3. Designemos por L o operador diferencial linear de quarta ordem D^4, e por $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathcal{C}^4[a, b]$, constituído de tôdas as funções y, tais que

$$y(a) = y''(a) = y(b) = y''(b) = 0.$$

(a) Prove que

$$y_1(Ly_2) - y_2(Ly_1) = [y_1y_2''' - y_2y_1''' - y_1'y_2'' + y_2'y_1'']'$$

para todos os y_1 e y_2 de $\mathcal{S}$.

(b) Aplique o resultado de (a) para provar que autofunções associadas a autovalores distintos do problema de contôrno $L : \mathcal{S} \to \mathcal{C}[a, b]$ são ortogonais.

12-7 PROBLEMAS DE CONTÔRNO E DESENVOLVIMENTOS EM SÉRIE

Começamos êste capítulo, definindo um problema de contôrno como sendo uma equação linear da forma

$$Ly = h \tag{12–30}$$

na qual h é uma função conhecida de $\mathcal{C}[a, b]$, e L um operador diferencial linear de segunda ordem a atuar num subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}^2[a, b]$, descrito por um par de condições de contôrno da forma (12-2). Desde então muito pouco temos dito acêrca de tais problemas e, ao invés disto, temos estado à procura de autovalores e autofunções. Agora já é tempo de justificar esta aparente digressão, voltando ao nosso problema inicial e aplicando aquilo que aprendemos para resolvê-lo.

O método que nos propomos usar é uma generalização direta do método do autovalor introduzido na Seç. 12-3 aos espaços euclidianos de dimensão infinita, e assim depende da existência de uma *base* de autofunções de $\mathcal{C}[a, b]$. É claro que, por enquanto, não temos certeza de que essa base exista, mesmo quando L seja simétrica, mas, caso exista, podemos argumentar como segue.

Seja

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

os autovalores de L, e seja

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$

um conjunto completo de autofunções associadas aos λ_n. Então, como as φ_i formam uma *base* de $\mathcal{C}[a, b]$, temos

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x),$$

em que

$$c_n = \frac{h \cdot \varphi_n}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{\int_a^b h(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx},$$

e a série converge *em média* para h. Agora façamos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\varphi_n(x), \tag{12–31}$$

com os α_n desconhecidos, e substituamos em (12-30) para obter

$$L\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\varphi_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x).$$

Portanto, se L puder ser aplicado a (12-31), têrmo a têrmo, teremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\lambda_n\varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

(recordemos que $L\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$), e segue-se que (12-31) será uma solução da equação dada, se

(i) α_n puder ser escolhido de modo tal que

$$\alpha_n\lambda_n = c_n$$

para todo n, e se

(ii) para êsses valôres de α_n, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\varphi_n(x)$$

definir uma função de $\mathcal{C}^2[a, b]$ cujas duas primeiras derivadas poderão ser calculadas, derivando-se têrmo a têrmo.

É claro que a primeira destas condições será atingida fazendo-se $\alpha_n = c_n/\lambda_n$, desde que $\lambda_n \neq 0$ para todo n (isto é, desde que L seja biunívoca). Além disto, a solução é única neste caso. Se, por outro lado, um dos λ_n, digamos λ_0, fôr zero, o problema não terá solução quando $c_0 \neq 0$, e uma infinidade de soluções quando $\cancel{c_0 \neq 0}$. $c_0 = 0$

Infelizmente, não podemos fazer uma análise assim tão simples para obter (ii), porque aqui devemos investigar a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n(x).$$

Como já vimos, êste é um problema delicado cuja solução depende das propriedades da função h da qual se originam os c_n, e do sistema ortogonal particular φ_n que aparece nesta série. Assim, sistemas ortogonais diferentes devem ser examinados separadamente, e o máximo que se pode dizer, em geral, é que a desejada diferenciabilidade, têrmo a têrmo, será possível quando h fôr "suficientemente diferenciável" (veja, no entanto, o Teorema 12-7). Na falta de uma informação específica sôbre qual grau de diferenciabilidade seja "suficiente" num dado exemplo, é prática comum proceder formalmente, como acima, e, a seguir, tentar verificar se a série resultante tem as propriedades exigidas. Êste método será ilustrado com algum detalhe no próximo capítulo.

EXEMPLO 1. Seja $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathcal{C}^2[0, \pi]$ descrito pelas condições de contôrno $y(0) = y(\pi) = 0$, e seja $L = -D^2$. Então,

$$\lambda_n = n^2, \qquad \varphi_n(x) = \operatorname{sen} nx,$$

$n = 1, 2, \ldots$, e os φ_n formam uma *base* de $\mathcal{C}[0, \pi]$ (veja Seç. 9-5). Logo, o problema de contôrno

$$\begin{gathered} -y'' = h(x), \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{gathered} \tag{12–32}$$

tem a solução *formal*

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} \operatorname{sen} nx, \tag{12–33}$$

com

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Neste caso, a validez de (12-33) pode ser garantida, supondo-se que h seja contínua e tenha derivada primeira contínua por partes em $[0, \pi]$. Com efeito, a série em seno de Fourier de h convergirá, então, uniforme e absolutamente em todo o subintervalo fechado de $(0, \pi)$, e o mesmo acontecerá com a série que se obtém, diferenciando-se (12-33) têrmo a têrmo.*

Como exemplo concreto, seja $h(x) = x$. Então, (12-32) passa a ser

$$\begin{gathered} -y'' = x, \\ y(0) = y(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{12–34}$$

* O leitor deve notar que (12-33) satisfará às condições de contôrno dadas *e* se reduzirá ao valor de h em 0 e em π, sòmente se $h(0) = h(\pi) = 0$. Portanto, não podemos, em geral, nem exigir nem esperar que a solução de (12-32) satisfaça à equação diferencial no intervalo *fechado* $[0, \pi]$.

e temos

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} \operatorname{sen} nx,$$

em que

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Um cálculo rotineiro dá

$$c_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n};$$

conseqüentemente,

$$y(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}.$$

É claro que (12-34) pode também ser resolvida na forma fechada, aplicando-se as condições de contôrno à solução geral de $y'' = -x$. Para que o leitor não pense que temos sido um tanto quanto desleais, usando série de Fourier em vez dêste método mais fácil, salientamos que, freqüentemente, tal opção não existe, e que as únicas soluções disponíveis são as expressas como séries em têrmos de autofunções do problema.

A técnica usada no exemplo acima teve bom êxito, precisamente porque o operador $-D^2$ tinha autofunções mùtuamente ortogonais, quando restrito a $\mathcal{S}$, em número suficiente para permitir-nos construir uma *base* de autofunções de $\mathcal{C}[0, \pi]$. Isto dá imediatamente origem ao problema de determinar condições que sejam suficientes para garantir a existência de tal base para um operador diferencial linear auto-adjunto arbitrário que atue num dado subespaço de $\mathcal{C}^2[a, b]$. Como poderíamos supor, êste é um problema bastante difícil e qualquer tentativa de resolvê-lo, mesmo para os operadores simétricos introduzidos na Seç. 12-5, levar-nos-ia para bem longe do nosso roteiro. Por isso, contentamo-nos com o enunciado do seguinte teorema que, como se verifica, é adequado para se lidar com a maioria dos problemas que discutiremos.

Teorema 12-7. *Seja L um operador diferencial linear de segunda ordem normal num intervalo fechado $[a, b]$, e seja $\mathcal{S}$ um subespaço de $\mathcal{C}^2[a, b]$ descrito por um par de condições de contôrno não-mistas. Então, L tem uma seqüência infinita de autovalores reais $\{\lambda_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tal que*

$$|\lambda_0| < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

*Além disso, os subespaços invariantes de $\mathcal{C}[a, b]$ associados aos λ_n são todos unidimensionais; qualquer conjunto completo de autofunções de L, um para cada autovalor, é uma base de $\mathcal{C}[a, b]$; e o desenvolvimento em série de qualquer função continuamente, diferenciável por partes y em $[a, b]$, relativamente a uma tal base, converge uniforme e absolutamente para y, em qualquer subintervalo fechado no qual y é contínua.**

EXERCÍCIOS

Encontre o desenvolvimento em série formal da solução dos problemas de contôrno dos Exercícios 1-6 em têrmos das autofunções do sistema de Sturm-Liouville associado.

1. $y'' = x(x - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
2. $y'' = x^2 - \pi^2, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
3. $y'' = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{L}, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
4. $y'' = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{L}, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
5. $y'' = \begin{cases} -x, & 0 \le x < \pi/2, \\ x - \pi/2, & \pi/2 < x \le \pi, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$
6. $y'' = -\operatorname{sen}^2 x, \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi).$

*7. Use a técnica introduzida nesta seção para discutir o problema de contôrno

$$y'' = -h(x),$$
$$y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi),$$

sendo h uma função dada de $\mathcal{C}[0, 2\pi]$. [*Sugestão*: Considere separadamente os casos

$$\int_0^{2\pi} h(x)\, dx = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^{2\pi} h(x)\, dx \neq 0$$

*8. Citando os teoremas apropriados do texto, verifique a afirmativa feita acima no tocante à convergência da série dada em (12-33).

* Para uma demonstração, veja-se E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*. Dover, New York, 1956.

$\lambda = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$, com autovetores da forma $x_2\left(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\mathbf{e}_3\right)$

5. (a) $\mathbf{x} = -\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \frac{4}{3}\mathbf{e}_3$ (b) $\mathbf{x} = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_3$
(c) $\mathbf{x} = -\frac{8}{3}\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \frac{10}{3}\mathbf{e}_3$

9. (b) $\lambda = 0$ é um autovalor de multiplicidade $n + 1$.
$\mathcal{S}_0$ é o subespaço das funções constantes; $\dim \mathcal{S}_0 = 1$.

Seção 12-4

1. (a) $\lambda_1 = \frac{1}{2}[c + a + \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2}\,]$,
$\lambda_2 = \frac{1}{2}[c + a - \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2}\,]$
(b) $[c - a + \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2}\,]\mathbf{e}_1 - 2b\mathbf{e}_2$,
$-2b\mathbf{e}_1 + [c - a - \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2}\,]\mathbf{e}_2$

[*Nota:* Se $b = 0$, um dêstes vetores é o vetor nulo; neste caso, a base requerida é $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.]

3. $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

5. (b) O núcleo é o conjunto de tôdas as funções $F(k)$ de $\mathcal{F}$ da forma

$$F(k) = c_1 k + c_2, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

onde c_1, c_2 são constantes reais e arbitrárias.

Seção 12-5

3. $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, com autofunções da forma
$y = c \cos nx \quad (c \neq 0)$,
$\lambda = \dfrac{(2n + 1)^2}{4}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, com autofunções da forma
$y = c \operatorname{sen} \dfrac{(2n + 1)x}{2} \quad (c \neq 0)$

Seção 12-7

1. $y = \dfrac{128}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^5} \operatorname{sen} \frac{2n + 1}{2} x$ **3.** Não há solução; $\lambda_0 = 0$, $c_0 = -\dfrac{2}{\pi} \neq 0$

5. $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1} 4}{(2k - 1)^4 \pi} - \frac{1}{(2k - 1)^3}\right] \operatorname{sen}(2k - 1)x + \left[\frac{1 + (-1)^{k+1}}{8k^3}\right] \operatorname{sen} 2kx$

7. Se $\int_0^{2\pi} h(x)\,dx \neq 0$, não existe solução; se $\int_0^{2\pi} h(x)\,dx = 0$, então

$$y = c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(x) \cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(x) \operatorname{sen} nx\,dx,$$

e c é arbitrário.