Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE – Programa de Engenharia Química

COQ 790 – ANÁLISE DE SISTEMAS DA ENGENHARIA QUÍMICA

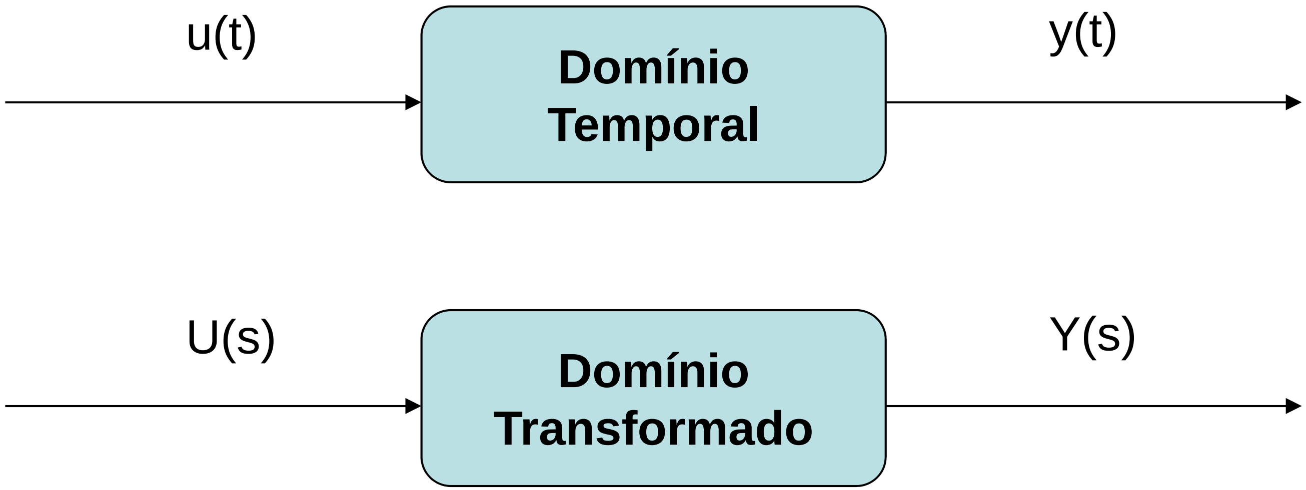
AULA 6:

Funções de transferência; expansão em frações parciais.

2014/1

Funções de Transferência & Transformada Inversa

A representação temporal do sistema entrada/saída:



A função de transferência representa, no domínio transformado, a relação entre entrada e saída, dada em termos da razão entre as transformadas dos termos de entrada e de saída:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

A dinâmica de um sistema univariável (SISO – *Single Input Single Output*), linear e invariante no tempo é, genericamente, modelada por:

$$\underbrace{a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y}_{\text{saída}} = \underbrace{b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u}_{\text{entrada}}$$

Em termos de *variáveis-desvio*, com o sistema inicialmente no estado estacionário (condições iniciais nulas), transformando por Laplace, obtemos:

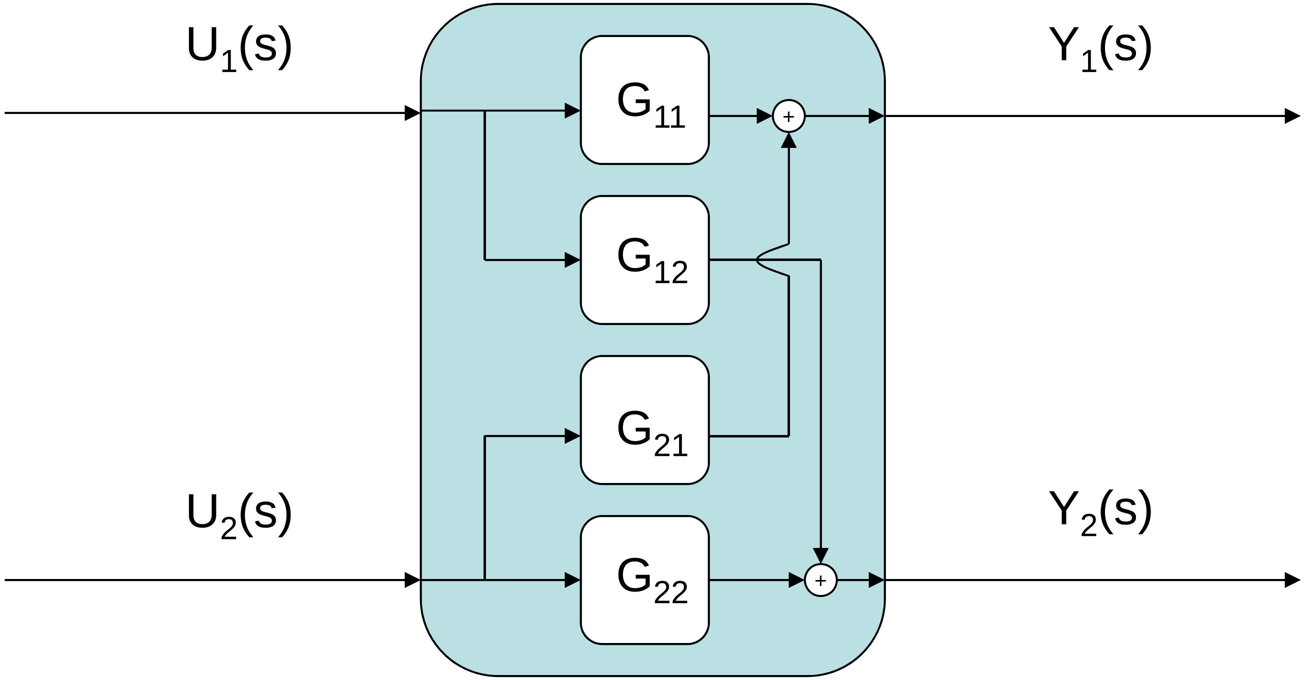
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m\ s^m + b_{m-1}\ s^{m-1} + \ldots + b_1\ s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}\ s^{n-1} + \ldots + a_1\ s + a_0}$$

Para que corresponda à função de transferência de um sistema real é necessário que

$$n \geq m$$

Para um sistema multivariável (MIMO – *Multiple Input Multiple Output*) haverá tantas funções de transferência como indicado pelo produto do número de variáveis de entrada pelo número de variáveis de saída.

Seja o caso 2x2, abaixo:



Matematicamente:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \mathbf{G}(s)U(s)$$

G(s) é chamada de matriz de funções de transferência ou, simplesmente, matriz de transferência.

Consideremos o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}\, y_1 + a_{12} y_2 + b_{11} u_1 + b_{12} u_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}\, y_1 + a_{21} y_2 + b_{21} u_1 + b_{22} u_2 \end{cases}$$

Inversão de transformadas de Laplace

O método mais popular para se determinar a função inversa é o da **expansão em frações parciais**. Em geral, para os casos de interesse, as funções cujas transformadas inversas se desejam calcular se apresentam na forma de um quociente de polinômios, como já vimos:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_m\, s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + ... + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + ... + a_1\, s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Se as raízes distintas de D(s)=0 forem p_1, p_2, ..., p_n, o polinômio denominador pode ser escrito na forma fatorada:

$$D(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + ... + a_1\, s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)$$

Logo:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

Esta equação pode ser escrita na forma de uma expansão em frações parciais que, no caso de raízes distintas é:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \ \ldots + \frac{A_n}{s-p_n}$$

Os coeficientes A_i devem ser determinados de tal forma que os dois lados da equação sejam iguais. Usando a propriedade de linearidade da transformada de Laplace, a determinação da transformada inversa se reduz à soma das transformadas inversas de funções simples:

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1}\left[G(s)U(s)\right] = A_1\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-p_1}\right) + A_2\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-p_2}\right) + \ldots + A_n\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-p_n}\right)$$

onde:

$$\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-p_i}\right) = e^{p_i t},\ i=1,2,\ldots,n \quad \Rightarrow \quad y(t)=\sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t}$$

Como determinar os A_i? E se os p_i não forem distintos?

- Caso 1: Raízes reais e distintas

$$A_i = \lim_{s \to p_i} \frac{(s-p_i)N(s)}{D(s)} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

- Caso 2: Raízes complexas $p = \alpha + \beta i$ e $\bar{p} = \alpha - \beta i$ $\quad (s-p)(s-\bar{p}) = (s-\alpha)^2 + \beta^2$

frações correspondentes: $\dfrac{A_1}{s-p} + \dfrac{A_2}{s-\bar{p}} = \dfrac{as+b}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = a\left[\dfrac{(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] + \dfrac{(a\alpha+b)}{\beta}\left[\dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right]$

$$a = \frac{1}{\beta}\,\mathrm{imag}\left\{\lim_{s \to \alpha+\beta i} \frac{\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right]N(s)}{D(s)}\right\} \qquad \frac{(a\alpha+b)}{\beta} = \frac{1}{\beta}\,\mathrm{real}\left\{\lim_{s \to \alpha+\beta i} \frac{\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right]N(s)}{D(s)}\right\}$$

Transformada inversa:

$$e^{\alpha t}\left[a\cos(\beta t) + \frac{(a\alpha+b)}{\beta}\,\mathrm{sen}(\beta t)\right]$$

• Caso 3: Raízes múltiplas (raiz p com multiplicidade m)

frações correspondentes:

$$\frac{A_1}{(s-p)} + \frac{A_2}{(s-p)^2} + \ ... + \frac{A_m}{(s-p)^m}$$

$$A_m = \lim_{s \to p} \left[\frac{(s-p)^m N(s)}{D(s)} \right]$$

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \lim_{s \to p} \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} \left[\frac{(s-p)^m N(s)}{D(s)} \right] \quad k = m-1, m-2, \ldots, 3, 2, 1$$

Transformada inversa:

$$e^{pt} \left[A_1 + A_2 t + A_3 \frac{t^2}{2} + \ldots + A_{m-1} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right]$$

• Caso 1: Raízes reais e distintas

Exemplo: $Y(s) = \dfrac{s^2 - s - 6}{s^3 - 2s^2 - s + 2}$ com p_1=1, p_2=-1 e p_3=2

$$A_1 = \lim_{s \to 1} \frac{(s-1)N(s)}{D(s)} = \frac{N(1)}{D'(1)} = \frac{1-1-6}{3-4-1} = 3$$

$$A_2 = \lim_{s \to -1} \frac{(s+1)N(s)}{D(s)} = \frac{N(-1)}{D'(-1)} = \frac{1+1-6}{3+4-1} = -\frac{2}{3}$$

$$A_3 = \lim_{s \to 2} \frac{(s-2)N(s)}{D(s)} = \frac{N(2)}{D'(2)} = \frac{4-2-6}{12-8-1} = -\frac{4}{3}$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t} = 3e^t - \frac{2e^{-t}}{3} - \frac{4e^{2t}}{3}$$

conferindo:

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right] = Y(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{2/3}{s+1} - \frac{4/3}{s-2} = \frac{3(s^2-s-2) - 2(s^2-3s+2)/3 - 4(s^2-1)/3}{(s^2-1)(s-2)} = \frac{s^2-s-6}{(s^2-1)(s-2)}$$

• <u>Caso 2</u>: Raízes complexas

Exemplo: $$Y(s)=\frac{2}{s\left(s^2+2s+2\right)}$$ com p_1=0, p_2=-1+i e p_3=-1-i.

$$Y(s)=\frac{2}{s\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{A_1}{s}+\frac{as+b}{(s+1)^2+1}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}\frac{sN(s)}{D(s)}=\frac{N(0)}{D'(0)}=\frac{2}{2}=1$$

$$a=\mathrm{imag}\left\{\lim_{s\to -1+i}\frac{\left[(s+1)^2+1\right]N(s)}{D(s)}\right\}=\mathrm{imag}\left\{\frac{2}{-1+i}\right\}=\mathrm{imag}\{-1-i\}=-1$$

$$\frac{(a\alpha+b)}{\beta}=\mathrm{real}\{-1-i\}=-1$$

$$y(t)=1-e^{-t}\left[\cos(t)+\mathrm{sen}(t)\right]$$

• Caso 3: Raízes múltiplas

Exemplo: $$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$$ com p_1=0, p_2=p_3=p_4=-1.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3}$$

$$A_0 = \lim_{s\to 0} \frac{sN(s)}{D(s)} = \frac{N(0)}{D'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$A_3 = \lim_{s\to -1}\left[\frac{(s+1)^3 N(s)}{D(s)}\right] = -1$$

$$A_2 = \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\left[\frac{(s+1)^3 N(s)}{D(s)}\right] = \lim_{s\to -1}\left(-\frac{1}{s^2}\right) = -1$$

$$A_1 = \frac{1}{2!}\lim_{s\to -1} \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{(s+1)^3 N(s)}{D(s)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = -1$$

$$y(t) = 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)$$