \cdot x) \cdot [C_1 \cdot \cos(\omega \cdot x) + C_2 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot x)] = A \cdot \exp(\sigma \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot x + \phi)$.

Para determinar a solução do problema não homogêneo adiciona-se à solução do problema homogêneo, $y_h(x)$, a chamada *solução particular* que pode ser determinada por dois procedimentos distintos:

(a) Método dos Coeficientes a Determinar: neste procedimento a forma da solução particular depende da forma da função *f(x)* e é apresentada na tabela a seguir:

f(x)	$y_p(x)$
$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot x^i$	$\sum_{i=0}^{n} \beta_i \cdot x^i$
$A \cdot \exp(\mu \cdot x)$	$B \cdot \exp(\mu \cdot x)$
$[\alpha_1 \cdot \cos(\theta \cdot x) + \alpha_2 \cdot \mathrm{sen}(\theta \cdot x)] \cdot \exp(\mu \cdot x)$	$[\beta_1 \cdot \cos(\theta \cdot x) + \beta_2 \cdot \mathrm{sen}(\theta \cdot x)] \cdot \exp(\mu \cdot x)$

Os coeficientes de $y_p(x)$ são determinados substituindo a correspondente expressão na equação diferencial, agrupando os termos e igualando os coeficientes dos termos iguais de ambos os membros.

É importante ressaltar que o procedimento só é válido se a função *f(x)* não for solução da forma homogênea da equação diferencial, quando:

$a_2 \cdot \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} + a_1 \cdot \dfrac{df(x)}{dx} + a_0 \cdot f(x) = 0$, deve-se empregar o procedimento distinto descrito nos 4 casos possíveis a seguir:

(i) caso $a_0 = 0$ e $f(x) = \alpha_0$ então : $y_p(x) = \beta_1 \cdot x$;

(ii) caso $a_0 = a_1 = 0$ e $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x$ então : $y_p(x) = \beta_2 \cdot x^2 + \beta_3 \cdot x^3$;

(iii) caso $f(x) = A \cdot \exp(\mu \cdot x)$ sendo $a_2 \cdot \mu^2 + a_1 \cdot \mu + a_0 = 0$ e $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 > 0$ então: $y_p(x) = B \cdot x \cdot \exp(\mu \cdot x)$

(iv) caso $f(x) = A \cdot \exp(\mu \cdot x)$ ou $f(x) = A \cdot x \cdot \exp(\mu \cdot x)$ sendo $a_2 \cdot \mu^2 + a_1 \cdot \mu + a_0 = 0$ e $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 = 0$ então: $y_p(x) = B \cdot x^2 \cdot \exp(\mu \cdot x)$

(v) caso $f(x) = [\alpha_1 \cdot \cos(\theta \cdot x) + \alpha_2 \cdot \mathrm{sen}(\theta \cdot x)] \cdot \exp(\mu \cdot x)$ sendo $a_2 \cdot \xi^2 + a_1 \cdot \xi + a_0 = 0$ com $\xi = \mu + i \cdot \theta$ então:
$y_p(x) = [\beta_1 \cdot \cos(\theta \cdot x) + \beta_2 \cdot \mathrm{sen}(\theta \cdot x)] \cdot x \cdot \exp(\mu \cdot x)$

(b) <u>Método de Variação de Parâmetros</u>: neste procedimento a seguinte forma da solução particular é proposta: $y_p(x) = z_1(x) \cdot y_1(x) + z_2(x) \cdot y_2(x)$, sendo *$y_1(x)$* e *$y_2(x)$* as duas funções que compõem a solução da equação homogênea correspondente. As funções *$z_1(x)$* e *$z_2(x)$* são determinadas substituindo a expressão de *$y_p(x)$* na equação diferencial e identificando os termos iguais dos dois membros. Note que:

$$\frac{dy_p(x)}{dx} = z_1(x) \cdot \frac{dy_1(x)}{dx} + z_2(x) \cdot \frac{dy_2(x)}{dx} + y_1(x) \cdot \frac{dz_1(x)}{dx} + y_2(x) \cdot \frac{dz_2(x)}{dx},$$

considerando: $y_1(x) \cdot \frac{dz_1(x)}{dx} + y_2(x) \cdot \frac{dz_2(x)}{dx} = 0$, resulta:

$$\frac{dy_p(x)}{dx} = z_1(x) \cdot \frac{dy_1(x)}{dx} + z_2(x) \cdot \frac{dy_2(x)}{dx} \quad \text{e}$$

$$\frac{d^2 y_p(x)}{dx^2} = z_1(x) \cdot \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} + z_2(x) \cdot \frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} + \frac{dy_1(x)}{dx} \cdot \frac{dz_1(x)}{dx} + \frac{dy_2(x)}{dx} \cdot \frac{dz_2(x)}{dx}, \text{ logo:}$$

$$a_2 \cdot \frac{d^2 y_p(x)}{dx^2} + a_1 \cdot \frac{dy_p(x)}{dx} + a_0 \cdot y_p(x) = a_2 \cdot \frac{dy_1(x)}{dx} \cdot \frac{dz_1(x)}{dx} + a_2 \cdot \frac{dy_2(x)}{dx} \cdot \frac{dz_2(x)}{dx} = f(x).$$

Resultando no sistema linear: $\begin{cases} y_1(x)\cdot\dfrac{dz_1(x)}{dx}+y_2(x)\cdot\dfrac{dz_2(x)}{dx}=0 \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx}\cdot\dfrac{dz_1(x)}{dx}+\dfrac{dy_2(x)}{dx}\cdot\dfrac{dz_2(x)}{dx}=\dfrac{f(x)}{a_2} \end{cases}$, cuja solução é:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1(x)}{dx}=\dfrac{f(x)\cdot y_2(x)}{a_2\cdot\left[y_2(x)\cdot\dfrac{dy_1(x)}{dx}-y_1(x)\cdot\dfrac{dy_2(x)}{dx}\right]}\Rightarrow z_1(x)=\dfrac{1}{a_2}\displaystyle\int\dfrac{f(x)\cdot y_2(x)\cdot dx}{\left[y_2(x)\cdot\dfrac{dy_1(x)}{dx}-y_1(x)\cdot\dfrac{dy_2(x)}{dx}\right]} \\ \dfrac{dz_2(x)}{dx}=\dfrac{f(x)\cdot y_1(x)}{a_2\cdot\left[y_1(x)\cdot\dfrac{dy_2(x)}{dx}-y_2(x)\cdot\dfrac{dy_1(x)}{dx}\right]}\Rightarrow z_2(x)=\dfrac{1}{a_2}\displaystyle\int\dfrac{f(x)\cdot y_1(x)\cdot dx}{\left[y_1(x)\cdot\dfrac{dy_2(x)}{dx}-y_2(x)\cdot\dfrac{dy_1(x)}{dx}\right]} \end{cases}$$

A grande vantagem deste procedimento é sua generalidade, podendo ser aplicado para qualquer forma da função *f(x)*. Além disto, o procedimento pode ser também aplicado na resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis.

Exemplo Ilustrativo: Resolver a equação diferencial:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-8\cdot\frac{dy(x)}{dx}+16\cdot y(x)=6\cdot x\cdot e^{4\cdot x}$$

Determinação dos valores característicos do problema: $p(\lambda)=\lambda^2-8\cdot\lambda+16$, identificando $\lambda^2-8\cdot\lambda+16=(\lambda-4)^2$ conclui-se que os dois valores característicos do problema são iguais: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=4$, então a solução do problema homogêneo correspondente é: $y_h(x)=\exp(4\cdot x)\cdot(C_1+C_2\cdot x)$. A solução particular será:

(i) método dos coeficientes a determinar: como a função $f(x)=6\cdot x\cdot e^{4\cdot x}$ é solução do problema homogêneo correspondente, busca-se a solução particular da forma: $y_p(x)=B\cdot x^2\cdot e^{4\cdot x}$, chegando-se a :

$\dfrac{d^2y_p(x)}{dx^2}-8\cdot\dfrac{dy_p(x)}{dx}+16\cdot y_p(x)=2\cdot B\cdot e^{4\cdot x}\neq 6\cdot x\cdot e^{4\cdot x}$, logo o valor de B é indeterminado, Buscando agora uma solução particular da forma: $y_p(x)=B\cdot x^3\cdot e^{4\cdot x}$, chega-se a:

$\dfrac{d^2y_p(x)}{dx^2}-8\cdot\dfrac{dy_p(x)}{dx}+16\cdot y_p(x)=6\cdot B\cdot x\cdot e^{4\cdot x}=6\cdot x\cdot e^{4\cdot x}\Rightarrow B=1$, logo:

$y_p(x) = x^3 \cdot e^{4\cdot x}$ e $y(x) = \exp(4\cdot x)\cdot\left(C_1 + C_2\cdot x + x^3\right)$.

(ii) <u>método da variação de parâmetros</u>: identificando $y_1(x) = e^{4\cdot x}$ e $y_2(x) = x\cdot e^{4\cdot x}$, tem-se $y_1(x)\cdot\frac{dy_2(x)}{dx} - y_2(x)\cdot\frac{dy_1(x)}{dx} = e^{8\cdot z}$, logo:

$$\begin{cases} \frac{dz_1(x)}{dx} = -6\cdot x^2 \Rightarrow z_1(x) = -2\cdot x^3 \\ \frac{dz_2(x)}{dx} = 6\cdot x \Rightarrow z_2(x) = 3\cdot x^2 \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = -2\cdot x^3\cdot e^{4\cdot x} + 3\cdot x^2\cdot x\cdot e^{4\cdot x} = x^3\cdot e^{4\cdot x}.$$

Resultado idêntico ao obtido no procedimento anterior!

<u>6-2) Equações Diferenciais de Segunda Ordem Linear de Coeficientes Variáveis</u>

São equações diferenciais ordinárias da forma:

$$a_2(x)\cdot\frac{d^2y(x)}{dx^2} + a_1(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx} + a_0(x)\cdot y(x) = f(x) \quad \text{com} \quad a_2(x) \neq 0$$

Que pode também ser reescrita na forma:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + P(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx} + Q(x)\cdot y(x) = R(x) \quad \text{pois} \quad a_2(x) \neq 0$$

Antes de se apresentar o procedimento geral de resolução do problema, solução em séries, apresentam-se a seguir alguns procedimentos que podem ser utilizados em alguns casos especiais.

<u>(a) Mudança da variável dependente</u>: seja $y(x) = z(x)\cdot u(x)$, sendo *z(x)* uma função de *x* a ser definida posteriormente, substituindo *y(x)* na equação diferencial, obtém-se:

$$z(x)\cdot\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \left[2\cdot\frac{dz(x)}{dx} + P(x)\cdot z(x)\right]\cdot\frac{du(x)}{dx} + \left[\frac{d^2z(x)}{dx^2} + P(x)\cdot\frac{dz(x)}{dx} + Q(x)\cdot z(x)\right]\cdot u(x) = R(x)$$

1-)<u>Primeira escolha de *z(x)*</u>: escolhe-se *z(x)* tal que $2\cdot\frac{dz(x)}{dz} + P(x)\cdot z(x) = 0$, identificando o fator de integração: $\mu(x) = \exp\left[\frac{1}{2}\int P(x)\cdot dx\right]$, tem-se: $\frac{dz(x)}{dz} + \frac{P(x)}{2}\cdot z(x) = 0$ ou :

$z(x) = A\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\int P(x)\cdot dx\right]$ adotando *A*=1 : $z(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int P(x)\cdot dx\right]$, então:

$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} + P(x)\cdot\frac{dz(x)}{dx} + Q(x)\cdot z = \left[Q(x) - \frac{1}{4}\cdot P^2(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{dP(x)}{dx}\right]\cdot z(x)$ e a equação diferencial original transforma-se em:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[Q(x) - \frac{1}{4}\cdot P^2(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{dP(x)}{dx}\right]\cdot u(x) = R^*(x).$$

sendo $R^*(x) = R(x)\cdot\exp\left[\frac{1}{2}\int P(x)\cdot dx\right]$. A equação diferencial transformada não contém o termo da derivada primeira da nova variável dependente podendo em alguns casos ser mais facilmente resolvida, isto ocorre se o termo: $Q(x) - \frac{1}{4}\cdot P^2(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{dP(x)}{dx}$ for constante ou um múltiplo de $1/x^2$.

<u>Exemplo Ilustrativo:</u> Resolver a equação diferencial:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2\cdot\frac{dy(x)}{dx} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\cdot y(x) = 0$$

Identificando: $P(x)=2$, $Q(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$ e $R(x)=0$, tem-se: $z(x) = e^{-x}$ e

$Q(x) - \frac{1}{4}\cdot P^2(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{dP(x)}{dx} = -\frac{2}{x^2}$, transformando-se a equação original em:

$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{2}{x^2}\cdot u(x) = 0 \Rightarrow x^2\cdot\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - 2\cdot u(x) = 0$.

Esta última equação diferencial é a denominada *Equação de Euler* que apresenta a forma geral: $\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot x^i\cdot\frac{d^i y(x)}{dx^i} = f(x)$, tal equação pode ser transformada em uma equação diferencial linear e de coeficientes constantes através da seguinte mudança da variável independente:

$x = e^{\xi} \Leftrightarrow \xi = \ln(x)$,assim:

$\frac{dy(\xi)}{d\xi} = e^{\xi}\cdot\frac{dy(x)}{dx} = x\cdot\frac{dy(x)}{dx} \Rightarrow \frac{d}{d\xi} \equiv x\cdot\frac{d}{dx}$;

$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right] = x\cdot\frac{d}{dx}\left[x\cdot\frac{dy(x)}{dx}\right] = x^2\cdot\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x\cdot\frac{dy(x)}{dx}$,

$$\frac{d^3y(\xi)}{d\xi^3}=\frac{d}{d\xi}\left[\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2}\right]=x\cdot\frac{d}{dx}\left[x^2\cdot\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x\cdot\frac{dy(x)}{dx}\right]=x^3\cdot\frac{d^3y(x)}{dx^3}+3\cdot x^2\cdot\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x\cdot\frac{dy(x)}{dx}$$

....

Permitindo assim expressar os termos $x^i\cdot\frac{d^iy(x)}{dx^i}$ na forma: $x^i\cdot\frac{d^iy(x)}{dx^i}=\sum_{k=1}^{i}c_k\cdot\frac{d^ky(\xi)}{d\xi^k}$,

transformando a equação em: $\sum_{i=0}^{n}b_i\cdot\frac{d^iy(\xi)}{d\xi^i}=f\left(e^{\xi}\right)=f^*(\xi)$. A solução do problema homogêneo correspondente seria: $y_h(\xi)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot e^{\lambda_j\cdot\xi}$ voltando à variável original *x* tem-se: $y_h(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot x^{\lambda_j}$, desta maneira os valores de λ_j poderiam ser obtidos diretamente da equação original considerando: $y_h(x)=A\cdot x^r$, assim:

$$\frac{dy_h(x)}{dx}=A\cdot r\cdot x^{r-1}\Rightarrow x\cdot\frac{dy_h(x)}{dx}=A\cdot r\cdot x^r=r\cdot\left(A\cdot x^r\right)$$

$$\frac{d^2y_h(x)}{dx^2}=A\cdot r\cdot(r-1)\cdot x^{r-2}\Rightarrow x^2\cdot\frac{d^2y_h(x)}{dx^2}=A\cdot r\cdot(r-1)\cdot x^r=r\cdot(r-1)\cdot\left(A\cdot x^r\right)$$

$$\frac{d^3y_h(x)}{dx^3}=A\cdot r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdot x^{r-3}\Rightarrow x^3\cdot\frac{d^3y_h(x)}{dx^3}=A\cdot r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdot x^r=r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdot\left(A\cdot x^r\right)$$

e assim sucessivamente.

Permitindo concluir que:

$x^k\cdot\frac{d^ky_h(x)}{dx^k}=r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdot\cdots\cdot(r+1-k)\cdot\left(A\cdot x^r\right)$ para k=1, 2,...,n.

A substituição da última expressão na correspondente equação homogênea permite obter:

$\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot x^i\cdot\frac{d^iy_h(x)}{dx^i}=\left[\sum_{i=0}^{n}\beta_i\cdot r^i\right]\cdot\left(A\cdot x^r\right)=0$, então os valores de λ_j são as raízes do polinômio: $p_n(r)=\sum_{i=0}^{n}\beta_i\cdot r^i$. No caso particular de n=2 tem-se:

$a_2\cdot x^2\cdot\frac{d^2y_h(x)}{dx^2}+a_1\cdot x\cdot\frac{dy_h(x)}{dx}+a_0\cdot y_h(x)=0$, assim: $p_2(r)=a_2\cdot r\cdot(r-1)+a_1\cdot r+a_0$,

(i) se $\Delta = (a_1 - a_2)^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 > 0$, dois valores característicos reais e distintos, a solução é dada por: $y_h(x) = C_1 \cdot x^{\lambda_1} + C_2 \cdot x^{\lambda_2}$;

(ii) se $\Delta = (a_1 - a_2)^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 = 0$, dois valores característicos reais e iguais: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{a_2 - a_1}{2 \cdot a_2}$,dada por: $y_h(x) = x^{\lambda} \cdot [C_1 + C_2 \cdot \ln(x)]$;

(iii) se $\Delta = (a_1 - a_2)^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2 < 0$, dois valores característicos complexos e conjugados: $\lambda_1 = \sigma + i \cdot \omega$, $\lambda_2 = \sigma - i \cdot \omega$ sendo $\sigma = \dfrac{a_2 - a_1}{2 \cdot a_2}$ e $\omega = \dfrac{\sqrt{4 \cdot a_0 \cdot a_2 - (a_1 - a_2)^2}}{2 \cdot a_2}$,dada por:

$y_h(x) = x^{\sigma} \cdot \{C_1 \cdot \cos[\omega \cdot \ln(x)] + C_2 \cdot \text{sen}[\omega \cdot \ln(x)]\} = A \cdot \exp(\sigma \cdot x) \cdot \cos[\omega \cdot \ln(x) + \phi]$.

Aplicando o procedimento à equação: $x^2 \cdot \dfrac{d^2u(x)}{dx^2} - 2 \cdot u(x) = 0$, que é uma Equação de Euler de segunda ordem e homogênea, tem-se: $p_2(r) = r \cdot (r-1) - 2 = r^2 - r - 2 = (r+1) \cdot (r-2)$ cujas raízes são: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$, a solução da equação é então: $u(x) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 \cdot x^2$.

A solução do problema é então: $y(x) = \left(\dfrac{c_1}{x} + c_2 \cdot x^2\right) \cdot e^{-x}$

2-)<u>Segunda escolha de *z(x)*</u>: escolhe-se *z(x)* tal que $\dfrac{d^2z(x)}{dx^2} + P(x) \cdot \dfrac{dz(x)}{dx} + Q(x) \cdot z(x) = 0$, isto é *z(x)* é solução da equação diferencial homogênea correspondente, assim:

$z(x) \cdot \dfrac{d^2u(x)}{dx^2} + \left[2 \cdot \dfrac{dz(x)}{dx} + P(x) \cdot z(x)\right] \cdot \dfrac{du(x)}{dx} = R(x)$, ou:

$\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} + \left[\dfrac{2}{z(x)} \cdot \dfrac{dz(x)}{dx} + P(x)\right] \cdot \dfrac{du(x)}{dx} = \dfrac{R(x)}{z(x)}$. Adotando como nova variável dependente:

$p(x) = \dfrac{du(x)}{dx}$, definindo: $P^*(x) = \dfrac{2}{z(x)} \cdot \dfrac{dz(x)}{dx} + P(x)$ e $Q(x) = \dfrac{R(x)}{z(x)}$, tem-se:

$\frac{dp(x)}{dx} + P^*(x) \cdot p(x) = Q(x)$ que é uma equação diferencial linear de primeira ordem, tal equação pode ser resolvida pelo procedimento usual e, após a determinação de *p(x)*, determina-se: $u(x) = \int_a^x p(\xi) \cdot d\xi + C^{te}$

Exemplo Ilustrativo: Resolver a equação diferencial:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 8 \cdot \frac{dy(x)}{dx} + 16 \cdot y(x) = 6 \cdot x \cdot e^{4 \cdot x}$$

Por inspeção vê-se que a função $e^{4.x}$ solução da equação homogênea correspondente. Adotando-se $y(x) = e^{4 \cdot x} \cdot u(x)$, resulta em: $\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 6 \cdot x$, logo: $\frac{du(x)}{dx} = 3 \cdot x^2 + A$ e $u(x) = x^3 + A \cdot x + B$. Resultando na solução geral: $y(x) = e^{4 \cdot x} \cdot \left(x^3 + A \cdot x + B\right)$

Exemplo Ilustrativo: Resolver a equação diferencial:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - x^2 \cdot \frac{dy(x)}{dx} + x \cdot y(x) = x^{m+1}$$

Por inspeção vê-se que a função *x* é solução da equação homogênea correspondente.

$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - x^2 \cdot \frac{dy(x)}{dx} + x \cdot y(x) = 0 - x^2 + x \cdot x = 0$, adotando-se $y(x) = x \cdot u(x)$, resulta em: $\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[\frac{2}{x} - x^2\right] \cdot \frac{du(x)}{dx} = x^m$, definindo: $p(x) = \frac{du(x)}{dx}$ tem-se:

$\frac{dp(x)}{dx} + \left[\frac{2}{x} - x^2\right] \cdot p(x) = x^m$. Identificando o fator de integração: $\mu(x) = x^2 \exp\left(\frac{x^3}{3}\right)$ resulta:

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 \exp\left(\frac{x^3}{3}\right) \cdot p(x)\right] = x^{m+2} \exp\left(\frac{x^3}{3}\right) \Rightarrow x^2 \exp\left(\frac{x^3}{3}\right) \cdot p(x) = \int_0^x \xi^{m+2} \exp\left(\frac{\xi^3}{3}\right) \cdot d\xi + A$$

Ou seja: $p(x) = \int_0^x \xi^m \cdot \left(\frac{\xi}{x}\right)^2 \cdot \exp\left(\frac{\xi^3 - x^3}{3}\right) \cdot d\xi + \frac{A}{x^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)$, logo:

$$u(x)=\int_0^x p(\eta)\cdot d\eta + B = \int_0^x \int_0^\eta \xi^m \cdot \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 \cdot \exp\left(\frac{\xi^3-\eta^3}{3}\right)\cdot d\xi \cdot d\eta +$$
$$+A\int_0^x \frac{1}{\eta^2}\cdot \exp\left(-\frac{\eta^3}{3}\right)\cdot d\eta + B$$

<u>(b) Mudança da variável independente</u>: em alguns casos a equação diferencial:

$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+P(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx}+Q(x)\cdot y(x)=R(x)$ pode, em alguns casos, ser simplificada trocando-se a variável independente *x* por $z=z(x)$, assim, pela regra da cadeia:

$\frac{dy(x)}{dx}=\frac{dz(x)}{dx}\cdot\frac{dy(z)}{dz}$ e $\frac{d^2y(x)}{dx^2}=\left[\frac{dz(x)}{dx}\right]^2\cdot\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\frac{d^2z(x)}{dx^2}\cdot\frac{dy(z)}{dz}$, tem-se:

$$\left[\frac{dz(x)}{dx}\right]^2\cdot\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left[\frac{d^2z(x)}{dx^2}+P(x)\cdot\frac{dz(x)}{dx}\right]\cdot\frac{dy(z)}{dz}+Q(x)\cdot y(x)=R(x) \quad .$$

Selecionando *z(x)* tal que: $\frac{d^2z(x)}{dx^2}+P(x)\cdot\frac{dz(x)}{dx}=0\Rightarrow\frac{dz(x)}{dx}=\exp\left[-\int P(x)\cdot dx\right]$ a equação reescrita em termos de *z* não contém o termo $\frac{dy(z)}{dz}$ e pode, em certas situações, ser de mais fácil resolução que a equação na forma original.

<u>Exemplo Ilustrativo:</u> Resolver a equação diferencial:

$$x\cdot\frac{d^2y(x)}{dx^2}-\frac{dy(x)}{dx}+4\cdot x^3\cdot y(x)=x^5$$

Assim: $x\cdot\left[\frac{dz(x)}{dx}\right]^2\cdot\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\left[x\cdot\frac{d^2z(x)}{dx^2}-\frac{dz(x)}{dx}\right]\cdot\frac{dy(z)}{dz}+4\cdot x^2\cdot y(x)=x^5$, selecionando *z(x)* tal que $x\cdot\frac{d^2z(x)}{dx^2}-\frac{dz(x)}{dx}=0\Rightarrow\frac{1}{x}\cdot\frac{d^2z(x)}{dx^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dz(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{dz(x)}{dx}\right]=0$, logo:

$\frac{1}{x}\cdot\frac{dz(x)}{dx}=1\Rightarrow\frac{dz(x)}{dx}=x\Rightarrow z(x)=\frac{x^2}{2}$, então: $x^3\cdot\frac{d^2y(z)}{dz^2}+4\cdot x^3\cdot y(x)=x^5$, ou seja:

$\frac{d^2y(z)}{dz^2}+4\cdot y(z)=2\cdot z$. A solução da forma homogênea da equação diferencial acima é: $y_h(z)=C_1\cdot\cos(2\cdot z)+C_2\cdot \mathrm{sen}(2\cdot z)$, e a solução particular é da forma: $y_p(z)=\beta_0+\beta_1\cdot z$, então: $\dfrac{d^2 y_p(z)}{dz^2} + 4 \cdot y_p(z) = 4\beta_0 + 4\beta_1 \cdot z = 2 \cdot z \Rightarrow \beta_0 = 0 \quad \beta_1 = 1/2$. A solução completa da equação é: $y(z) = C_1 \cdot \cos(2 \cdot z) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot z) + \dfrac{z}{2}$, voltando à variável *x:*

$$y(x) = C_1 \cdot \cos(x^2) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(x^2) + \frac{x^2}{4}$$

<u>Exemplo Ilustrativo:</u> Resolver a equação diferencial:

$$\cos(x) \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} - [\cos(x)]^3 \cdot y(x) = 0$$

Assim:

$$\cos(x) \cdot \left[\frac{dz(x)}{dx}\right]^2 \cdot \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left[\cos(x) \cdot \frac{d^2 z(x)}{dx^2} + \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{dz(x)}{dx}\right] \cdot \frac{dy(z)}{dz} - [\cos(x)]^3 \cdot y(x) = 0,$$

selecionando *z(x)* tal que:

$$\cos(x) \cdot \frac{d^2 z(x)}{dx^2} + \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{dz(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{d^2 z(x)}{dx^2} + \frac{\operatorname{sen}(x)}{[\cos(x)]^2} \cdot \frac{dz(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{dz(x)}{dx}\right] = 0$$

ou seja: $\dfrac{dz(x)}{dx} = \cos(x) \Rightarrow z(x) = \operatorname{sen}(x)$, resultando em:

$$[\cos(x)]^3 \cdot \frac{d^2 y(z)}{dz^2} - [\cos(x)]^3 \cdot y(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y(z)}{dz^2} - y(z) = 0 \Rightarrow y(z) = C_1 \cdot e^{-z} + C_2 \cdot e^{z},$$

voltando à variável *x:*

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-\operatorname{sen}(x)} + C_2 \cdot e^{\operatorname{sen}(x)}$$

<u>(c) Identificação de equações diferenciais *exatas*</u>: há casos em que é possível identificar a expressão: $a_2(x) \cdot \dfrac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1(x) \cdot \dfrac{dy(x)}{dx} + a_0(x) \cdot y(x)$ como a derivada *exata* de uma equação diferencial de primeira ordem, isto é:

$$a_2(x) \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x) \cdot y(x) = \frac{d}{dx}\left[b_1(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + b_0(x) \cdot y(x)\right],$$

porém como:

$$\frac{d}{dx}\left[b_1(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx}+b_0(x)\cdot y(x)\right]=b_1(x)\cdot\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\left[\frac{db_1(x)}{dx}+b_0(x)\right]\cdot\frac{dy(x)}{dx}+\frac{db_0(x)}{dx}\cdot y(x)$$

tal só ocorre se: $b_1(x)=a_2(x)$; $\frac{db_1(x)}{dx}+b_0(x)=a_1(x)\Rightarrow b_0(x)=a_1(x)-\frac{da_2(x)}{dx}$ e $\frac{db_0(x)}{dx}=a_0(x)$. Então, para a equação ser exata, os coeficientes da equação diferencial original devem satisfazer a : $a_0(x)=\frac{db_0(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left[a_1(x)-\frac{da_2(x)}{dx}\right]$, ou seja:

$\frac{d^2a_2(x)}{dx^2}-\frac{da_1(x)}{dx}+a_0(x)=0$. Após verificada a condição tem-se:

$b_1(x)=a_2(x)$ e $b_0(x)=a_1(x)-\frac{da_2(x)}{dx}$.

<u>Exemplo Ilustrativo:</u> Resolver a equação diferencial:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-x^2\cdot\frac{dy(x)}{dx}-2\cdot x\cdot y(x)=0$$

Identificando: $a_2(x)=1$; $a_1(x)=-x^2$ e $a_0(x)=-2\cdot x$, tem-se:

$\frac{d^2a_2(x)}{dx^2}-\frac{da_1(x)}{dx}+a_0(x)=0+2\cdot x-2\cdot x=0$ verificando-se a condição, então:

$b_1(x)=a_2(x)=1$, $b_0(x)=a_1(x)-\frac{da_2(x)}{dx}=-x^2$ e

$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-x^2\cdot\frac{dy(x)}{dx}-2\cdot x\cdot y(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{dy(x)}{dx}-x^2\cdot y(x)\right]=0\Rightarrow\frac{dy(x)}{dx}-x^2\cdot y(x)=A$.

O fator de integração da última equação é: $\mu(x)=\exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)$, logo:

$\frac{d}{dx}\left[\exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)\cdot y(x)\right]=C_1\cdot\exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)\Rightarrow\exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)\cdot y(x)=C_1\cdot\int\exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)\cdot dx+C_2$,

explicitando *y(x)*: $y(x)=\exp\left(\frac{x^3}{3}\right)\cdot\left[C_1\cdot\int\exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)\cdot dx+C_2\right]$.

Exemplo Ilustrativo: Resolver a equação diferencial:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 2 \cdot e^x \cdot \frac{dy(x)}{dx} + 2 \cdot e^x \cdot y(x) = x^2$$

Identificando: $a_2(x) = 1$; $a_1(x) = 2 \cdot e^x$ e $a_0(x) = 2 \cdot e^x$, tem-se:

$\frac{d^2a_2(x)}{dx^2} - \frac{da_1(x)}{dx} + a_0(x) = 0 - 2 \cdot e^x + 2 \cdot e^x = 0$ verificando-se a condição, então:

$b_1(x) = a_2(x) = 1$, $b_0(x) = a_1(x) - \frac{da_2(x)}{dx} = 2 \cdot e^x$ e

$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 2 \cdot e^x \cdot \frac{dy(x)}{dx} + 2 \cdot e^x \cdot y(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy(x)}{dx} + 2 \cdot e^x \cdot y(x)\right] = x^2$, logo:

$\frac{dy(x)}{dx} + 2 \cdot e^x \cdot y(x) = \frac{x^3}{3} + C_1$. O fator de integração da última equação é: $\mu(x) = \exp(2 \cdot e^x)$,

logo: $\frac{d}{dx}\left[\exp(2 \cdot e^x) \cdot y(x)\right] = \frac{x^3}{3} \cdot \exp(2 \cdot e^x) + C_1 \cdot \exp(2 \cdot e^x)$, ou seja:

$$\exp(2 \cdot e^x) \cdot y(x) = \tfrac{1}{3} \cdot \int x^3 \cdot \exp(2 \cdot e^x) \cdot dx + C_1 \cdot \int \exp(2 \cdot e^x) \cdot dx + C_2$$

Explicitando *y(x)*: $y(x) = \exp(-2 \cdot e^x) \cdot \left[\tfrac{1}{3} \cdot \int x^3 \cdot \exp(2 \cdot e^x) \cdot dx + C_1 \cdot \int \exp(2 \cdot e^x) \cdot dx + C_2\right]$.

Quando o operador diferencial $a_2(x) \cdot \frac{d^2y(x)}{dx^2} + a_1(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x) \cdot y(x)$ não for exato pode ser que exista uma função $\mu(x)$ (*fator de integração*) que multiplicando o operador torne-o exato, assim, para que o operador diferencial:

$\mu(x) \cdot a_2(x) \cdot \frac{d^2y(x)}{dx^2} + \mu(x) \cdot a_1(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + \mu(x) \cdot a_0(x) \cdot y(x)$ seja exato, deve-se ter:

$\frac{d^2[\mu(x) \cdot a_2(x)]}{dx^2} - \frac{d[\mu(x) \cdot a_1(x)]}{dx} + \mu(x) \cdot a_0(x) = 0$, isto é:

$$a_2(x) \cdot \frac{d^2\mu(x)}{dx^2} + \left[2 \cdot \frac{da_2(x)}{dx} - a_1(x)\right] \cdot \frac{d\mu(x)}{dx} + \left[\frac{d^2a_2(x)}{dx^2} - \frac{da_1(x)}{dx} + a_0(x)\right] \cdot \mu(x) = 0$$

A equação acima é chamada de *equação adjunta* e o fator de integração $\mu(x)$ é uma integral particular dessa equação.

<u>Exemplo Ilustrativo:</u> Resolver a equação diferencial:

$$x \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2 \cdot \frac{dy(x)}{dx} + m^2 \cdot x \cdot y(x) = 0$$

Identificando: $a_2(x) = x$; $a_1(x) = 2$ e $a_0(x) = m^2 \cdot x$, a *equação adjunta* é:

$$x \frac{d^2 \mu(x)}{dx^2} + m^2 \cdot x \cdot \mu(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \mu(x)}{dx^2} + m^2 \cdot \mu(x) = 0 \Rightarrow \mu(x) = C_1 \cdot \cos(mx) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(mx),$$

adotando: $\mu(x) = \operatorname{sen}(mx)$ a equação original assume a forma:

$x \cdot \operatorname{sen}(mx) \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2 \cdot \operatorname{sen}(\mathrm{mx}) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + m^2 \cdot \operatorname{sen}(mx) \cdot x \cdot y(x) = 0$, assim:

$b_1(x) = x \cdot \operatorname{sen}(mx)$, $b_0(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(mx) - \frac{d[x \cdot \operatorname{sen}(mx)]}{dx} = \operatorname{sen}(mx) - mx \cdot \cos(mx)$ e a equação assume a forma: $\frac{d}{dx}\left\{ x \cdot \operatorname{sen}(mx) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + [\operatorname{sen}(mx) - mx \cdot \cos(mx)] \cdot y(x) \right\} = 0$, logo:

$x \cdot \operatorname{sen}(mx) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + [\operatorname{sen}(mx) - mx \cdot \cos(mx)] \cdot y(x) = C_1$, ou:

$\frac{dy(x)}{dx} + \left[\frac{1}{x} - \frac{m \cdot \cos(mx)}{\operatorname{sen}(mx)} \right] \cdot y(x) = \frac{C_1}{x \cdot \operatorname{sen}(mx)}$. O fator de integração da última equação é:

$\mu(x) = \frac{x}{\operatorname{sen}(mx)}$, logo: $\frac{x}{\operatorname{sen}(mx)} \cdot \frac{dy(x)}{dx} + \left[\frac{1}{\operatorname{sen}(mx)} - \frac{m \cdot x \cdot \cos(mx)}{[\operatorname{sen}(mx)]^2} \right] \cdot y(x) = \frac{C_1}{[\operatorname{sen}(mx)]^2}$, ou seja: $\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\operatorname{sen}(mx)} \cdot y(x) \right] = \frac{C_1}{[\operatorname{sen}(mx)]^2} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{sen}(mx)} \cdot y(x) = -\frac{C_1}{m} \cdot \frac{\cos(mx)}{\operatorname{sen}(mx)} + C_2$

Explicitando *y(x)*: $y(x) = \frac{1}{x}\left[-\frac{C_1}{m} \cdot \cos(mx) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(mx) \right]$, ou em forma mais simplificada:

$$y(x) = \frac{A \cdot \cos(mx) + B \cdot \operatorname{sen}(mx)}{x}$$

6-3) Resolução em Séries de Potências de Equações Diferenciais de Segunda Ordem Linear de Coeficientes Variáveis Homogêneas

6-3-1) Em Torno de Pontos Ordinários – Método de Fuchs

Equações diferenciais ordinárias da forma:

$$a_2(x)\cdot\frac{d^2y(x)}{dx^2}+a_1(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx}+a_0(x)\cdot y(x)=0$$

Se $p(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ e $q(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ são ambas funções analíticas em x_0, então a solução geral da equação é: $y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\cdot(x-x_0)^i=c_0\cdot y_1(x)+c_1\cdot y_2(x)$, sendo c_0 e c_1 constantes arbitrárias, e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções em séries linearmente independentes, analíticas em x_0. Além disso, o raio de convergências de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são pelo menos iguais ao menor dos raios de convergência de *p(x)* e *q(x)*.

Exemplo Ilustrativo: Resolver a equação diferencial (Equação de Airy):

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-x\cdot y(x)=0$$

Identificando: $p(x)=0$ e $q(x)=-x$ que são ambas analíticas em x_0=0 com raio de convergência infinito, busca-se então: $y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\cdot x^i$, logo:

$$x\cdot y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\cdot x^{i+1}=\sum_{i=1}^{\infty}c_{i-1}\cdot x^i\ ,$$

$$\frac{dy(x)}{dx}=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\cdot i\cdot x^{i-1}=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\cdot i\cdot x^{i-1}=\sum_{i=0}^{\infty}c_{i+1}\cdot(i+1)\cdot x^i\ \text{ e}$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=\sum_{i=0}^{\infty}c_{i+1}\cdot(i+1)\cdot i\cdot x^{i-1}=\sum_{i=1}^{\infty}c_{i+1}\cdot(i+1)\cdot i\cdot x^{i-1}=\sum_{i=0}^{\infty}c_{i+2}\cdot(i+2)\cdot(i+1)\cdot x^i\ .$$

Então: $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}-x\cdot y(x)=2\cdot c_2+\sum_{i=1}^{\infty}\left[c_{i+2}\cdot(i+2)\cdot(i+1)-c_{i-1}\right]\cdot x^i=0$, dando origem à equação de recorrência: $c_{i+2} = \dfrac{c_{i-1}}{(i+2)\cdot(i+1)}$ para i = 1, 2, ... com c_2 =0.

Assim: com $i = 1 \rightarrow c_3 = \dfrac{c_0}{2\cdot 3}$; com $i = 2 \rightarrow c_4 = \dfrac{c_1}{3\cdot 4}$; com $i = 3 \rightarrow c_5 = \dfrac{c_2}{4\cdot 5} = 0$;

com $i = 4 \rightarrow c_6 = \dfrac{c_3}{5\cdot 6} = \dfrac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$; com $i = 5 \rightarrow c_7 = \dfrac{c_4}{6\cdot 7} = \dfrac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$;

com $i = 6 \rightarrow c_8 = \dfrac{c_5}{7\cdot 8} = 0$; com $i = 7 \rightarrow c_9 = \dfrac{c_6}{8\cdot 9} = \dfrac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$;

com $i = 8 \rightarrow c_{10} = \dfrac{c_7}{9\cdot 10} = \dfrac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$; com $i = 9 \rightarrow c_{11} = \dfrac{c_8}{10\cdot 11} = 0$.

Permitindo obter:

$$y(x) = c_0 \cdot \left[1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \frac{x^{12}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12} + \cdots\right] +$$
$$+ c_1 \cdot \left[x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{x^{10}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \frac{x^{13}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdot 12\cdot 13} + \cdots\right]$$

Identificando-se: $y_1(x) = 1 + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \dfrac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \dfrac{x^{12}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12} + \cdots$ e

$$y_2(x) = x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{x^{10}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \frac{x^{13}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdot 12\cdot 13} + \cdots.$$

Neste caso não foi possível identificar uma lei de formação dos coeficientes das duas expansões, entretanto, é possível verificar a representar essas duas séries utilizando a equação de recorrência: $c_{i+2} = \dfrac{c_{i-1}}{(i+2)\cdot(i+1)}$ para i = 1, 2, ... com c_2 =0. Para se obter a representação gráfica de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ consideram-se as duas situações:

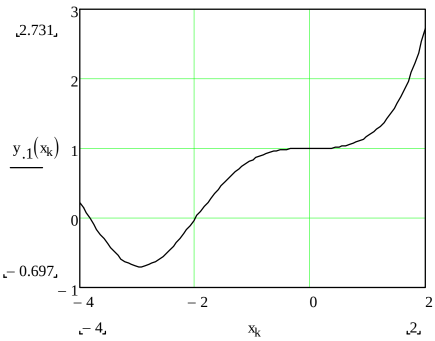
<u>Representação de $y_1(x)$</u> : $c_{i+2} = \dfrac{c_{i-1}}{(i+2)\cdot(i+1)}$ para i = 1, 2, ... com c_0 =1 ; c_1 =0 e c_2 =0,

após a determinação dos coeficientes, adota-se: $y_1(x) = 1 + \sum_{i=3}^{N} c_i \cdot x^i$.

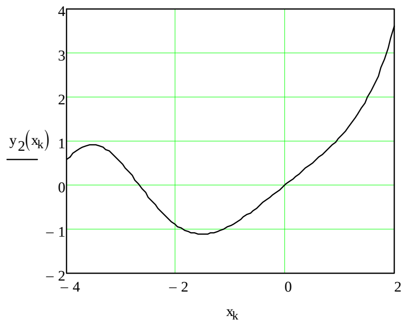
Representação de $\underline{y_2(x)}$: $c_{i+2} = \dfrac{c_{i-1}}{(i+2)\cdot(i+1)}$ para i = 1, 2, ... com c_0 =0 ; c_1 =1 e c_2 =0,

após a determinação dos coeficientes, adota-se: $y_2(x) = x + \sum_{i=4}^{N} c_i \cdot x^i$.

Tal procedimento foi aplicado dando origem às figuras:



$y_1(x)$ versus x com N =100



$y_2(x)$ versus x com N =100

Uma outra maneira de resolver a equação diferencial por séries de potências é através de sucessivas diferenciações da equação original, assim, no exemplo, a equação original é:

$\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - x\cdot y(x) = 0$ ou $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} = x\cdot y(x)$.

Diferenciando membro a membro da expressão em relação à variável *x:*

$\dfrac{d^3y(x)}{dx^3} = x\cdot\dfrac{dy(x)}{dx} + y(x)$, novamente:

$\dfrac{d^4y(x)}{dx^4} = x\cdot\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + 2\cdot\dfrac{dy(x)}{dx}$, novamente:

$\dfrac{d^5y(x)}{dx^5} = x\cdot\dfrac{d^3y(x)}{dx^3} + 3\cdot\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$.

Permitindo identificar a equação: $\dfrac{d^ky(x)}{dx^k} = x\cdot\dfrac{d^{k-2}y(x)}{dx^{k-2}} + (k-2)\cdot\dfrac{d^{k-3}y(x)}{dx^{k-3}}$ para k =3, 4,...

Em x=0, tem-se: $\left.\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$ e $\left.\dfrac{d^ky(x)}{dx^k}\right|_{x=0} = (k-2)\cdot\left.\dfrac{d^{k-3}y(x)}{dx^{k-3}}\right|_{k=0}$ para $k \geq 3$, mas:

$c_k = \frac{1}{k!} \cdot \left. \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right|_{x=0} \Rightarrow \left. \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right|_{x=0} = k! \cdot c_k$, então:

$c_2 = 0$ e $k! \cdot c_k = (k-2) \cdot (k-3)! \cdot c_{k-3} \Rightarrow \cdot c_k = \frac{c_{k-3}}{k \cdot (k-1)}$ para $k \geq 3$. As equações recursivas obtidas são iguais às obtidas anteriormente!

<u>Exemplo Ilustrativo:</u> Resolver a equação diferencial (Equação de Legendre):

$(1-x^2) \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 2 \cdot x \cdot \frac{dy(x)}{dx} + n \cdot (n+1) \cdot y(x) = 0$ sendo n um número inteiro positivo.

Identificando: $p(x) = -2 \cdot \frac{x}{1-x^2}$ e $q(x) = \frac{n \cdot (n+1)}{1-x^2}$ que são analíticas em x_0=0 e as correspondentes séries apresentam o mesmo raio de convergência R= 1, ou seja, as expansões em série de *p(x)* e *q(x)* convergem no domínio -1<*x*<+1.

Com: $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i$, tem-se:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot i \cdot x^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot i \cdot x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1} \cdot (i+1) \cdot x^i \quad ;$$

$$2 \cdot x \cdot \frac{dy(x)}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} 2 \cdot c_i \cdot i \cdot x^i \ ,$$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot (i-1) \cdot i \cdot x^{i-2} = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i+1} \cdot (i+1) \cdot i \cdot x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+2} \cdot (i+2) \cdot (i+1) \cdot x^i \ ,$$

$$x^2 \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot (i-1) \cdot i \cdot x^i \quad \text{e}$$

$$(1-x^2) \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} [c_{i+2} \cdot (i+2) \cdot (i+1) - c_i \cdot (i-1) \cdot i \cdot] x^i \ . \ .$$

Finalmente:

$$\left(1-x^2\right)\cdot\frac{d^2y(x)}{dx^2}-2\cdot x\cdot\frac{dy(x)}{dx}+n\cdot(n+1)\cdot y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\left[(i+1)\cdot(i+2)\cdot c_{i+2}-\left[i\cdot(i+1)-n\cdot(n+1)\right]c_i\cdot\right]x^i=0$$

Isto é: $c_{i+2}-\left[i\cdot(i+1)-n\cdot(n+1)\right]\cdot c_i=0\Rightarrow c_{i+2}=\left[\frac{i\cdot(i+1)-n\cdot(n+1)}{(i+1)\cdot(i+2)}\right]\cdot c_i$ para i =0 ,1, 2, ...

Analisando-se a equação recursiva é possível concluir que:

$y_1(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\cdot x^{2\cdot i}$ sendo: $\alpha_{i+1}=\left[\frac{2\cdot i\cdot(2\cdot i+1)-n\cdot(n+1)}{2\cdot(i+1)\cdot(2\cdot i+1)}\right]\cdot\alpha_i$ para i =0, 1, 2... com

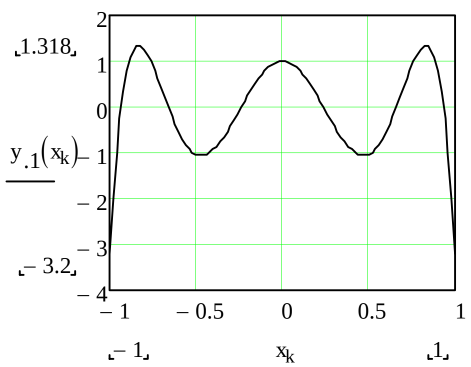
$\alpha_0=1$

e

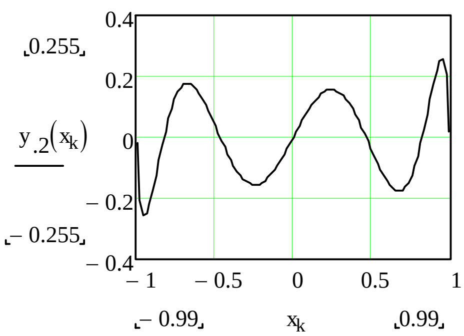
$y_2(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i\cdot x^{2\cdot i+1}$ sendo: $\beta_{i+1}=\left[\frac{2\cdot(i+1)\cdot(2\cdot i+1)-n\cdot(n+1)}{2\cdot(i+1)\cdot(2\cdot i+3)}\right]\cdot\beta_i$ para i =0, 1, 2...

com $\beta_0=1$

Quando n for um número **par** a solução $y_1(x)$ será uma função polinomial de grau n e quando n for um número **ímpar** a solução $y_2(x)$ será uma função polinomial de grau n. As figuras abaixo representam as duas soluções para n =6 e para n =7.



$P_6(x)$ versus x [$y_1(x)$ com n=6]



$y_2(x)$ com n=6