Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE – Programa de Engenharia Química

COQ 790 – ANÁLISE DE SISTEMAS DA ENGENHARIA QUÍMICA

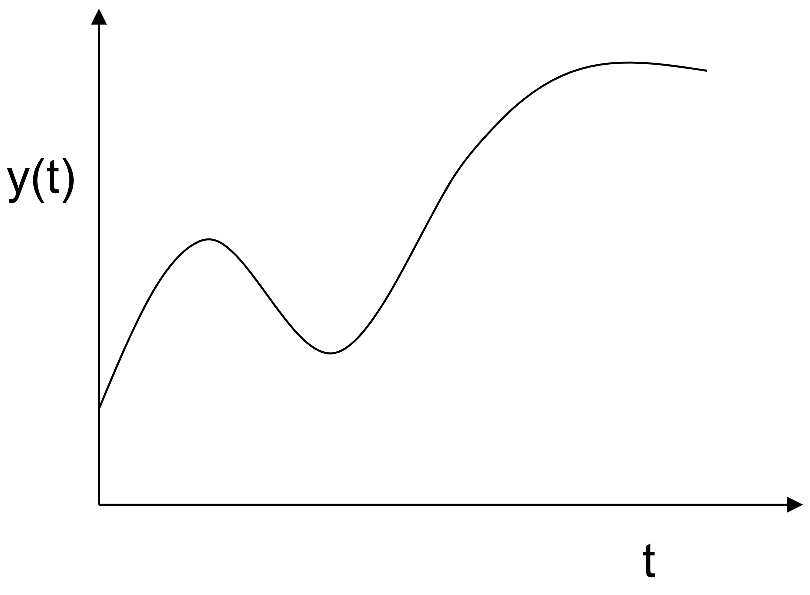
AULA 10:

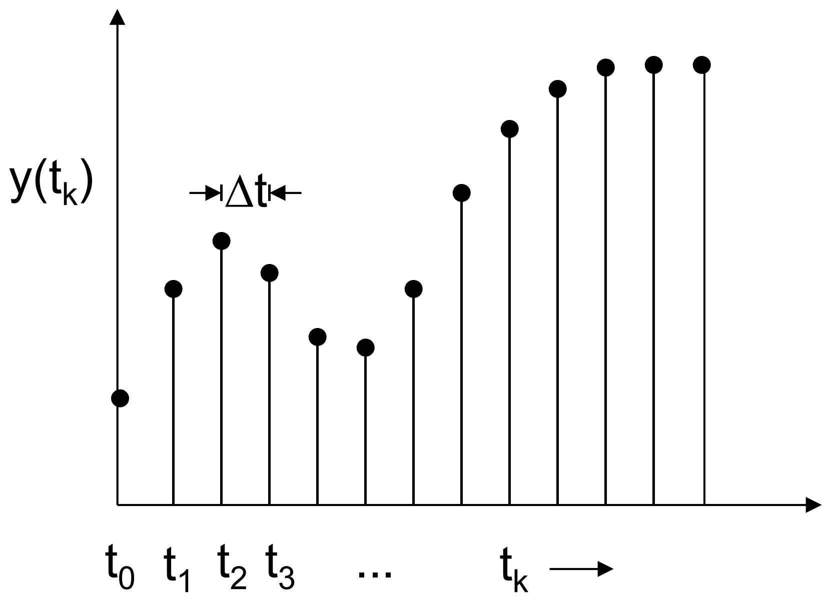
Domínio Discreto; Transformada Z.

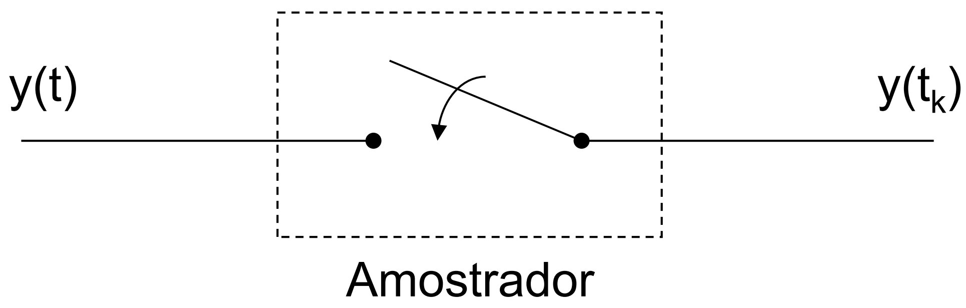
2014/1

Introdução ao Domínio Discreto

Em aplicações digitais, o tempo contínuo é observado em intervalos discretos...







Desejamos aproximar f(t) por uma função discreta (amostrada) f*(t), de modo que:

$$f^{*}(t) = f(t_k),\ \text{com}\ t_k = k\Delta t,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

A literatura sugere interpretar a amostragem da função f(t) como sendo realizada a partir de um trem de perturbações do tipo impulso aplicadas nos tempos discretos t_k, de modo que:

$$f^{*}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k)\delta(t - t_k)$$

onde $\delta(t-t_k)$ é a perturbação delta de Dirac.

Aplicando a transformação de Laplace à equação acima, obtemos:

$$\mathbf{L}\left[f^{*}(t)\right] = \mathbf{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(t_k)\delta(t - t_k)\right]$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-st}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(t_k)\delta(t - t_k)\right)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t_k)\delta(t - t_k)dt\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[f(t_k)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-st}\delta(t - t_k)dt\right)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k)e^{-st_k}$$

Substituindo t_k por $k\Delta t$, temos:

$$f^{*}(s) = \mathbf{L}\left[f^{*}(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k)e^{-sk\Delta t}$$

Vamos agora comparar esse resultado com a transformada de Laplace de f(t):

$$f^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k) e^{-sk\Delta t}$$ **Caso discreto**

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$ **Caso contínuo**

Agora, ***por conveniência***, introduzimos a seguinte notação de modo a simplificar a equação acima para o caso discreto:

$$z = e^{s\Delta t}$$

e nos referirmos ao resultado **L**[f*(t)] como ***"transformada z"*** de f*(t), escrevemos:

$$f^*(z) = Z\left[f^*(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k) z^{-k}$$

sendo essa a definição formal da transformada z de um sinal amostrado f*(t).

- Propriedades e teoremas da transformada z

  - ✓ Linearidade:

$$Z\left[c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k)\right] = c_1 Z\left[f_1(k)\right] + c_2 Z\left[f_2(k)\right]$$

  - ✓ Convolução:

Se f(k) e g(k) são duas sequências discretas em k, que são representações das funções discretas f*(t) e g*(t), e se

$$Z\left[f(k)\right] = f(z)$$

$$Z\left[g(k)\right] = g(z)$$

são suas correspondentes transformadas z, então:

$$Z\left[\sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i)\right] = Z\left[\sum_{i=0}^{\infty} g(i)f(k-i)\right] = f(z)g(z)$$

Útil para obter respostas impulsionais em sistemas amostrados.

$$Z\left[\sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i)z^{-k}$$

Fazendo n=k-i:

$$Z\left[\sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i)\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=-i}^{\infty} f(i)g(n)z^{-(n+i)}$$

Como $g(t_n)$ é zero para n<0, o limite inferior de n pode ser mudado para zero:

$$Z\left[\sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(k-i)\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(i)g(n)z^{-(n+i)} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^{-n}\right) = f(z)g(z)$$

✓ Transformação inversa:

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[f(z)] = \frac{1}{2\pi j}\int_C f(z) z^k \frac{dz}{z}$$

A fórmula é dificilmente usada, dando lugar a outras técnicas e tabelas. Devemos, entretanto, lembrar que:

✓ A transformada z inversa produz apenas a sequência discreta f(k), sendo incapaz de fornecer informação sobre a função contínua original, f(t), a partir da qual a sequência foi obtida;

✓ A inversa não fornece informação sobre o intervalo de amostragem, Δt, para a sequência discreta f(k).

✓ Deslocamento à esquerda:

Se $\mathcal{Z}\left[f(k)\right] = f(z)$ então:

$$\mathcal{Z}\left[f(k+1)\right] = zf(z) - zf(0)$$

Se $f(0) = 0$ então:

$$\mathcal{Z}\left[f(k+1)\right] = zf(z)$$

E ainda:

$$\mathcal{Z}\left[f(k+2)\right] = z^2 f(z) - z^2 f(0) - zf(1)$$

Generalizando:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[f(k+m)\right] &= z^m f(z) - z^m f(0) - z^{m-1} f(1) - \cdots - zf(m-1) \\ &= z^m \left(f(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{-k} \right)\end{aligned}$$

✓ Deslocamento à direita:

$$\mathcal{Z}\left[f(k-m)\right] = z^{-m} f(z)$$

✓ Translação complexa:

Lembrando que:

$$\mathbf{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = f(s+a)$$

A forma equivalente em transformada z é:

$$\mathcal{Z}\left[\left(e^{-at} f(t)\right)^{*}\right] = f(e^{a\Delta t} z) = f(rz), \quad \text{com} \quad r = e^{a\Delta t}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[f(rz)\right] = r^{-k} f(k)$$

✓ Teorema do valor inicial:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,f(s)$$

$$\lim_{t \to 0} f^*(t) = \lim_{k \to 0} f(k) = \lim_{z \to \infty} f(z)$$

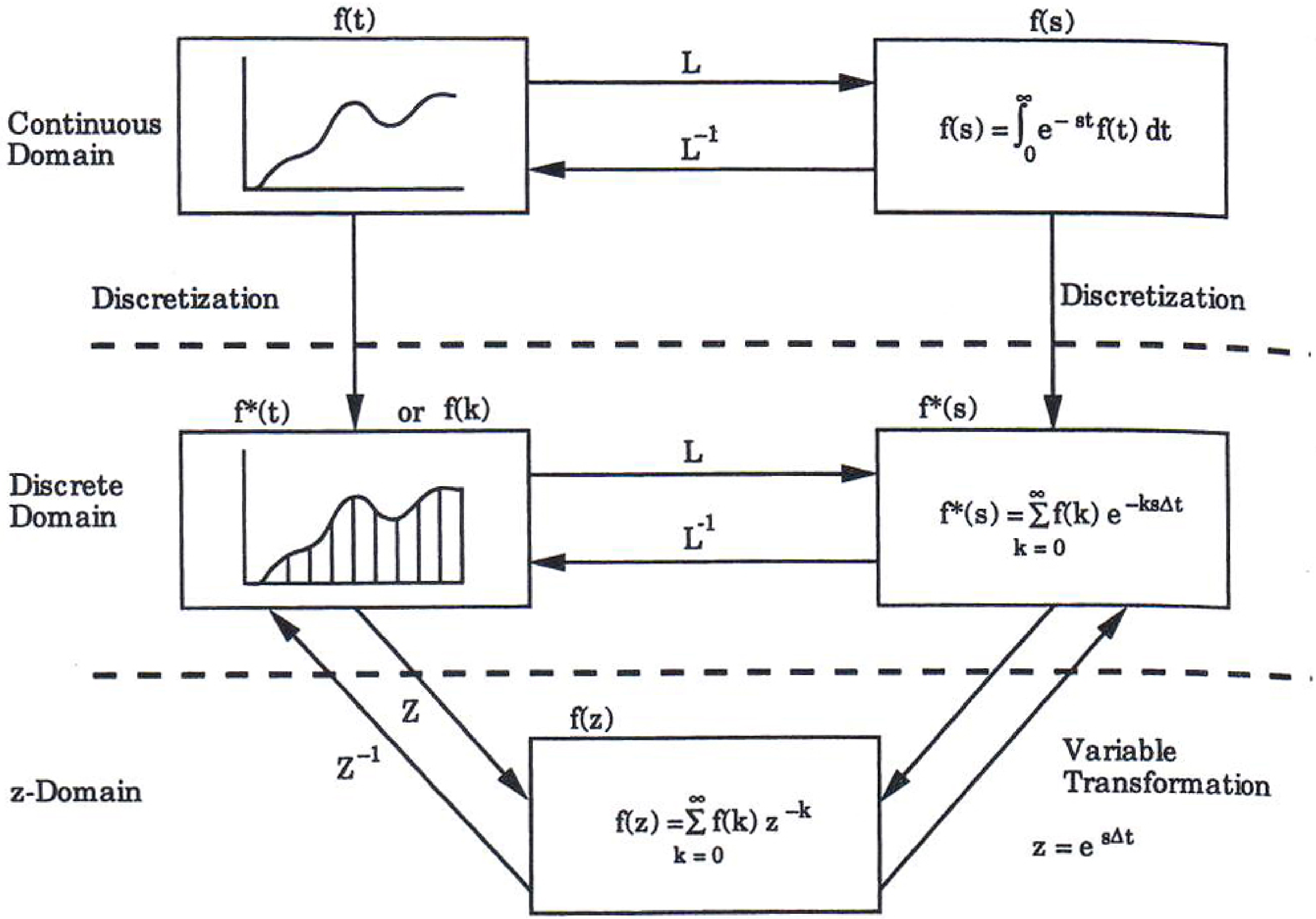
✓ Teorema do valor final: $|z| < 1$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,f(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} f^*(t) = \lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) f(z)$$

Contanto que o valor final da sequência discreta seja finito!

• Representação gráfica da relação entre as transformadas z e de Laplace



• Resolução de Equações Lineares de Diferenças

Como a transformada de Laplace, que é usada na resolução de equações diferenciais ordinárias lineares, a transformada z encontra aplicação na solução de equações lineares de diferenças da forma:

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\cdots+a_ny(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\cdots+a_mu(k-m)$$

Aplicando a transformada z em ambos os lados da equação, obtemos:

$$\left(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}\right)y(z)=\left(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}\right)u(z)$$

De modo que:

$$y(z)=\frac{\left(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}\right)}{\left(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}\right)}u(z)$$

- Alguns exemplos

1) Degrau

$$f(t) = a \quad \Rightarrow \quad f(k) = a$$

$$f(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a z^{-k} = a\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots\right)$$

$$= a\frac{1}{1 - z^{-1}} = a\frac{z}{z-1}, \quad \text{para } \left|z^{-1}\right| < 1$$

2) Rampa

$$f(t) = at \quad \Rightarrow \quad f(k) = ak\Delta t$$

$$f(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = a\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = a\Delta t\, z^{-1}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \ldots\right)$$

$$= a\Delta t \frac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = a\Delta t \frac{z}{(z-1)^2}$$

3) Exponencial

$$f(t) = ae^{-bt} \Longrightarrow f(k) = ae^{-b\Delta tk}$$

$$f(z) = Z\left[f(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left(ae^{-bk\Delta t}\right)z^{-k}$$

$$= a\left[1 + \left(e^{-b\Delta t}z^{-1}\right) + \left(e^{-b\Delta t}z^{-1}\right)^2 + \left(e^{-b\Delta t}z^{-1}\right)^3 \dots\right]$$

$$= a\frac{1}{1 - e^{-b\Delta t}z^{-1}}$$

- **Inversão de transformadas z**

A transformada z inversa é definida por:

$$f(k) = f^{*}(t) = f(z) = \mathcal{Z}^{-1}\left[f(z)\right]$$

A transformada z inversa consiste de valores amostrados f*(t) representados por f(k). A inversão de transformadas z conta com três métodos:

a) Expansão em frações parciais
b) Divisão longa
c) Integração de linha

a) Expansão em frações parciais

Consideremos que f(z) tem a seguinte forma:

$$f(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

onde: $N(z)$ é um polinômio de ordem n em z^{-1};
$D(z)$ é um polinômio de ordem m em z^{-1}.

Admitindo que $D(z)$ possa ser fatorado em m raízes reais distintas (i.e., os pólos de $f(z)$), denotados por p_1, p_2, ... p_m. Então:

$$f(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{\left(1-p_1 z^{-1}\right)\left(1-p_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1-p_m z^{-1}\right)}$$

Expandindo em frações parciais, na forma:

$$f(z^{-1}) = \frac{r_1}{\left(1-p_1 z^{-1}\right)} + \frac{r_2}{\left(1-p_2 z^{-1}\right)} + \cdots + \frac{r_m}{\left(1-p_m z^{-1}\right)}$$

Cada coeficiente do numerador r_i pode ser obtido de maneira similar àquela usada no cálculo de transformadas inversas de Laplace. A transformada inversa é dada, portanto, por:

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{r_1}{\left(1-p_1 z^{-1}\right)}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{r_2}{\left(1-p_2 z^{-1}\right)}\right\} + \cdots + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{r_m}{\left(1-p_m z^{-1}\right)}\right\}$$

Como:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{r_i}{\left(1-p_i z^{-1}\right)}\right\} = r_i p_i^k$$

Então:

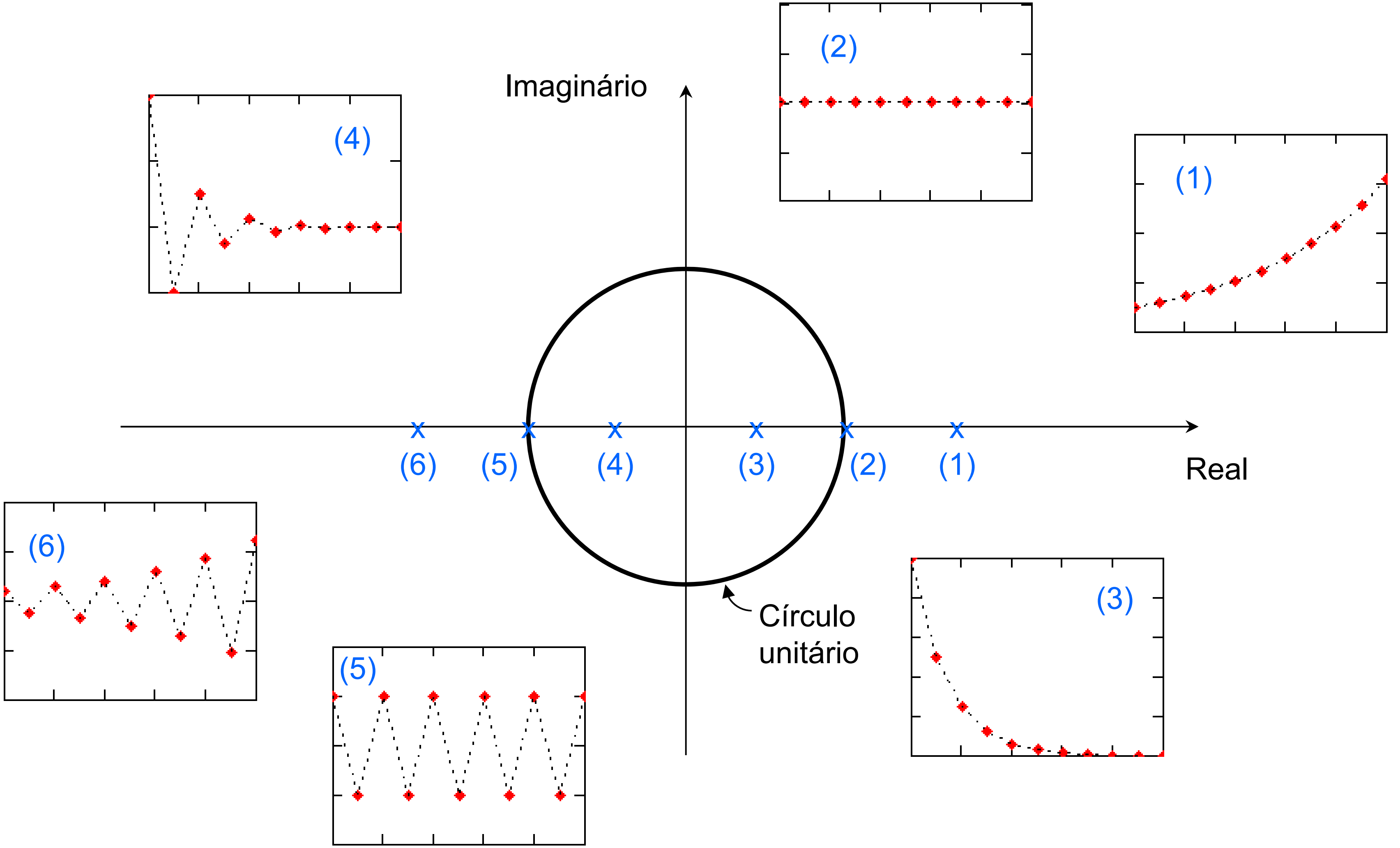
$$f(k) = r_1 (p_1)^k + r_2 (p_2)^k + \cdots + r_m (p_m)^k$$

Consideremos, agora, um caso simples:

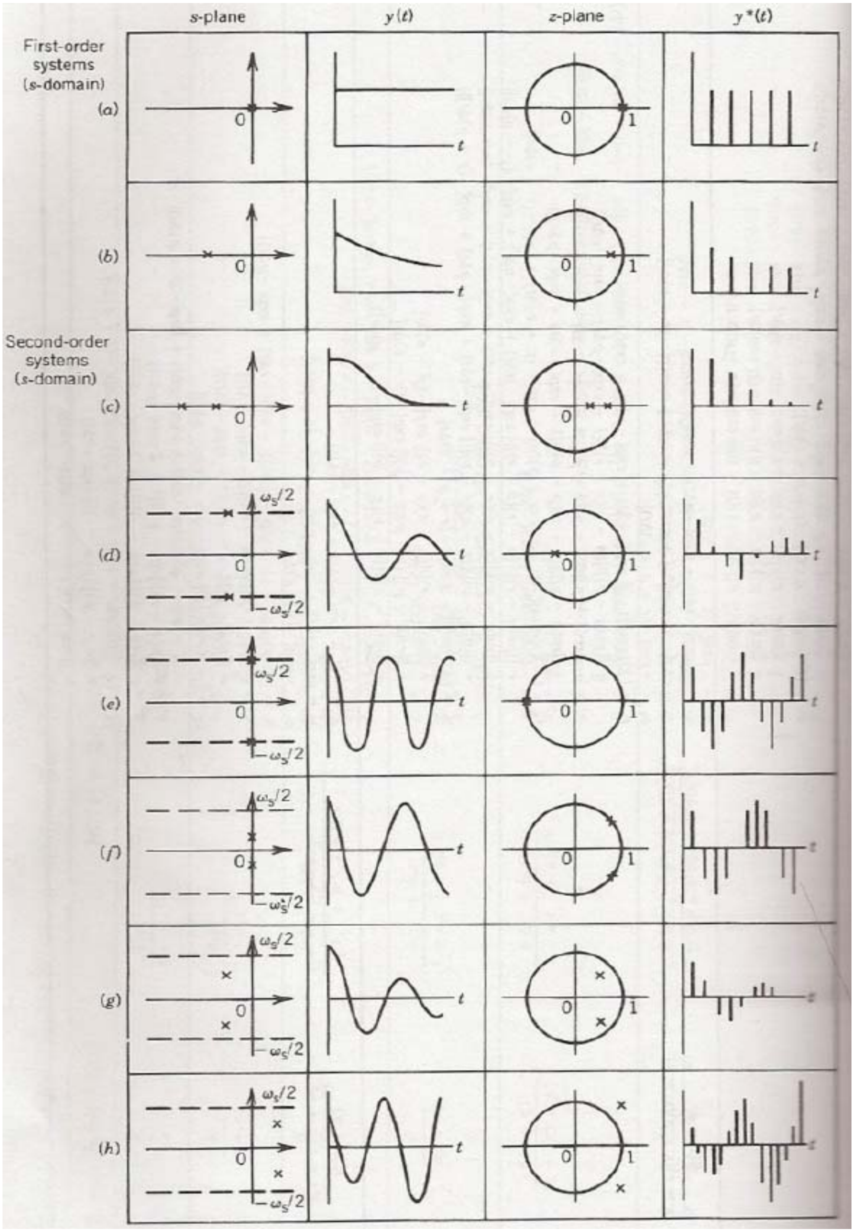
$$f(k) = r_1 (p_1)^k$$

com r_1=1 e p_1 assumindo diferentes valores.

Respostas temporais para localizações diferentes do pólo de f(z):



Respostas temporais para localizações diferentes do pólo de f(z):



Seborg et al. (1989)

• **Exemplo**: Usando expansão em frações parciais, encontre a inversa da função abaixo para um intervalo de amostragem, Δt=1:

$$f(z^{-1}) = \frac{0.5z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)}$$

Expandindo em frações parciais:

$$f(z^{-1}) = \frac{0.5z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.5z^{-1}\right)} = \frac{r_1}{1-z^{-1}} + \frac{r_2}{1-0.5z^{-1}}$$

Multiplicando por $1-z^{-1}$

e fazendo z=1: $r_1 = \frac{0.5}{0.5} = 1$

Multiplicando por $1-0.5z^{-1}$

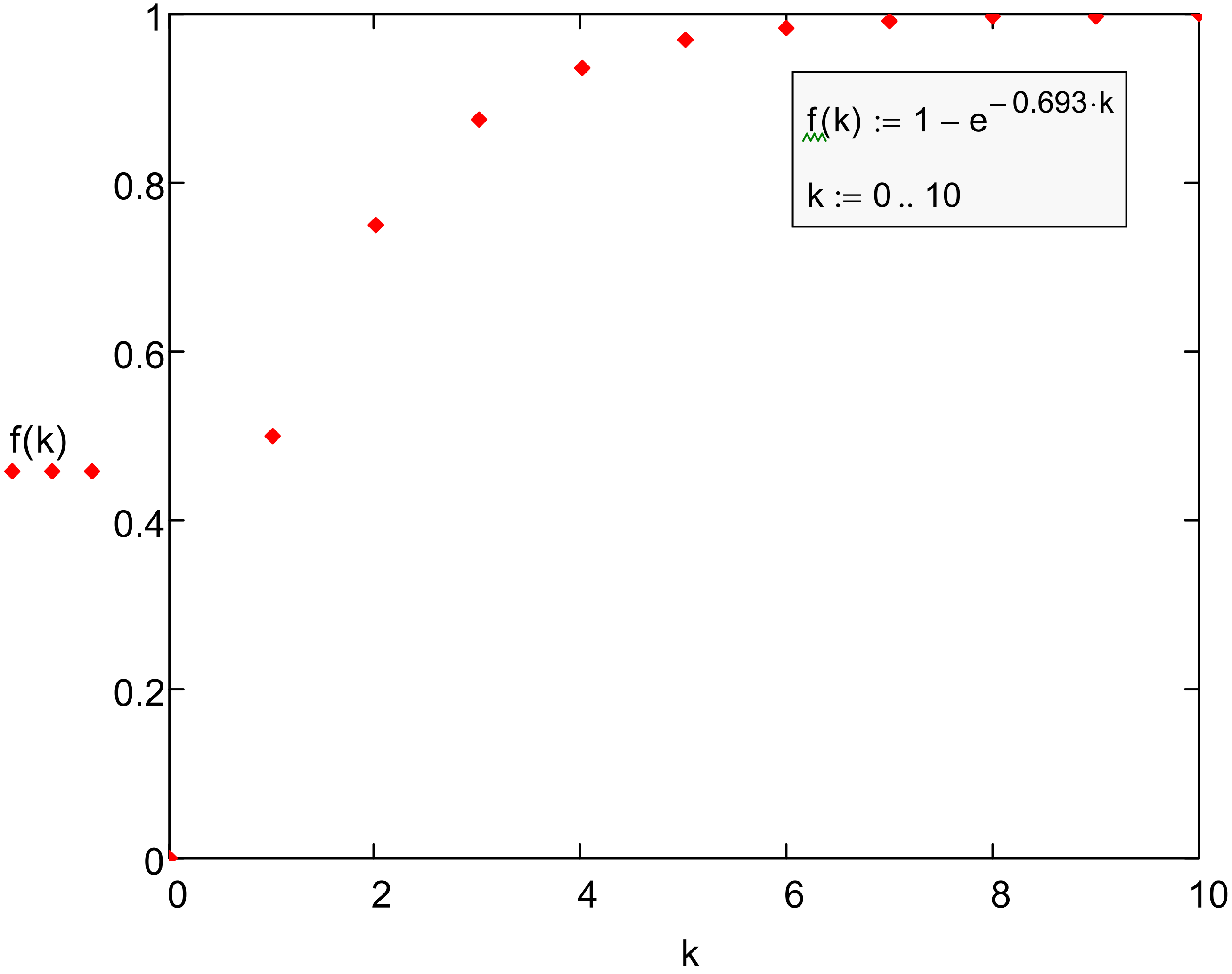
e fazendo z=0.5: $r_2 = \frac{0.5 \cdot 2}{1-2} = -1$

$$f(z^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$e^{-a\Delta t} = e^{-a} = 0.5 \Rightarrow a = 0.693$$

$$f(z^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-0.693\Delta t}z^{-1}}$$

$$f(k) = 1 - e^{-0.693k\Delta t}$$



f(k) := 1 − e^(−0.693·k)
k := 0 .. 10
f(k)
k
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
2
4
6
8
10

b) Divisão longa

Da definição da transformada z, podemos escrever f(z) como:

$$f(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k)z^{-k} = f(t_0) + f(t_1)z^{-1} + f(t_2)z^{-2} + f(t_3)z^{-3} + \cdots$$

definindo uma série infinita em z^{-1}. Assim, para qualquer transformada z, f(z), expandida como uma série infinita em z^{-1}, digamos:

$$f(z^{-1}) = \gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} + \gamma_3 z^{-3} + \cdots$$

sua inversa, a sequência discreta f(k), pode ser facilmente recuperada através da comparação dos coeficientes das potências em z^{-1} na equações acima de modo que:

$$f(t_k) = \gamma_k, \quad k = 1, \cdots, n$$

Assim, para obter f(k), devemos mostrar como uma função arbitrária f(z) pode ser representada como potências de z^{-1}.

Mais uma vez, consideremos f(z) na seguinte forma:

$$f(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

ou

$$f(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m}}$$

Poderíamos realizar a divisão acima, e obter uma série infinita (longa) em z^{-1}, mas esse procedimento seria muito tedioso. Uma alternativa, menos tediosa, mas totalmente equivalente, consiste de definir:

$$\Gamma(z^{-1}) = \gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} + \gamma_3 z^{-3} + \cdots$$

De modo que:

$$\Gamma(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} \Rightarrow \Gamma(z^{-1}) D(z^{-1}) = N(z^{-1})$$

Na forma expandida:

$$\left(\gamma_0+\gamma_1 z^{-1}+\gamma_2 z^{-2}+\gamma_3 z^{-3}+\cdots\right)\left(a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots+a_m z^{-m}\right)=$$

$$\left(b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\cdots+b_n z^{-n}\right)$$

Realizando a multiplicação do lado esquerdo da igualdade acima, e comparando os coeficientes das mesmas potências em z^{-1}, observamos que:

$$a_0\gamma_0=b_0 \Rightarrow \gamma_0=\frac{b_0}{a_0}$$

E que (potência z^{-1}): $$a_1\gamma_0+a_0\gamma_1=b_1 \Rightarrow \gamma_1=\frac{b_1}{a_0}-\frac{a_1}{a_0}\gamma_0$$

(potência z^{-2}): $$a_2\gamma_0+a_1\gamma_1+a_0\gamma_2=b_2 \Rightarrow \gamma_2=\frac{b_2}{a_0}-\frac{a_1}{a_0}\gamma_1-\frac{a_2}{a_0}\gamma_0$$

Generalizando: $$\gamma_k=\frac{1}{a_0}\left[b_k+\sum_{i=1}^{k}a_i\gamma_{k-i}\right],\ \ k=1,2,\ldots\ \ \text{com}\ \ \gamma_0=\frac{b_0}{a_0}$$

Resumo do procedimento:

1) Represente f(z) como uma razão de polinômios em z^{-1}, obtenha os coeficientes a_0, a_1, …, a_n, e b_0, b_1, …, b_n.
2) Com a condição inicial $\gamma_0 = b_0/a_0$, use a expressão geral obtida acima para calcular os demais $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$
3) Observe que $f(k) = \gamma_k$.

• **Exemplo**: Usando a técnica de expansão em uma série infinita (acima), encontre a transformada inversa de:

$$f(z^{-1}) = \frac{r}{1 - pz^{-1}}$$

Observe que:

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= r \\ b_k &= 0, \quad k = 1,2,\ldots \\ a_0 &= 1 \\ a_1 &= -p \\ a_k &= 0, \quad k = 2,3,\ldots \end{aligned}\right\}$$

$$\gamma_0 = \frac{b_0}{a_0} = r$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{a_0}\left(b_1 - a_1\gamma_0\right) = rp$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{a_0}\left(b_2 - a_1\gamma_1 - a_2\gamma_0\right) = rp^2$$

$$\vdots$$

$$\gamma_k = -a_1\gamma_{k-1} = rp^k$$

Logo: $$f(z) = r\left(1 + pz^{-1} + p^2 z^{-2} + p^3 z^{-3} + \cdots\right)$$

De modo que reconhecemos que:

$$f(k) = rp^k$$

Observe que, fazendo: $p = e^{-a\Delta t}$ $f(k)$ representa a função exponencial discreta

- **Função de transferência no domínio temporal discreto**

Lembremos que desenvolvemos uma expressão para a função de transferência impulsional para o caso contínuo:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u^*(\tau)d\tau$$

Sendo g(t) a resposta impulsional do processo. u*(t) é uma perturbação discreta ao processo, representada na forma de uma série de impulsos:

$$u^*(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} u(t_k)\delta(\tau - t_k)$$

De modo que:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\left(\sum_{k=0}^{\infty} u(t_k)\delta(\tau - t_k)\right)d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^t g(t-\tau)\delta(\tau - t_k)d\tau\right)u(t_k)$$

Continuando:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\left(\sum_{k=0}^{\infty} u(t_k)\delta(\tau - t_k)\right)d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^t g(t-\tau)\delta(\tau - t_k)d\tau\right)u(t_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(t-t_k)u(t_k)$$

Em particular, para $t=t_n$:

$$y(t_n) = \sum_{k=0}^{\infty} g(t_n - t_k)u(t_k)$$

Observe, agora, que uma função contínua y(t) amostrada em intervalos discretos apresenta a seguinte transformada z, por definição:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(t_n)z^{-n}$$

Logo:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} g(t_n - t_k)u(t_k)\right)z^{-n}$$

Fazendo i=n-k:

$$y(z) = \sum_{i=-k}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} g(t_{i-k} - t_k)u(t_k)\right)z^{-(i+k)} \qquad , \quad t_{i\text{-}k} - t_k = t_i$$

$$= \sum_{i=-k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(t_i)z^{-i}u(t_k)z^{-k}$$

Agora note que $g(t_i)$ é zero para i<0; desse modo, o limite inferior de i pode ser mudado para zero e o somatório separado:

$$y(z) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} g(t_i)z^{-i}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} u(t_k)z^{-k}\right) \quad \therefore \quad y(z) = g(z)u(z)$$

onde g(z) é definida por:

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g(t_i)z^{-i}, \quad \text{com} \quad t_i = i\Delta t$$

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g(t_i) z^{-i}, \quad \text{com} \quad t_i = i\Delta t$$

g(z) é chamada de <u>função de transferência de pulsos</u> (ou pulso) do sistema, e relaciona entrada e saída no domínio discreto da mesma maneira que a função de transferência no domínio s relaciona sinais contínuos. Observe que g(z) pode ser calculada diretamente a partir de g(t), a resposta impulsional do sistema.

- **Relação da função de transferência de pulsos com equações de diferença**

Mostramos anteriormente que uma equação de diferenças na forma:

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) =$$
$$b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + a_m u(k-m)$$

Resulta em:

$$y(z) = \frac{\left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}\right)}{\left(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}\right)} u(z)$$

De modo que:

$$g(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{\left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}\right)}{\left(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}\right)}$$

- **Realização física**

Já vimos a noção da possibilidade de realização de funções de transferência no domínio temporal contínuo. Uma condição análoga pode ser estabelecida para a função de transferência de pulsos, isto é, que um modelo em tempo discreto ***não pode ter um sinal de saída que dependa de entradas futuras***. Senão o modelo não é fisicamente realizável.

Desse modelo, o modelo é realizável desde que $a_0 \neq 0$. Para comprovar isso, vamos admitir que $a_0=0$, de modo que a equação de diferenças fique:

$$a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) =$$
$$b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + a_m u(k-m)$$

Nessa situação, um sinal de entrada futuro, u(k), influenciaria a saída atual, y(k-1), o que não é fisicamente possível!

- Conversão de transformadas de Laplace e z

Da definição: $z = e^{s\Delta t} \Rightarrow z^{-1} = e^{-s\Delta t}$

Usando uma aproximação de Padé:

$$e^{-s\Delta t} \cong \frac{2 - s\Delta t}{2 + s\Delta t}$$

$$z^{-1} \cong \frac{2 - s\Delta t}{2 + s\Delta t}$$

$$s = \frac{2}{\Delta t}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Outra aproximação:

$$e^{-s\Delta t} = 1 - s\Delta t + \frac{(s\Delta t)^2}{2!} + \ldots$$

$$z^{-1} = e^{-s\Delta t} \cong 1 - s\Delta t$$

ou

$$s \cong \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t}$$

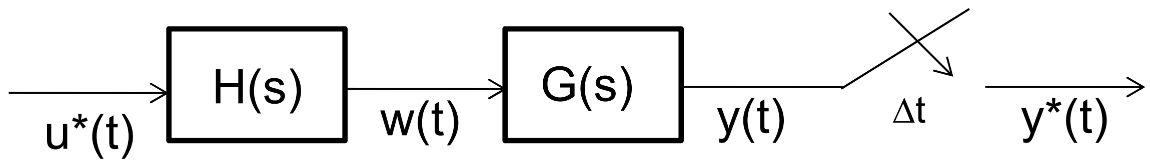
- Retentor de Ordem Zero (ZOH)

A função do retentor é converter um sinal digital em um sinal contínuo. O sinal contínuo de um retentor de ordem zero é uma série de pulsos, ou seja, mantém constante o sinal durante cada intervalo de amostragem.

A função de transferência de um ZOH é:

$$H(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta t}}{s}$$

que é a transformada de Laplace da função h(t) = S(t) – S(t – Δt), sendo S(t) a função degrau unitário.



A transformada z do produto H(s)G(s), representada por HG(z), é:

$$HG(z) = (1 - z^{-1})\ \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

Note que $HG(z) \neq H(z)G(z)$

Exemplo: Obter a equação de diferenças de um sistema de primeira ordem com ganho unitário e com um retentor ZOH.

$$H(s) = \frac{1-e^{-s\Delta t}}{s} \qquad\qquad G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$HG(z) = (1-z^{-1})\ \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(\tau s+1)}\right]$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(\tau s+1)}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1/\tau)}\right] = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-\Delta t/\tau}z^{-1}}$$

$$HG(z) = (1-z^{-1})\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-\Delta t/\tau}z^{-1}}\right] = \frac{z^{-1}(1-e^{-\Delta t/\tau})}{1-e^{-\Delta t/\tau}z^{-1}}$$

Como: $\dfrac{y(z)}{u(z)} = HG(z)$, então: $y_n = a_1\, y_{n-1} + (1 - a_1)\, u_{n-1}$

onde: $a_1 = e^{-\Delta t/\tau}$

Exemplo: resolva a seguinte equações de diferenças de primeira ordem:

$$y_n + 3\, y_{n-1} = u_n$$

$$y_{-1} = 0$$

Aplicando a transformada Z:

$$y(z) + 3\, z^{-1}\, y(z) = u(z)$$

$$y(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1}} u(z)$$

Por exemplo, aplicando a inversa da transformada Z para u(z) = 1 (impulso unitário):

$$y_n = (-3)^n$$