25. Encontre uma função de Green para o operador do Exercício 24, e utilize esta função para obter a desejada solução como G (sen ωt).

26. A equação de segunda ordem

$$(D - 1)(xD + 3)y = e^x$$

pode ser resolvida fazendo-se $(xD + 3)y = u$ e, a seguir, sucessivamente resolvendo-se as equações de primeira ordem

$$(D - 1)u = e^x \quad e \quad (xD + 3)y = u.$$

Empregue esta técnica para mostrar que a solução geral desta equação é

$$y = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2 e^x}{x^3}(x^2 - 2x + 2) + e^x.$$

27. Empregue a técnica introduzida no exercício precedente para mostrar, uma vez mais, que $xe^{\alpha x}$ é uma solução de $(D - \alpha)^2 y = 0$.

28. Seja $K(x, t)$ a função de Green (4-30) para valôres iniciais que envolvam o operador $L = D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$, e suponhamos que L esteja definido num intervalo I do eixo dos x.

(a) Qual é o domínio de $K(x, t)$ no plano xt?

(b) Demonstre que $K(x, x) = 0$ e $K_x(x, x) = 1$ para todo x em I. *Nota:* K_x designa a derivada parcial de $K(x, t)$ relativamente a x.

(c) Mostre que, para cada t fixo em I, a função $\varphi(x) = K(x, t)$ é uma solução, em I, do problema de valor inicial $Ly = 0$; $\varphi(t) = 0$, $\varphi'(t) = 1$.

(d) Use os resultados de (b) e (c) para deduzir que $K(x, t)$ é independente da base particular $y_1(x)$ e $y_2(x)$ escolhida para o espaço solução da equação homogênea $Ly = 0$.

29. Com $K(x, t)$, como no exercício precedente, mostre que a função y_p definida por

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t)h(t)\, dt$$

satisfaz às condições iniciais $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$ para todo h em $\mathcal{C}(I)$. [*Sugestão:* Use a fórmula de Leibnitz para derivar integrais,* a saber:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)\, dt = \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x, t)\, dt + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x).]$$

* Veja Teorema I-36.

***30.** Encontre a função de Green para problemas de valor inicial em $(0, \infty)$ para o operador

$$L = D^2 + \frac{1}{x}D + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right),$$

p um número real não-negativo.

4-5 VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS; FUNÇÕES DE GREEN *(continuação)*

O método de variação dos parâmetros pode fàcilmente ser estendido a equações de ordem arbitrária. Neste caso, comecemos com uma equação normal

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = h(x) \tag{4-34}$$

definida num intervalo I e, novamente, suponhamos conhecida a solução geral

$$y_h = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \tag{4-35}$$

da equação homogênea associada. Então, seguindo o raciocínio feito no caso de segunda ordem, procuremos uma solução particular da forma

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x), \tag{4-36}$$

onde, além da exigência de que y_p satisfaça (4-34), impomos as seguintes $n - 1$ condições sôbre as funções incógnitas $c_1(x), \ldots, c_n(x)$:

$$\begin{aligned} c_1'y_1 + \cdots + c_n'y_n &= 0, \\ c_1'y_1' + \cdots + c_n'y_n' &= 0, \\ &\vdots \\ c_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-2)} &= 0 \end{aligned} \tag{4-37}$$

para todo x em I. Se se coloca, agora, a expressão em (4-34) a expressão para y_p e se aplicam as condições acima, obtemos a equação adicional

$$c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = h(x). \tag{4-38}$$

E para cada x em I, (4-37) e (4-38) podem ser consideradas como um sistema de n equações lineares com as incógnitas $c_1', \ldots, c_n'$, cujo determinante é $W[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$. Nosso raciocínio original aplica-se ainda, e podemos obter uma solução particular para (4-34), resolvendo êste sistema em $c_1', \ldots, c_n'$, integrando e, a seguir, substituindo as funções resultantes em (4-36).

De fato, se $W_k(x)$ designa o determinante que se obtém de $W[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$, substituindo-se sua k-ésima coluna por

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

então um cálculo direto nos fornece

$$c_k'(x) = \frac{V_k(x)h(x)}{W[y_1(x), \ldots, y_n(x)]} \qquad (4\text{-}3$$

(veja Exercício 17). Então, como no caso de segunda ordem, a soluç[ão] particular pode ser escrita na forma integral, como

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)V_1(t) + \cdots + y_n(x)V_n(t)}{W[y_1(t), \ldots, y_n(t)]}\, h(t)\, dt, \qquad (4\text{-}4$$

onde x_0 é qualquer ponto de I, ou como

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t)h(t)\, dt, \qquad (4\text{-}4$$

onde

$$K(x, t) = \frac{y_1(x)V_1(t) + \cdots + y_n(x)V_n(t)}{W[y_1(t), \ldots, y_n(t)]}, \qquad (4\text{-}42$$

ou, para o leitor que prefira a notação dos determinantes

$$K(x, t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}}. \qquad (4\text{-}43)$$

A função $K(x, t)$ aqui definida chama-se *função de Green para o operador* $L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_0(x)$ (para problemas de valor inicial no intervalo I), e a expressão

$$G(h) = \int_{x_0}^{x} K(x, t)h(t)\, dt \qquad (4\text{-}44)$$

define uma inversa à direita $G\colon \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}^n(I)$ para o operador L. De fato

G é a inversa de L, tal que $G(h)$ satisfaz às condições iniciais

$$G(h)(x_0) = G(h)'(x_0) = \cdots = G(h)^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad (4\text{-}45)$$

para todo h de $\mathcal{C}(I)$.

Exemplo. Encontrar uma solução particular y_p para a equação

$$3y''' + 5y'' - 2y' = r(x), \qquad (4\text{-}46)$$

sendo $r(x)$ contínua em $(-\infty, \infty)$.

Aqui, a solução geral da equação homogênea associada é $c_1 + c_2e^{-2x} + c_3e^{x/3}$. Então,

$$y_p = c_1(x) + c_2(x)e^{-2x} + c_3(x)e^{x/3},$$

onde $c_1(x)$, $c_2(x)$, $c_3(x)$ satisfazem às identidades

$$\begin{aligned} c_1'(x) + c_2'(x)e^{-2x} + c_3'(x)e^{x/3} &= 0, \\ -2c_2'(x)e^{-2x} + \tfrac{1}{3}c_3'(x)e^{x/3} &= 0, \\ 4c_2'(x)e^{-2x} + \tfrac{1}{9}c_3'(x)e^{x/3} &= \frac{r(x)}{3}. \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\frac{r(x)}{2}, \\ c_2'(x) &= \tfrac{1}{14}e^{2x}r(x), \\ c_3'(x) &= \tfrac{3}{7}e^{-x/3}r(x), \end{aligned}$$

e segue-se que

$$\begin{aligned} y_p &= -\tfrac{1}{2}\int r(x)\, dx + \frac{e^{-2x}}{14}\int e^{2x}r(x)\, dx + \frac{3e^{x/3}}{7}\int e^{-x/3}r(x)\, dx \\ &= \int [-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{14}e^{-2(x-t)} + \tfrac{3}{7}e^{(x-t)/3}]r(t)\, dt. \end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter calculado a função de Green $K(x, t)$ para o operador (normal) $D^3 + \frac{5}{3}D^2 - \frac{2}{3}D$, e utilizando (4-41) para exprimir y_p como uma integral envolvendo $K(x, t)$. Começando com a base $1, \; e^{-2x}, e^{x/3}$ do espaço solução da equação homogênea associada, obtemos

$$K(x, t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} & e^{t/3} \\ 0 & -2e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{t/3} \\ 1 & e^{-2x} & e^{x/3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} & e^{t/3} \\ 0 & -2e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{t/3} \\ 0 & 4e^{-2t} & \frac{1}{9}e^{t/3} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\frac{7}{3}e^{-5t/3} - \frac{1}{3}e^{-2x}e^{t/3} - 2e^{x/3}e^{-2t}}{-\frac{2}{3}e^{-5t/3} - 4e^{-5t/3}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{14}e^{-2(x-t)} + \tfrac{3}{7}e^{(x-t)/3}.$$

Portanto,

$$y_p = G\left(\frac{r(x)}{3}\right)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{14}e^{-2(x-t)} + \tfrac{3}{7}e^{(x-t)/3}\right) y(t)\, dt,$$

que coincide com o resultado acima obtido.

O restante desta seção será dedicado a olhar de mais perto as funções de Green relativas a problemas de valor inicial e a estabelecer algumas de suas propriedades mais importantes. Ao longo desta discussão suporemos que

$$L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_0(x)$$

é um operador diferencial linear fixo em $\mathcal{C}^n(I)$, e que $K(x, t)$ é a função obtida acima, a partir da solução geral da equação $Ly = 0$. Decorre, então, da forma como foi construída $K(x, t)$ (veja Exercícios 18-21, abaixo) que:

(1) $K(x, t)$ está definida na região R do plano xt constituída de todos os pontos (x, t) com x e t em I (veja Fig. 4-1).

(2) $K(x, t)$ e $\partial K/\partial x$, $\partial^2 K/\partial x^2, \ldots, \partial^n K/\partial x^n$ são contínuos em R.

(3) Para *todo* x_0 em I, e *todo* h em $\mathcal{C}(I)$, a função

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t)h(t)\, dt$$

é uma solução do problema de valor inicial

$$Ly = h;$$
$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

em I.

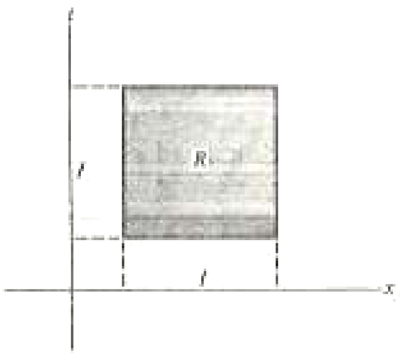

Fig. 4-1

Estas propriedades bastam, realmente, para caracterizar a função de Green relativas a problemas de valor inicial que envolvem L, no sentido de que $K(x, t)$ é a *única* função definida em R que satisfaz (1), (2) e (3). Esta afirmativa será demonstrada abaixo, como Teorema 4-3, e é mencionada aqui apenas para motivar a seguinte definição.

Definição 4-1. Uma definição $H(x, t)$ diz-se *função de Green relativa a problemas de valor inicial que envolvem o operador diferencial linear* L se, e sòmente se, $H(x, t)$ satisfaz às três propriedades enunciadas acima para a função $K(x, t)$.

Isto pôsto, passamos imediatamente a dar uma descrição alternativa, e, para o fim que temos em vista, muito mais útil, de uma função de Green para L. Por comodidade, designaremos as várias derivadas $\partial H/\partial x$, $\partial^2 H/\partial x^2, \ldots$ que aparecem no raciocínio seguinte, como $H_1, H_2, \ldots$. E com esta notação temos, realmente, o

Teorema 4-2. *Seja $H(x, t)$ definida sôbre a região R, acima descrita, e suponhamos que H e suas derivadas parciais $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sejam contínuas em R. Então, $H(x, t)$ é uma função de Green para o operador diferencial $L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_0(x)$ se, e sòmente se, as seguintes identidades forem satisfeitas em R:*

$$\begin{aligned} H(x, x) &= 0, \\ H_1(x, x) &= 0, \\ &\vdots \\ H_{n-2}(x, x) &= 0, \\ H_{n-1}(x, x) &= 1, \end{aligned} \tag{4-47}$$

e

$$H_n(x, t) + a_{n-1}(x)H_{n-1}(x, t) + \cdots + a_0(x)H(x, t) = 0. \tag{4-48}$$

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que $H(x, t)$ seja uma função de Green para L. Então, por definição, a função

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} H(x, t)h(t)\, dt \tag{4-49}$$

é uma solução para o problema de valor inicial

$$Ly = h; \quad y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

para todo x_0 em I e para todo h em $\mathcal{C}(I)$; veja (3). Agora, derivemos (4-49), usando a fórmula* de Leibnitz para obter

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} H_1(x, t)h(t)\, dt + H(x, x)h(x), \tag{4-50}$$

que se reduz a

$$H(x_0, x_0)h(x_0) = 0$$

* A fórmula de Leibnitz é

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)\, dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x).$$

quando $x = x_0$ [recordar que $y'(x_0) = 0$]. Mas, por hipótese, esta expressão é válida para todo h em $\mathcal{C}(I)$, e daí, em particular, para $h = 1$. Logo, $H(x_0, x_0) = 0$, e como x_0 se pode escolher arbitràriamente em I, temos

$$H(x, x) = 0,$$

e

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} H_1(x, t)h(t)\, dt. \tag{4-51}$$

Repetimos, agora, o argumento, começando com (4-51), para obter, primeiro

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x} H_2(x, t)h(t)\, dt + H_1(x, x)h(x),$$

depois

$$H_1(x, x) = 0,$$

e, finalmente

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x} H_2(x, t)h(t)\, dt.$$

Continuando dêste modo, chegamos, por fim, à situação

$$H_{n-2}(x, x) = 0,$$

e

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} H_{n-1}(x, t)h(t)\, dt.$$

Derivando uma vez mais, obtemos

$$y^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} H_n(x, t)h(t)\, dt + H_{n-1}(x, x)h(x),$$

e, daí,

$$y^{(n)}(x_0) = H(x_0, x_0)h(x_0). \tag{4-52}$$

Mas, como $y(x)$ é uma solução de $Ly = h$,

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = h(x),$$

e as condições iniciais de fato implicam que

$$y^{(n)}(x_0) = h(x_0).$$

Isto, juntamente com (4-52) e o fato de que h e x_0 são ainda arbitrários, implica que

$$H_{n-1}(x, x) = 1,$$

e

$$y^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} H_n(x, t)h(t)\, dt + h(x).$$

Temos, então, em particular, estabelecidas as várias identidades arroladas em (4-47).

Para demonstrar (4-48) substituímos as fórmulas obtidas acima para $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ em $Ly = h$. Após agrupar vários têrmos, obtemos

$$\int_{x_0}^{x} [H_n(x, t) + a_{n-1}(x)H_{n-1}(x, t) + \cdots + a_0(x)H(x, t)]h(t)\, dt = 0, \tag{4-53}$$

e o fato de que esta expressão vale para todo x_0 em I e todo h em $\mathcal{C}(I)$ leva-nos a concluir que a parte do integrando, contida em colchêtes, é idênticamente igual a zero (veja Exercício 23). E, com isto, a primeira parte da demonstração está completa.

Quanto à restante, o argumento necessário para mostrar que (4-47) e (4-48) implicam que $H(x, t)$ é uma função de Green para L é um cálculo ainda mais elementar que o que acabamos de expor e, por isso, se deixa como exercício (veja Exercício 24). ∎

Êste teorema afirma, entre outras coisas, que, para *qualquer* t_0 fixo no intervalo I, a função

$$k(x) = H(x, t_0)$$

é uma solução do problema de valor inicial

$$Ly = 0; \quad y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(n-2)}(t_0) = 0, \quad y^{(n-1)}(t_0) = 1.$$

Mas, como sabemos, a solução dêste problema é única. Então, os valôres de $H(x, t)$ são *determinados de maneira única* pelo operador L no segmento de reta formado pelos pontos (x, t) de R com $t = t_0$ (veja Fig. 4-2). Contudo, t_0 pode ser escolhido arbitràriamente em I e temos, portanto, nosso resultado principal.

> **Teorema 4-3.** *A função de Green para problemas de valor inicial em I, envolvendo um operador diferencial linear L, é determinada de maneira única por L e, por conseguinte, deve coincidir com a função $K(x, t)$ definida por (4-42) ou (4-43). Em particular, $K(x, t)$ independe da base para o espaço solução de $Ly = 0$ usada para calculá-la.*

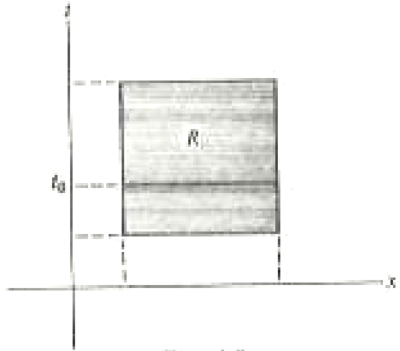

Fig. 4-2

Tudo o que foi dito até êste ponto, em nossa discussão, aplica-se a operadores diferenciais lineares arbitrários. Como era de esperar, podem-se oferecer informações muito mais precisas no caso de operadores com coeficientes constantes, e concluímos esta seção com um teorema que descreve as funções de Green, obtidas neste caso especial.

Teorema 4-4. *A função de Green para um operador diferencial linear com coeficientes constantes L pode ser escrita sob a forma* K(x-t), *onde $K(x)$ é a solução, em $(-\infty, \infty)$, do problema de valor inicial.*

$$Ly = 0; \quad y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1.$$

Demonstração: A função $H(x, t) = K(x - t)$ satisfaz, òbviamente, as identidades (4-47) e (4-48) do Teorema 4-2 e, por conseguinte, segundo o Teorema 4-3, *é a* função de Green para L.* ∎

EXERCÍCIOS

Use o método de variação de parâmetros [sem empregar as fórmulas (4-41) a (4-43)] para encontrar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

1. $y''' - y'' - y' + y = 4xe^x$
2. $y'' - y' = \operatorname{sen} x$
3. $y''' - 2y'' = 4(x + 1)$
4. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 1 + e^x$
5. $y'' - 7y' + 6y = 2 \operatorname{sen} x$
6. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{-x}$
7. $y''' - y' = \operatorname{sen} x$
8. $y''' + y'' + y' + y = 2(\operatorname{sen} x + \cos x)$
9. $y^{(iv)} - y'' = 2xe^x$
10. $y^{(iv)} - y = x^2 + 1$

Nos Exercícios de 11 a 16 calcule a função de Green $K(x, t)$ para o operador dado, (a) aplicando a Fórmula (4-42) ou (4-43) e (b), o Teorema 4-4.

* Observe-se que a hipótese de coeficientes constantes é necessária para verificar ...

11. $D^2(D - 1)$
12. $D(D^2 - 4)$
13. $D^3 - 6D^2 + 11D - 6$
14. $D^3 + \frac{5}{2}D^2 - \frac{3}{2}$
15. $D^2(D^2 - 1)$
16. $D^4 - 1$

17. Verifique a Fórmula (4-39). [*Sugestão*: Use a regra de Cramer.]

Os Exercícios de 18 a 21 dizem respeito a propriedades da função $K(x, t)$ definida pela fórmula (4-42) ou (4-43). Demonstre cada uma delas.

18. Quando $n = 2$, a Fórmula (4-43) se reduz a (4-30), da seção precedente.

19. $K(x, t)$ é definida e tem derivadas até ordem n na região R descrita no texto.

20. As derivadas parciais com relação a x de $K(x, t)$ satisfazem às identidades

$$K(x, x) = K_1(x, x) = \cdots = K_{n-2}(x, x) = 0, \quad K_{n-1}(x, x) = 1,$$

no intervalo I. Aqui,

$$K_i(x, t) = \frac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, t).$$

21. Para cada x_0 em I e cada h em $\mathcal{C}(I)$, a função

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t)h(t)\, dt$$

satisfaz às condições iniciais $y(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ e a equação $Ly = h(x)$. [*Sugestão*: Recorra à fórmula de Leibnitz e ao resultado do Exercício 20.]

22. Se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ e se

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

para *todo* g em $\mathcal{C}[a, b]$, então $f \equiv 0$ em $[a, b]$. [*Sugestão*: Suponha $f(x_0) \neq 0$ e utilize a continuidade de f para obter um intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ no qual $|f(x)| \geq |f(x_0)|/2$. A seguir, encontre uma função g em $\mathcal{C}(I)$ para a qual a integral acima é diferente de zero.]

23. Use o resultado do Exercício 22 para demonstrar a afirmativa feita no texto, concernente ao têrmo entre colchêtes, em (4-53).

24. Sejam $H(x, t)$, satisfazendo às hipóteses do Teorema 4-2 e às identidades dadas em (4-47) e (4-48). Demonstre que para todo x_0 em I e todo h em $\mathcal{C}(I)$ a função

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} H(x, t)h(t)\, dt$$

satisfaz ao problema de valor inicial

$$Ly = 0; \quad y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

[*Sugestão*: Use a fórmula de Leibnitz.]

25. Mostre que a função $H(x, t) = K(x - t)$ que aparece na demonstração do Teorema 4-4 satisfaz (4-47) e (4-48).

Os únicos valôres de $K(x, t)$ que entram na integração em (4-44) são aquêles para os quais o ponto (x, t) está na sub-região R_{x_0} de R, sombreada na Fig. 4-3. Isto sugere a possibilidade de generalizar a noção de uma função de Green como segue:

Definição 4-2. Uma função $\overline{K}(x, t)$ é chamada *função de Green para o operador* $L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_0(x)$ *para problemas de valor inicial no ponto* x_0, se ela é definida e contínua em R_{x_0}, e se para todo h em $\mathcal{C}(I)$ a função

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \overline{K}(x, t)h(t)\, dt$$

é a solução do problema de valor inicial

$$Ly = h;$$
$$y(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

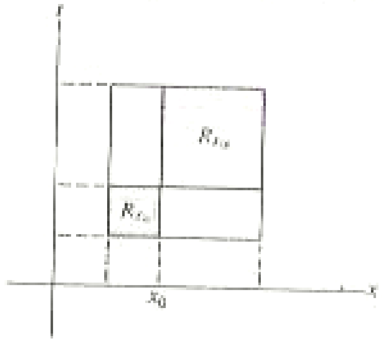

Fig. 4-3

Nos exercícios que seguem examinamos algumas das propriedades dessas funções e, em particular, mostramos que, sob certas hipóteses adicionais, elas coincidem com $K(x, t)$.

26. Seja $\overline{K}(x, t)$ como descrita acima, e suponhamos que $L = D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$. Suponhamos, além disso, que

(i) $\overline{K}(x, t)$, $\overline{K}_1(x, t)$, $\overline{K}_2(x, t)$ são contínuas em R_{x_0},
(ii) $\overline{K}(x, x) = 0$ em I,
(iii) $\overline{K}_1(x, x) = 1$ em I.

Demonstre que

$$\overline{K}_2(x, t) + a_1(x)\overline{K}_1(x, t) + a_0(x)\overline{K}(x, t) = 0.$$

[*Sugestão*: Siga a demonstração do Teorema 4-2.]

27. Seja $\overline{K}(x, t)$ como descrita no Exercício 26. Demonstre que $\overline{K}(x, t) = K(x, t)$ na região R_{x_0}.

28. Generalize os resultados dos Exercícios 26 e 27 para o caso de n-ésima ordem.

4-6 REDUÇÃO DE ORDEM

Uma das propriedades notáveis das equações diferenciais lineares é que podemos simplificar (e, algumas vêzes, resolver) a equação $Ly = h$, mesmo quando não temos uma base completa para o espaço solução de $Ly = 0$. A técnica, de nôvo, é variação dos parâmetros, mas desta vez ela conduz a uma *redução da ordem* da equação. O seguinte exemplo servirá para introduzir o método.

Exemplo 1. Consideremos a equação de segunda ordem

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x^3 \frac{dy}{dx} - 2(1 + x^2)y = x \tag{4-54}$$

no intervalo $(0, \infty)$. Aqui, nenhuma de nossas técnicas anteriores é suficiente para obter a solução geral da equação homogênea associada

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x^3 \frac{dy}{dx} - 2(1 + x^2)y = 0. \tag{4-55}$$

Contudo, a solução $y = x^2$ de (4-55) fàcilmente se descobre por inspeção* e continuemos, agora, a procurar soluções de (4-54) sob a forma

$$y = x^2c(x).$$

Então,

$$y' = x^2c'(x) + 2xc(x),$$
$$y'' = x^2c''(x) + 4xc'(x) + 2c(x),$$

e (4-54) produz

$$x^2(x^2c'' + 4xc' + 2c) + x^3(x^2c' + 2xc) - 2(1 + x^2)x^2c = x,$$

que, após simplificação, torna-se

$$x^4c'' + (4x^3 + x^5)c' = x,$$

ou

$$c'' + \frac{4 + x^2}{x}c' = \frac{1}{x^3}. \tag{4-56}$$

Mas (4-56) poderá ser encarada como uma equação de *primeira ordem* em c' e, como tal, pode ser resolvida pela técnica introduzida na Seç. 3-3. De fato, usando o fator integrante

$$e^{\int (4+x^2)/x\, dx} = x^4e^{x^2/2},$$

* A frase "descobre-se por inspeção" é, realmente, um expediente para encobrir o fato de que o processo é o de tentativa e erros.