Nos exercícios seguintes, damos ao estudante a oportunidade de explorar, por si mesmo, uma interessante variação da matéria desta seção.

6. Seja $\alpha > -1$ um número real, e seja

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}),$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ Mostre que $L_n^{(\alpha)}$ é um polinômio em x, de grau n, com coeficiente do têrmo de maior grau 1 para todo α e todo n.

7. Prove que

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x)\, dx = 0$$

para $m \neq n$ e daí deduza que $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, é uma seqüência de polinômios mùtuamente ortogonais no espaço $\mathcal{G}_2[0, \infty)$ com função pêso $x^\alpha e^{-x}$.

8. Prove que

$$\|L_n^{(\alpha)}\|^2 = n!\,\Gamma(n + \alpha + 1),$$

onde $\Gamma(\alpha)$ designa a *função gama* (veja Exercícios 25 e 26, Seç. 5-7).

9. (a) Prove que os polinômios de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}$ satisfazem à relação de recorrência

$$L_{n+1}^{(\alpha)} + (2n + \alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)} + n(n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)} = 0.$$

(b) Calcule os quatro primeiros polinômios de Laguerre $L_n^{(2)}$.

***10.** Prove que $L_n^{(\alpha)}$ é uma solução da equação diferencial

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

*11-8 FUNÇÕES GERATRIZES

Vimos que cada um dos vários tipos de polinômios ortogonais encontrados neste capítulo pode ser caracterizado de várias e diferentes maneiras: por meio de uma fórmula de Rodrigues, válida para todo n, por uma relação de recorrência, ou como soluções polinômicas de certas equações diferenciais lineares. Cada uma destas definições tem alguma coisa a recomendá-las, e uma escolha particular é mais uma questão de gôsto. Nesta seção, introduziremos ainda um outro modo de obter êsses polinômios, a saber: por meio das chamadas *funções geratrizes*. A idéia motivadora aqui é que os polinômios em questão podem aparecer como os coeficientes das séries de potências de certas funções de duas variáveis, e neste sentido são "gerados" por essas funções. Embora, a princípio, êste método possa parecer altamente artificial — particularmente porque fazemos pouco esfôrço para motivar a escolha da função geratriz — não o é, em absoluto. De fato, em muitos problemas físicos, as funções ortogonais que temos considerado se originam das suas funções geratrizes, de modo perfeitamente natural, e só por esta razão a discussão seguinte tem muito a recomendá-la.

I. *Os polinômios de Legendre.* Começamos aqui com a função

$$G(x, r) = \frac{1}{(1 - 2xr + r^2)^{1/2}}, \tag{11-45}$$

que desenvolvemos como uma série de potências em r, com a hipótese de que x e r são escolhidos de modo tal que a série resultante converge. Isto permite-nos escrever

$$\begin{aligned} G(x, r) &= P_0(x) + P_1(x)r + P_2(x)r^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)r^n, \end{aligned} \tag{11-46}$$

onde $P_0, P_1, \ldots$ são funções sòmente de x. Êstes coeficientes podem ser calculados a partir diretamente de (11-45) e de (11-46), na forma costumeira, e não é difícil mostrar que P_n deve ser um polinômio em x, de grau n. Por exemplo, fazendo $r = 0$ em (11-46) e notando que $G(x, 0) = 1$, encontramos

$$P_0(x) = 1.$$

Para a presente finalidade, entretanto, é suficiente observar que esta série é uniforme e absolutamente convergente quando $|2xr - r^2| < 1$, e, conseqüentemente, nestas condições, pode ser derivada têrmo a têrmo com relação a r, para produzir

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)r^{n-1}. \tag{11-47}$$

Mas, em vista de (11-45),

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{r - x}{(1 - 2xr + r^2)^{3/2}},$$

ou

$$(1 - 2xr + r^2)\frac{\partial G}{\partial r} + (r - x)G = 0.$$

Substituindo (11-46) e (11-47) nesta expressão, vem

$$(1 - 2xr + r^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)r^{n-1} + (r - x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)r^n = 0,$$

e segue-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)r^{n-1} - xP_0(x) - \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)r^n + P_0(x)r + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)P_n(x)r^{n+1} = 0,$$

ou

$$-xP_0(x) + P_0(x)r + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)r^n - \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)r^n + \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x)r^n = 0.$$

Portanto,

$$[P_1(x) - xP_0(x)] + [2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x)]r + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)]r^n = 0,$$

e temos

$$P_1 - xP_0 = 0,$$
$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0, \quad n \geq 1.$$

Mas a segunda dessas expressões nada mais é do que a relação de recorrência dos polinômios de Legendre, e como $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$, concluímos que os coeficientes de (11-46) são, de fato, os polinômios de Legendre. Portanto, a função

$$G(x, r) = \frac{1}{(1 - 2xr + r^2)^{1/2}}$$

é uma função geratriz para os polinômios de Legendre.

Em Física, deparamos com a função $G(x, r)$ no estudo do movimento planetário e do potencial eletrostático, entre outros. Na verdade, a dissertação original de Legendre sôbre êste assunto, publicada em 1785, foi dedicada ao estudo da atração gravitacional dos "esferóides", e é de tôda conveniência concluir o nosso estudo pos polinômios de Legendre com uma rápida indicação de como isto se realiza. Por várias razões consideraremos o caso do potencial eletrostático, o qual, teòricamente, é o mesmo que o tratado por Legendre. Especificamente, colocamos o problema de determinar o potencial em um ponto arbitrário Q do plano criado por um par de cargas pontuais de magnitudes $+\sigma$ e $-\sigma$ localizadas como o mostra a Fig. 11-4. Como o potencial em Q, devido a um só ponto de carga σ localizado a R unidades de distância, é σ/R, o potencial em Q neste caso é

$$V = \sigma\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

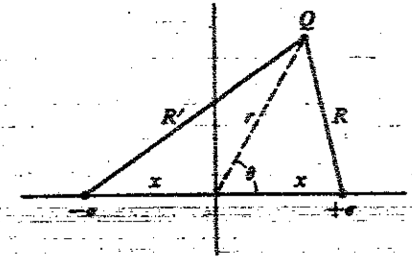

Fig. 11-4

Mas, reportando-nos à Fig. 11-4, vemos que

$$R^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos\theta,$$
$$R'^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos(\pi - \theta),$$

de onde se segue que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - \left(2\frac{x}{r}\cos\theta - \frac{x^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2}$$

e

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - \left(2\frac{x}{r}\cos(\pi - \theta) - \frac{x^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2}$$

Salvo quanto à notação, cada uma dessas expressões é a função geratriz para os polinômios de Legendre, e temos, portanto,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{x}{r}\right)^n$$

e

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\pi - \theta))\left(\frac{x}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{x}{r}\right)^n,$$

contanto que $|2(x/r)\cos\theta - (x/r)^2| < 1$. Logo,

$$V = \frac{\sigma}{r}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}[P_n(\cos\theta) - P_n(-\cos\theta)]\left(\frac{x}{r}\right)^n\right\}.$$

Finalmente, lembrando-nos de que P_n é par quando n é par, e ímpar quando n é ímpar, a expressão acima se reduz a

$$V = \frac{2\sigma}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos\theta)\left(\frac{x}{r}\right)^{2n+1}$$

Nas aplicações elementares, é costume aproximar V mediante o primeiro têrmo desta série, caso em que teremos

$$V \approx \frac{\sigma}{r^2}(2x)\cos\theta = \frac{\sigma}{r^2}d\cos\theta,$$

onde d é a distância entre as cargas.

II. *Polinômios de Hermite.* Neste caso, uma função geratriz é

$$G(x, r) = e^{xr - r^2/2}. \tag{11–48}$$

Com efeito, como a série

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

é uniforme e absolutamente convergente com relação a todo z,

$$G(x, r) = 1 + \left(xr - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(xr - \frac{r^2}{2}\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 + xr + \frac{1}{2!}(x^2 - 1)r^2 + \cdots$$

$$= H_0(x) + H_1(x)r + \frac{1}{2!}H_2(x)r^2 + \cdots$$

para todo x e para todo r. Derivando esta série têrmo a têrmo, encontraremos

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} r^n.$$

Mas (11-48) implica que

$$\frac{\partial G}{\partial r} = (x - r)G,$$

donde

$$\frac{\partial G}{\partial r} = (x - r)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} r^n$$

$$= xH_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{xH_n(x) - nH_{n-1}(x)}{n!} r^n.$$

Portanto,

$$H_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} r^n = xH_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{xH_n(x) - nH_{n-1}(x)}{n!} r^n,$$

e segue-se que

$$H_1 - xH_0 = 0,$$

$$H_{n+1} - xH_n + nH_{n-1} = 0, \quad n \geq 0,$$

como queríamos.

III. *Polinômios de Laguerre.* Uma função geratriz, no caso, é

$$G(x, r) = \frac{1}{1 - r} e^{-rx/(1-r)}; \tag{11–49}$$

afirmativa que se demonstra como segue.

A série de Taylor de G em potências de r pode ser escrita na forma

$$G(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(x) \frac{r^n}{n!}, \tag{11–50}$$

onde $L_n(x)$ é uma função apenas de x. Além disso, esta série converge uniforme e absolutamente com relação a todo x e a todo r com $|r| < 1$, pois $G(x, r)$ é o produto de duas funções cujas séries são convergentes. Portanto

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_n(x) \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Além disso, mediante (11-49)

$$(1 - r)^2 \frac{\partial G}{\partial r} = (1 - x - r)G,$$

e temos, daí,

$$(1 - r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L_n(x) \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} + (x - 1 + r) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(x) \frac{r^n}{n!} = 0. \tag{11–51}$$

Um cálculo fácil revela agora que

$$L_{n+1} + (2n + 1 - x)L_n + n^2 L_{n-1} = 0, \quad n \geq 1,$$

e como $L_0(x) = 1$ e $L_1(x) = x - 1$, está concluído.

EXERCÍCIOS

1. Seja

$$G(x, r) = \frac{1}{(1 - 2xr + r^2)^{1/2}}.$$

Prove que

(a) $(1 - 2xr + r^2)\dfrac{\partial G}{\partial x} - rG \equiv 0;$

(b) $(x - r)\dfrac{\partial G}{\partial x} - r\dfrac{\partial G}{\partial r} \equiv 0;$

(c) $r\dfrac{\partial}{\partial r}(rG) - (1 - rx)\dfrac{\partial G}{\partial x} \equiv 0.$

2. (a) Substitua a série

$$G(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n$$

nas identidades de 1(b) e 1(c), e deduza, então, que

$$nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) \equiv 0, \quad n \geq 1,$$

e

$$(n + 1)P_n(x) - P'_{n+1}(x) + xP'_n(x) \equiv 0.$$

(b) Aplique êsses resultados, para provar que

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n + 1)P_n$$

para todo $n \geq 1$.

3. Sirva-se das identidades do exercício anterior para deduzir a equação diferencial correspondente a P_n. [*Sugestão*: Substitua n por $n - 1$ na segunda identidade de 2(a) e a seguir substitua o valor de P'_{n-1} encontrado em 2(b). Derive e elimine P'_{n-1}, de nôvo.]

4. Partindo da série

$$G(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} r^n,$$

prove que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$

[*Sugestão*: $e^{xr - r^2/2} = e^{x^2/2} e^{-(x-r)^2/2}$.]

5. (a) Com G como o Exercício 4, calcule $\partial G/\partial r$, e mostre que $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$.

(b) Aplique o resultado de (a) e a fórmula de recorrência de H_n para obter a equação diferencial de H_n.

6. Mostre que a relação de recorrência dos polinômios de Laguerre decorre de (11-51).

7. Sejam os polinômios de Laguerre definidos pela função geratriz

$$G(x, r) = \frac{1}{1 - r} e^{-rx/(1-r)}.$$

(a) Prove que

$$(1 - r) \frac{\partial G}{\partial x} + rG \equiv 0,$$

$$r(1 - r) \frac{\partial G}{\partial r} - (x - 1 + r) \frac{\partial G}{\partial x} \equiv 0.$$

(b) Sirva-se destas identidades e da série

$$G(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(x) \frac{r^n}{n!}$$

para provar que L_n é uma solução da equação diferencial

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

8. (a) Partindo da fórmula

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}),$$

mostre que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{n!}{(n - k)!}\right]^2 \frac{x^{n-k}}{k!}.$$

*(b) Aplique o resultado de (a) para somar a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(x) \frac{r^n}{n!},$$

e mostre que

$$\frac{1}{1 - r} e^{-rx/(1-r)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(x) \frac{r^n}{n!}.$$

[*Sugestão*: Permute a ordem da soma.]

*9. Prove que a função

$$G(r, x) = \frac{1}{(1 - r)^{\alpha+1}} e^{-rx/(1-r)}$$

é uma função geratriz para os polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$ (veja Exercícios de 6 a 10 da seção anterior).

Tábua das Funções Ortogonais

A tábua seguinte resume os resultados obtidos neste capítulo. Para facilitação de referência, incluímos também a informação correspondente às funções de Bessel (veja Cap. 15).

POLINÔMIOS DE ~~LAGUERRE~~ LEGENDRE

Definição	$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$
* Relação de Recorrência	$P_{-1} \equiv 0, \quad P_0 \equiv 1$ $(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} \equiv 0, \quad n \geq 0$
Equação diferencial	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
Função geratriz	$\frac{1}{(1-2rx+r^2)^{1/2}}$
Ortogonalidade	Ortogonais em $\mathcal{CP}[-1,1]$ $P_m \cdot P_n = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$

POLINÔMIOS DE HERMITE

Definição	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$
* Relação de Recorrência	$H_{-1} \equiv 0, \quad H_0 \equiv 1$ $H_{n+1} - xH_n + nH_{n-1} \equiv 0, \quad n \geq 0$
Equação diferencial	$y'' - xy' + ny = 0$
Função geratriz	$e^{xr - r^2/2}$
Ortogonalidade	Ortogonais em $\mathcal{S}_2^{\infty}(-\infty, \infty)$; função pêso $e^{-x^2/2}$ $H_m \cdot H_n = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \sqrt{2\pi}\, n!, & m = n \end{cases}$

* O índice -1 só é usado quando trabalhamos com relações de recorrência.

POLINÔMIOS DE LAGUERRE L_n

Definição	$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$
* Relação de Recorrência	$L_{-1} \equiv 0, \quad L_0 \equiv 1$ $L_{n+1} + (2n+1-x)L_n + n^2 L_{n-1} \equiv 0, \quad n \geq 0$
Equação diferencial	$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$
Função geratriz	$\frac{1}{1-r}e^{-rx/(1-r)}$
Ortogonalidade	Ortogonais em $\mathcal{S}_2^{\infty}[0, \infty)$; função pêso e^{-x} $L_m \cdot L_n = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ (n!)^2, & m = n \end{cases}$

POLINÔMIOS DE LAGUERRE $L_n^{(\alpha)}$

Definição	$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}), \quad \alpha > -1$
* Relação de Recorrência	$L_{-1}^{(\alpha)} \equiv 0, \quad L_0^{(\alpha)} \equiv 1$ $L_{n+1}^{(\alpha)} + (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)} + n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)} \equiv 0, \quad n \geq 0$
Equação diferencial	$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0$
Função geratriz	$\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}}e^{-rx/(1-r)}$
Ortogonalidade	Ortogonais em $\mathcal{S}_2^{\infty}[0, \infty)$; função pêso $x^{\alpha}e^{-x}$ $L_m^{(\alpha)} \cdot L_n^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ n!\,\Gamma(n+\alpha+1), & m = n \end{cases}$

* O índice -1 só é usado quando trabalhamos com relações de recorrência.

FUNÇÕES DE BESSEL

Definição	Definidas pela equação diferencial
* Relação de recorrência	$xJ_{p+1} - 2pJ_p + xJ_{p-1} = 0$, sendo p um número real arbitrário
Equação diferencial	$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$
Função geratriz	$e^{(x/2)(t-1/t)}$
Ortogonalidade	Demasiado extensos para serem resumidos aqui. Veja Seç. 15-9

* O índice -1 só é usado quando trabalhamos com relações de recorrência.

Séries Infinitas

Apêndice III

III-1 INTRODUÇÃO

O objetivo dêste apêndice é apresentar uma descrição razoàvelmente completa da matéria relativa à convergência de seqüências e séries que foi usada no texto. Do ponto de vista de perfeição lógica, esta discussão deveria começar com um estudo detalhado do sistema de números reais, incluindo-se sua construção a partir dos racionais. Isto, contudo, é um empreendimento longo que cabe mais a um texto de cálculo avançado. Por isto, em vez de o empreender, admitiremos de antemão que o estudante tenha um conhecimento prático do sistema de números reais, pelo menos dentro da faixa daquele ensinado normalmente num primeiro curso de cálculo, e nêle basearemos a nossa discussão.

Na verdade, é possível apresentar um estudo rigoroso e auto-suficiente da teoria da convergência de seqüências, quando há disposição em se aceitar, como dado, um conjunto $\mathcal{R}$ de objetos, chamados números reais, que se podem somar, subtrair, multiplicar e dividir de acôrdo com as regras familiares da Aritmética. Além disso, é necessário admitir (a) que $\mathcal{R}$ contém os inteiros como um subconjunto, (b) que $\mathcal{R}$ é ordenado por uma relação $\leq$ com tôdas as propriedades habitualmente associadas a êste símbolo e (c) que $\mathcal{R}$ satisfaz ao denominado princípio do supremo que agora estabelecemos.

> **Definição III-1.** Um número real b é uma *cota superior* de um conjunto (não-vazio) $\mathcal{S}$ de números reais se, e sòmente se, $s \leq b$ para todo s de $\mathcal{S}$. Se, além disso, nenhum número menor que b é uma cota superior de $\mathcal{S}$, então diz-se que b é um *supremo* (sup) de $\mathcal{S}$. (Os têrmos *cota inferior* é *ínfimo* (inf) são anàlogamente definidos.)

Nestes têrmos, o princípio do supremo — que, aliás, é efetivamente um teorema relativo a números reais — assim se enuncia: