Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE – Programa de Engenharia Química

COQ 790 – ANÁLISE DE SISTEMAS DA ENGENHARIA QUÍMICA

AULA 11:

Decomposição em valores e vetores singulares

2014/1

Decomposição em Valores e Vetores Singulares (SVD)

Qualquer matriz **A** $\in \Re^{m \times n}$ pode ser decomposta na forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{V}^H$$

U $\in \Re^{m \times m}$: matriz unitária formada pelos vetores característicos de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^H$

V $\in \Re^{n \times n}$: matriz unitária formada pelos vetores característicos de $\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A}$

$\Sigma \in \Re^{m \times n}$: matriz diagonal da raiz quadrada dos valores característicos de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^H$

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\right)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0 \qquad r = \min\left(n, m\right)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$ para m < n

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^*$$ para n = m

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$ para m > n

Propriedades da matriz **A:**

rank(**A**) = r

null(**A**) = span($\mathbf{v}_{r+1}$, $\mathbf{v}_{r+2}$, ..., $\mathbf{v}_n$)

range(**A**) = span($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_r$)

range($\mathbf{A}^\mathrm{H}$) = span($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_r$)

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \, \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^H$$

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2} = \sqrt{tr\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^H\right)}$$ (norma de Frobenius)

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n, \mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}\| = \sigma_1$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i = \sigma_i\, \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{u}_i = \sigma_i\, \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{V} \cdot \Sigma^{\dagger} \cdot \mathbf{U}^{H} = (\mathbf{A}^{H} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^{H} \qquad \text{(pseudo-inversa de } \mathbf{A}\text{)}$$

$$\mathbf{A}^{\dagger} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\dagger} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}^{\dagger} \cdot \mathbf{A})^{H} = \mathbf{A}^{\dagger} \cdot \mathbf{A} \quad \text{e} \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\dagger})^{H} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\dagger}$$

Problema de valor singular para o sistema linear $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{y}\|^2 = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{y}^H \cdot \mathbf{y}$$

Usando o conceito dos multiplicadores de Lagrange:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{R}} \left\{ S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \lambda\, (\mathbf{x}^H \cdot \mathbf{x} - 1) \right\}$$

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n,\lambda\in\mathbb{R}} \left\{ S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \lambda\,(\mathbf{x}^H \cdot \mathbf{x} - 1) \right\}$$

Condição de otimalidade de primeira ordem:

$$\nabla_{\mathbf{x}} S(\mathbf{x},\lambda) = 2\,(\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \lambda\,\mathbf{x}) = 0$$

$$\nabla_{\lambda} S(\mathbf{x},\lambda) = 1 - \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{x} = 0$$

Que é equivalente a solução do problema de valor característico:

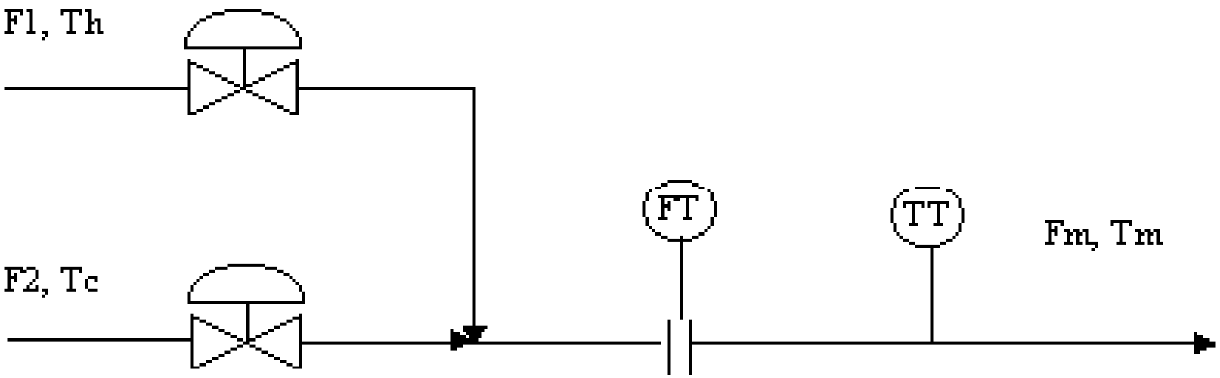
$$\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

$\therefore$ ótimos locais: vetores característicos de $\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A}$, ou vetores singulares de **A** ou ainda componentes principais de **A** (direções de máxima variação de **y** em função das variações de **x** com a mesma energia:

$$\|\mathbf{x}\| = 1$$

e os respectivos multiplicadores de Lagrange são os valores característicos de $\mathbf{A}^H \cdot \mathbf{A}$ ou o quadrado dos valores singulares de **A**.

Exemplo



Fm = F1 + F2

F1 Th + F2 Tc = Fm Tm

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Tm}{\partial F1} & \dfrac{\partial Tm}{\partial F2} \\ \dfrac{\partial Fm}{\partial F1} & \dfrac{\partial Fm}{\partial F2} \end{bmatrix}$$

Para determinar se o sistema linear, **y** = **A·x**, está bem escalonado deve-se verificar o condicionamento da matriz **A**:

$$\gamma(\mathbf{A}) = \frac{\overline{\sigma}(\mathbf{A})}{\underline{\sigma}(\mathbf{A})} = \frac{\sigma_1(\mathbf{A})}{\sigma_r(\mathbf{A})}$$

Condicionamento mínimo da matriz **A**:

$$\gamma^*(\mathbf{A}) = \min_{\mathbf{L},\mathbf{R}} \gamma(\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R})$$

Variáveis escalonadas: $\mathbf{y}_e = \mathbf{L} \cdot \mathbf{y}$ e $\mathbf{x}_e = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{x}$

No MATLAB, o condicionamento de uma matriz **A** pode ser obtido através da função *cond*(**A**), e as matrizes de escalonamento podem ser calculadas pela função:

[*ub*, **D**] = *mu* (**H**, *ones* (2**n*, 2), 'C')

onde *n* é a ordem da matriz **A**, **L** = *diag*(**D**(*n*+1:2**n*)), **R** = *inv*(*diag*(**D**(1:*n*))),

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^*(\mathbf{A}) = \left(\frac{ub(1)}{ub(2)} \right)^2 = cond(\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R})$$

Exemplo