Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE – Programa de Engenharia Química

COQ 790 – ANÁLISE DE SISTEMAS DA ENGENHARIA QUÍMICA

AULA 5:

Representações Entrada-Saída e o Domínio Transformado; Transformada de Laplace; Perturbações Típicas

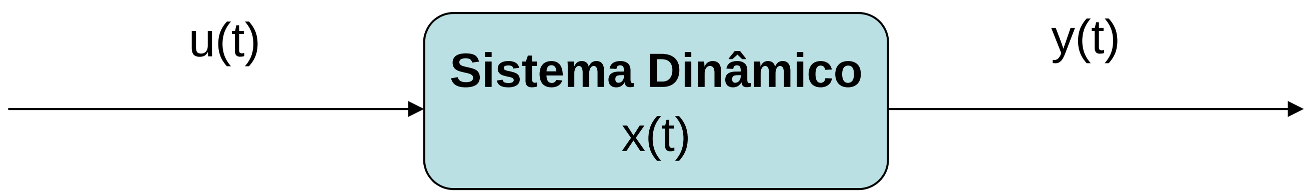
2014/1

Representações Entrada-Saída e o Domínio Transformado

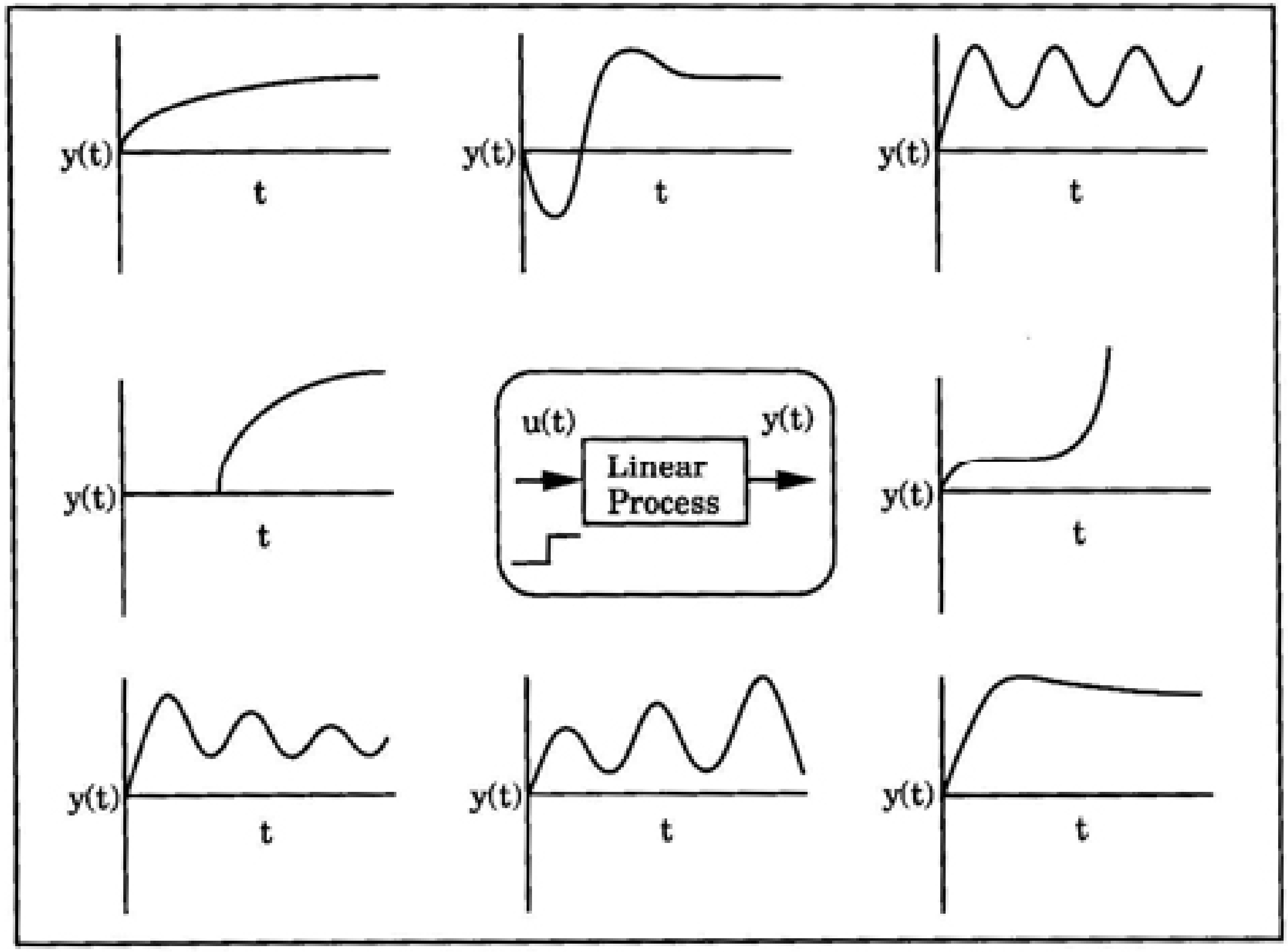
Vimos, até aqui, que:

- Podemos fazer uso de modelos matemáticos para representar processos físico-químico-biológicos reais;
- Modelos dinâmicos dão origem a equações ou sistemas de equações diferenciais ordinárias ou algébrico-diferenciais;
- Há variáveis nos modelos que podem ser usadas para estimular o sistema dinâmico respectivo;
- Os modelos matemáticos não lineares podem ser **linearizados** em torno de pontos de referência especiais, geralmente os estados estacionários.

Uma representação entrada/saída pode ser ilustrada como:



Como u(t) pode perturbar a saída y(t)?



Com que *intensidade* (**quanto**) e de que *forma* (**como**) um sistema responde a uma mudança na variável de entrada depende da *natureza dessa perturbação* e também da *natureza intrínseca do processo*!

A *essência da análise dinâmica* pode ser assim colocada:

Dada uma forma de representação matemática do processo, investiguem-se as respostas do mesmo a vários tipos de perturbações. Isto é, dado um **modelo de processo**, encontre y(t) como função de perturbações u(t).

Como representar a saída, y(t), como função da u(t)?
Analisar no domínio do tempo é a melhor maneira? Há alternativas?

Sistemas **lineares** com **tempo contínuo** podem ser representados nas seguintes formas:

Representação em espaço de estados
(domínio temporal)

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = cx(t)$$

Laplace

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Resposta no *domínio de Laplace*

Fourrier

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

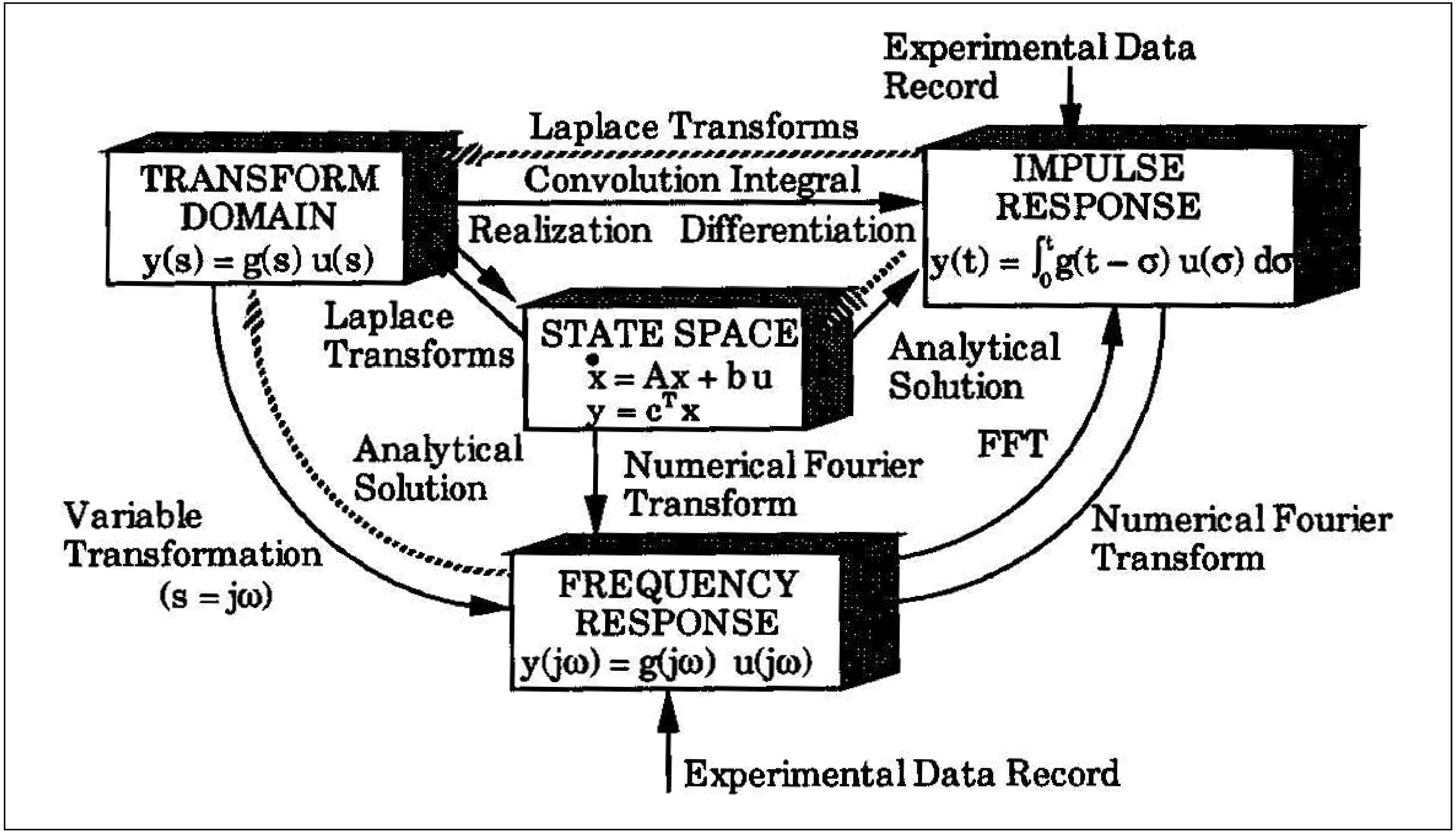
Resposta no *domínio de frequência*

Impulso

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Resposta a partir da *integral de convolução*

Interrelações entre as formas de representar o modelo dinâmico do processo:



Resposta Impulsional – Integral de Convolução

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = cx(t)$$

Solução analítica:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) \qquad x(t) = x_0\, e^{a\,t} \qquad e^{-at}\frac{dx(t)}{dt} = e^{-at}ax(t) + e^{-at}bu(t)$$

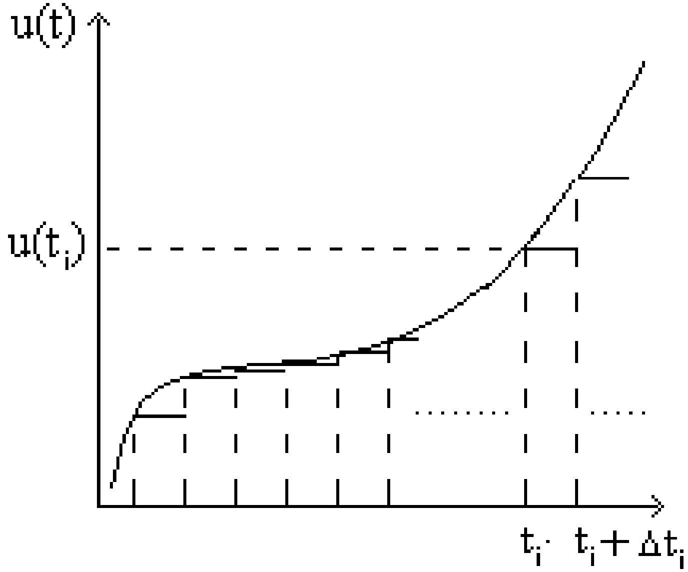
$$\frac{d\left[e^{-at}\,x(t)\right]}{dt} = e^{-at}\,bu(t) \qquad e^{-at}\,x(t) = x_0 + \int_0^t e^{-a\tau}\,bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = x_0\,e^{a\,t} + \int_0^t e^{a(t-\tau)}\,bu(\tau)d\tau \qquad y(t) = c\,x_0\,e^{a\,t} + \int_0^t c\,e^{a(t-\tau)}\,bu(\tau)d\tau$$

Sistema com condição inicial $x_0 = 0$

$$y(t) = \int_0^t c\,e^{a(t-\tau)}\,bu(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Resposta Impulsional – Integral de Convolução



Aproximando u(t) por uma série de funções **pulso unitário** δ_Δ(t):

$$u(t) \cong \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(t_i)\ \delta_\Delta(t-t_i)\Delta t$$

$$\delta_\Delta(t-t_i) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < t_i \\ \dfrac{1}{\Delta t} & \text{para} \quad t_i \le t < t_i + \Delta t \\ 0 & \text{para} \quad t \ge t_i + \Delta t \end{cases}$$

$$y(t) = H\left[u(t)\right] \qquad y(t) \cong H\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_\Delta(t-t_i)\ u(t_i)\ \Delta t\right]$$

Resposta Impulsional – Integral de Convolução

$$y(t) \cong H\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta}(t-t_i)\, u(t_i)\, \Delta t\right]$$

Sendo H[·] um operador **linear**,
vale o **princípio da superposição**:

$$y(t) \cong \sum_{i=-\infty}^{\infty} H\left[\delta_{\Delta}(t-t_i)\right]\, u(t_i)\, \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \delta_{\Delta}(t-t_i) = \delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 \text{ para } t \neq \tau \\ \infty \text{ para } t = \tau \end{cases}$$

Função **Delta de Dirac**

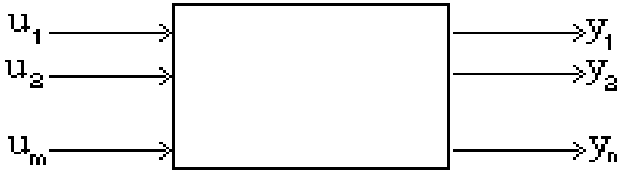
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H\left[\delta(t-\tau)\right] u(\tau)\, d\tau$$

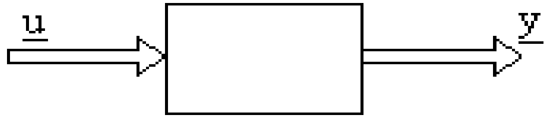
Para sinais nulos para t < 0 e sabendo que sistemas reais não respondem antes do sinal entrar (sistema causal ou realizável):

$$\boxed{y(t) = \int_{0}^{t} H\left[\delta(t-\tau)\right] u(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau}$$

Resposta Impulsional – Integral de Convolução

Para sistemas **multivariáveis**:





$$\underline{y}\,(t) = \int_0^t \underline{\underline{G}}\left(t-\tau\right)\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \underline{\underline{G}}(t\text{-}\tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t-\tau) & \ldots & g_{1m}(t-\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(t-\tau) & \ldots & g_{nm}(t-\tau) \end{bmatrix}$$

Via solução analítica:

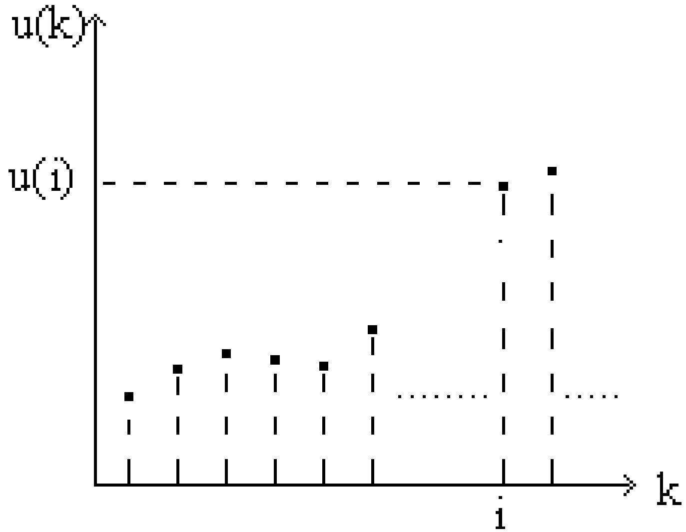
$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}(t)$$

$$\underline{y}\,(t) = \int_0^t \underline{\underline{C}}\,e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\underline{\underline{B}}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau = \int_0^t \underline{\underline{G}}\left(t-\tau\right)\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

Resposta Impulsional Discreta – Soma de Convolução

$$u(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(k)\, u(i)$$



Função **Delta de Kronecker:**

$$\delta_i(k) = \begin{cases} 1 \text{ para } k = i \\ 0 \text{ para } k \neq i \end{cases}$$

$$y(k) = H\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta_i(k)\, u(i)\right]$$

Operador **linear:** $y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} H\left[\delta_i(k)\right] u(i)$

Para sinais nulos para i < 0 e sabendo que sistemas reais não respondem antes do sinal entrar (sistema causal ou realizável):

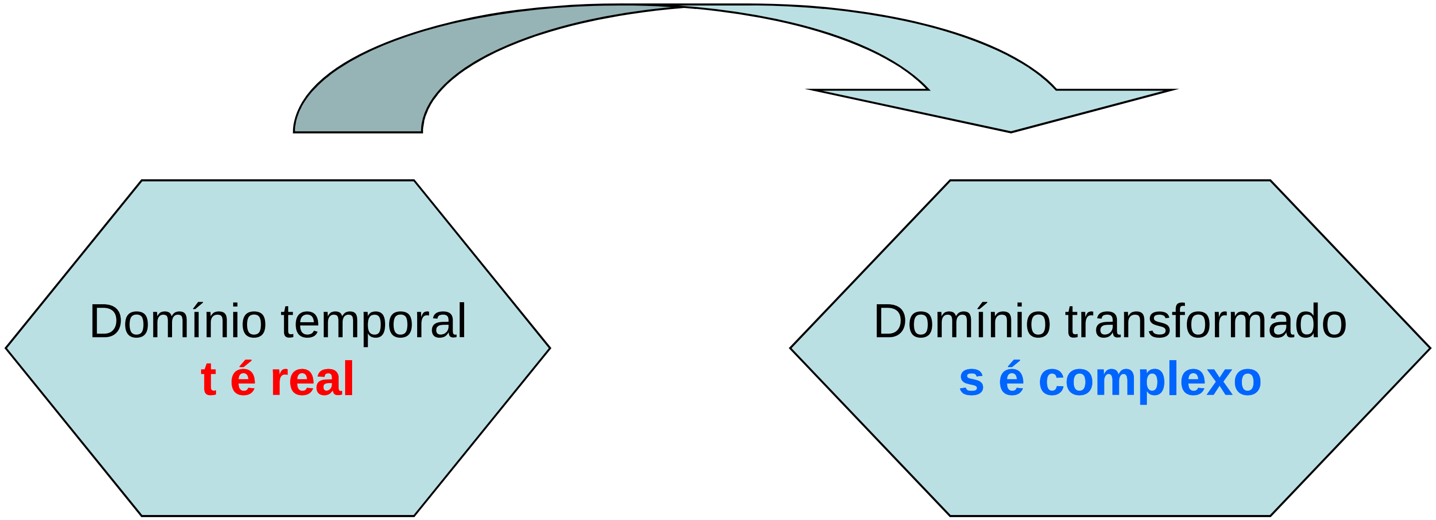
$$\boxed{y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(k-i)\, u(i) = \sum_{i=0}^{k} h(i)\, u(k-i)}$$

A Transformada de Laplace

A transformada de Laplace de uma função f(t) é definida por:

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

$$F(s) = \mathbf{L}\left[f(t)\right]$$



Algumas propriedades da transformada de Laplace:

- F(s) contém informação sobre o comportamento apenas para t>0;
- A transformada de Laplace é uma operação linear;
- A transformada inversa: $f(t) = \mathbf{L}^{-1}\left[F(s)\right]$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{C} e^{st}F(s)ds$$

Na prática não calculamos a integral acima; usamos diretamente as fórmulas de inversão disponíveis, ou ainda aplicamos a Teoria do Resíduos.

- Algumas transformadas:

1	$\dfrac{1}{s}$	degrau unitário
δ	1	impulso unitário (Dirac)
$\delta^{(k)}$	s^k	
t	$\dfrac{1}{s^2}$	
$\dfrac{t^k}{k!},\ k \geq 0$	$\dfrac{1}{s^{k+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2} = \dfrac{1/2}{s-j\omega} + \dfrac{1/2}{s+j\omega}$	
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} = \dfrac{1/2j}{s-j\omega} - \dfrac{1/2j}{s+j\omega}$	
$\cos(\omega t + \phi)$	$\dfrac{s\cos\phi - \omega \sin\phi}{s^2+\omega^2}$	
$e^{-at}\cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	
$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	

Algumas resultados úteis:

- A transformada de derivadas de primeira ordem:

$$\mathbf{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(t)\Big|_{t=0} = sF(s) - f(0)$$

- A transformada de derivadas de ordem superior:

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(t)\Big|_{t=0} - \frac{df(t)}{dt}\Big|_{t=0} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^3f(t)}{dt^3}\right] = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0)$$

- Em particular, quando a condição inicial e todas suas derivadas forem iguais a zero, obtemos:

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = s^nF(s)$$

- A transformada de integrais:

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

- As propriedades de deslocamento (*shift*) da transformada de Laplace:

a) Deslocamento em s

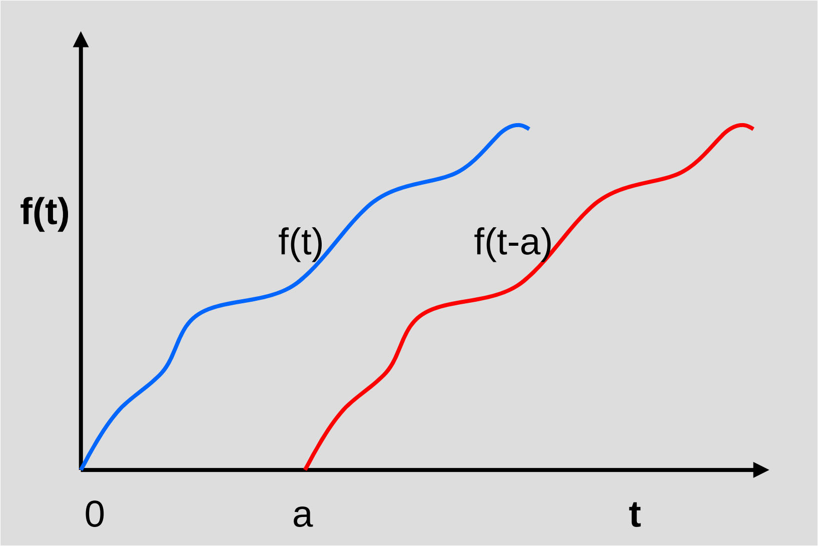
Se $\mathbf{L}[f(t)] = F(s)$, então: $\mathbf{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a)$

Assim: $\mathbf{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$

a) Deslocamento em t

Se $\mathbf{L}[f(t)] = F(s)$,

então: $\mathbf{L}[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$



- Aplicação na solução de equações diferenciais:

Consideremos o problema de encontrar a solução da equação diferencial:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$$

com y(0)=0 e u(t)=1.

Após a aplicação da transformada de Laplace em ambos os lados, obtemos:

$$Y(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} = \frac{K}{s} - \frac{K}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$$

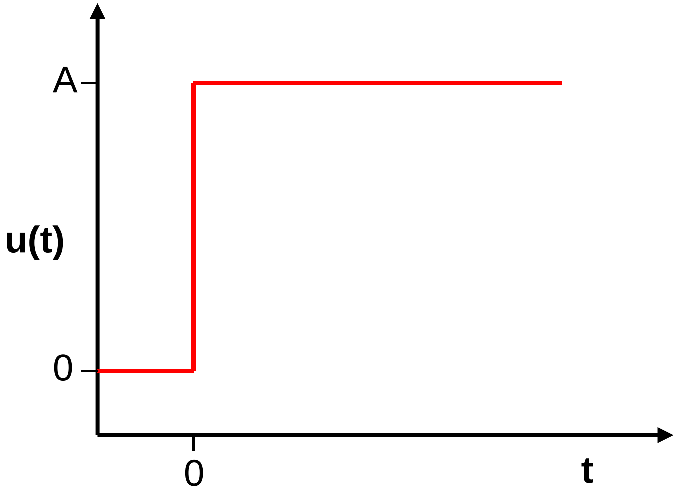
Após a aplicação da transformada inversa de Laplace em ambos os lados, obtemos:

$$y(t) = K - Ke^{-t/\tau} = K(1 - e^{-t/\tau})$$

Perturbações Típicas

Funções Perturbadoras Típicas e suas Transformadas de Laplace

- A função degrau ideal:



$$u(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ A; & t \geq 0 \end{cases}$$

Em termos de H(t): $H(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & t \geq 0 \end{cases}$

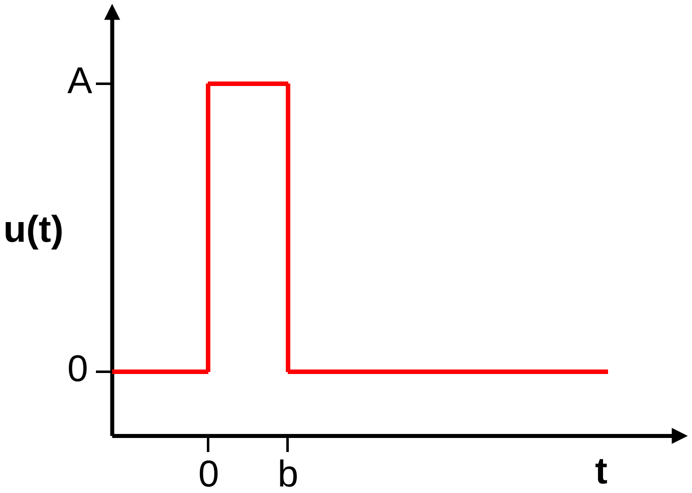
$$u(t) = AH(t)$$

H(t) é chamada de função de **Heaviside**

A transformada de Laplace da função degrau é dada por:

$$U(s) = \mathbf{L}\left[u(t)\right] = \frac{A}{s}$$

- A função pulso retangular ideal:



$$u(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ A; & 0 \leq t \leq b \\ 0; & t > b \end{cases}$$

Em termos de H(t):

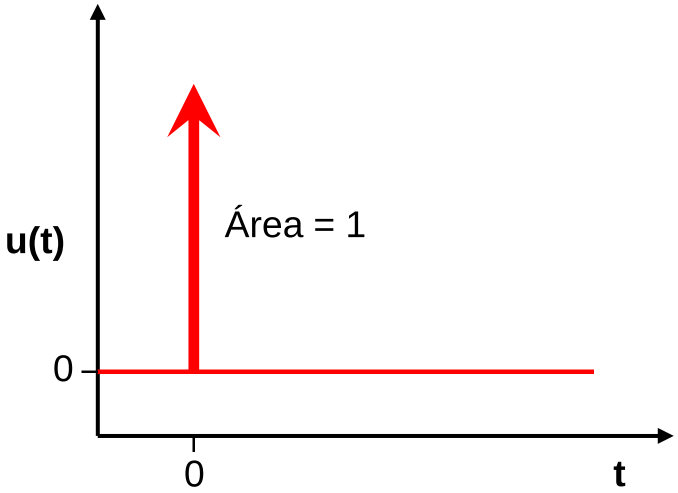
$$u(t) = A\left[H(t) - H(t-b)\right]$$

Com: $H(t-b) = \begin{cases} 0; & t < b \\ 1; & t \geq b \end{cases}$

A transformada de Laplace da função pulso ideal é dada por:

$$U(s) = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-bs}\right)$$

• A função impulso:



$$u(t) = A\delta(t)$$

$\delta(t)$ é chamada de "função" **Delta de Dirac**:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty; & t = 0 \\ 0; & \text{para outro t qualquer} \end{cases}$$

Com: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)dt = 1$$

A transformada de Laplace da função pulso ideal é dada por:

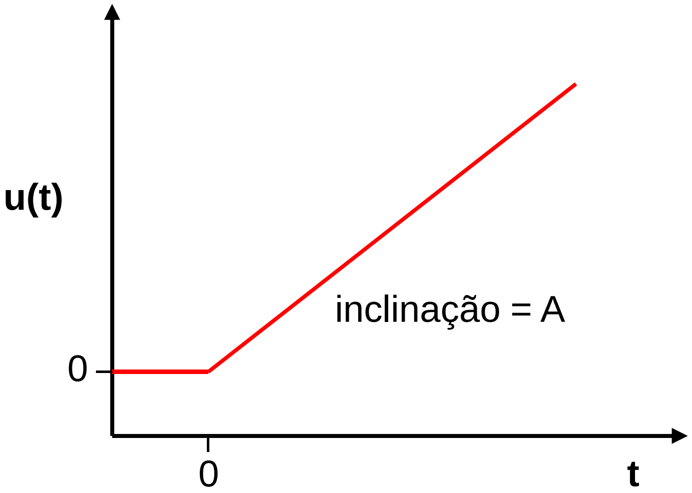
$$U(s) = \mathbf{L}\left[A\delta(t)\right] = A$$

Propriedades da função impulso:

1) $$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$$

2) $$\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t)$$

- A função rampa ideal:



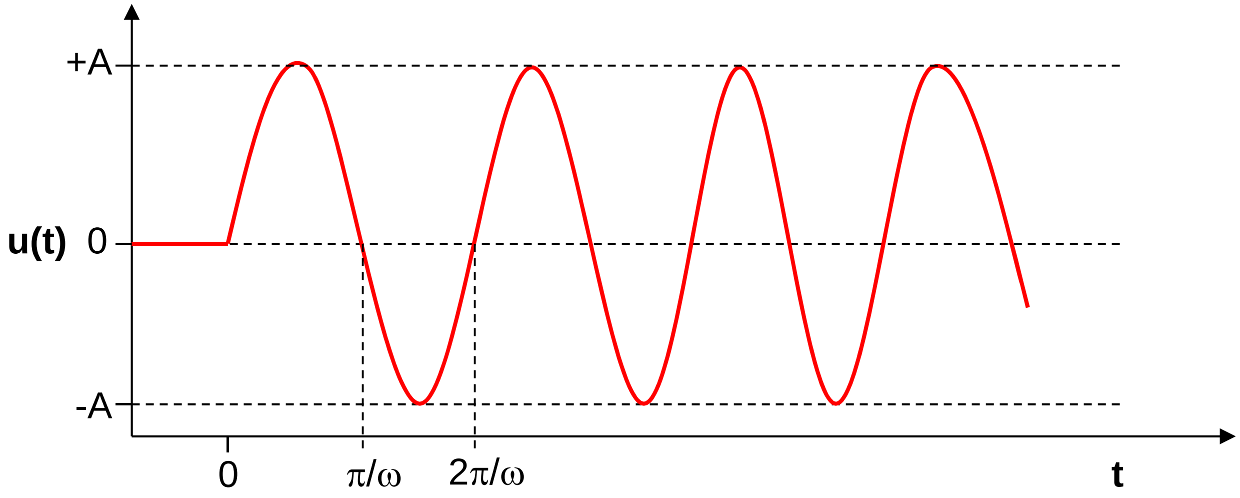
$$u(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ At; & 0 < t \end{cases}$$

Observe que essa função pode ser obtida a partir da integração da função degrau de magnitude A.

A transformada de Laplace da função rampa ideal é dada por:

$$U(s) = \mathbf{L}\left[u(t)\right] = \frac{A}{s^2}$$

- A função senoidal ideal:



$$u(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ A\sin(\omega t); & 0 < t \end{cases}$$

A transformada de Laplace da função senoidal ideal é dada por:

$$U(s) = \mathbf{L}\left[u(t)\right] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Realização das funções ideais

Consideremos, como exemplo, um tanque de aquecimento, onde podemos manipular a **vazão de vapor** (Q) através de uma válvula:

- **Degrau**: abrir a válvula de vapor uma certa percentagem em t=0 de modo que Q mude A unidades.

- **Pulso**: abrir a válvula de vapor t=0, manter no novo valor por b unidades de tempo, retornar para o valor inicial;

- **Impulso**: (Impossível de se realizar) abrir totalmente a válvula de vapor em t=0 e retornar imediatamente à posição inicial.

- **Rampa**: abrir gradualmente a válvula de vapor de modo que Q aumente linearmente até que a se atinja a vazão desejada, permanecendo aberta na nova posição.

- **Senóide**: a única forma prática seria conectar um gerador de ondas senoidais à válvula da corrente de vapor, mas dinâmicas de alta frequência podem ser difíceis de atingir devido à dinâmica da válvula.