Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE – Programa de Engenharia Química

COQ 790 – ANÁLISE DE SISTEMAS DA ENGENHARIA QUÍMICA

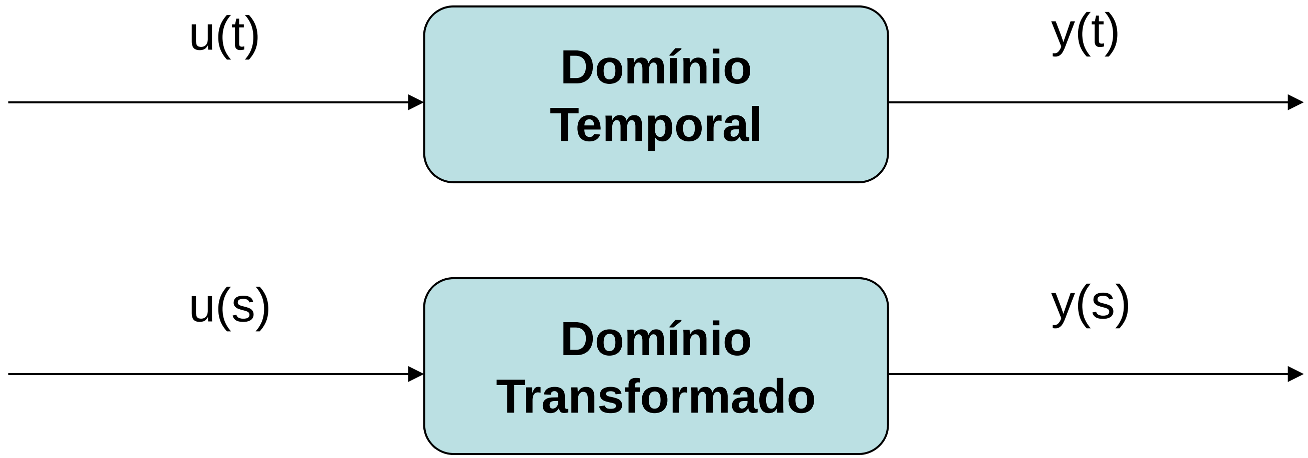
AULA 7:

Respostas a Perturbações Típicas; Sistemas de Primeira Ordem

2014/1

Respostas a Perturbações Típicas

A representação temporal do sistema entrada/saída:



A função de transferência representa, no domínio transformado, a relação entre entrada e saída, dada em termos da razão entre as transformadas dos termos de entrada e de saída:

$$y(s) = G(s)u(s)$$

Respostas a Perturbações Típicas dos Sistemas Contínuos

No processo de análise utilizamos sinais para perturbar o sistema a partir do estado estacionário e observamos as respostas correspondentes

$$y(s) = G(s)u(s) = \underbrace{\frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n}}_{\text{polos de } G(s)} + \cdots$$

No domínio temporal, temos:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{p_i t} + \text{termos associados às raízes introduzidas por } u(s)$$

Os polos do sistema são escritos, de maneira geral, como números complexos na forma:

$$p_j = Re_j + iIm_j$$

Assim, no domínio temporal, poderemos ter os seguintes tipos de respostas:

$$
\begin{aligned}
y(t) = \ldots &+ c_i e^{\mathrm{Re}_i\, t} + \\
&\ldots + \left(c_k + c_{k+1} t + \ldots + \frac{c_{k+n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} \right) e^{\mathrm{Re}_k\, t} + \\
&\ldots + \underbrace{c_j e^{\left(\mathrm{Re}_j + i\mathrm{Im}_j\right)t} + c_{j+1} e^{\left(\mathrm{Re}_j - i\mathrm{Im}_j\right)t}}_{2\rho_j e^{\mathrm{Re}_j t} \cos\left(\mathrm{Im}_j\, t + \theta_j\right)} + \ldots
\end{aligned}
$$

• Impulso Unitário:

É um sinal ideal, cuja aproximação (o pulso) não altera significativamente o processo. Requer quantidades de matéria ou energia reduzidas para gerá-lo aproximadamente. O sistema volta ao seu estado inicial. A resposta contém toda a informação dinâmica necessária.

$$u(t) = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad u(s) = \mathbf{L}\left[\delta(t)\right] = 1$$

$$y(s) = G(s)u(s) \Rightarrow y(t) = \mathbf{L}^{-1}\left[G(s)\right] = g(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, e^{p_j t}$$

$$c_j = \lim_{s \to p_j} \left\{ \left(s - p_j\right) \, G(s) \right\}$$

Fazenden: $$p_j = -\frac{1}{T_j} + i\omega_j$$

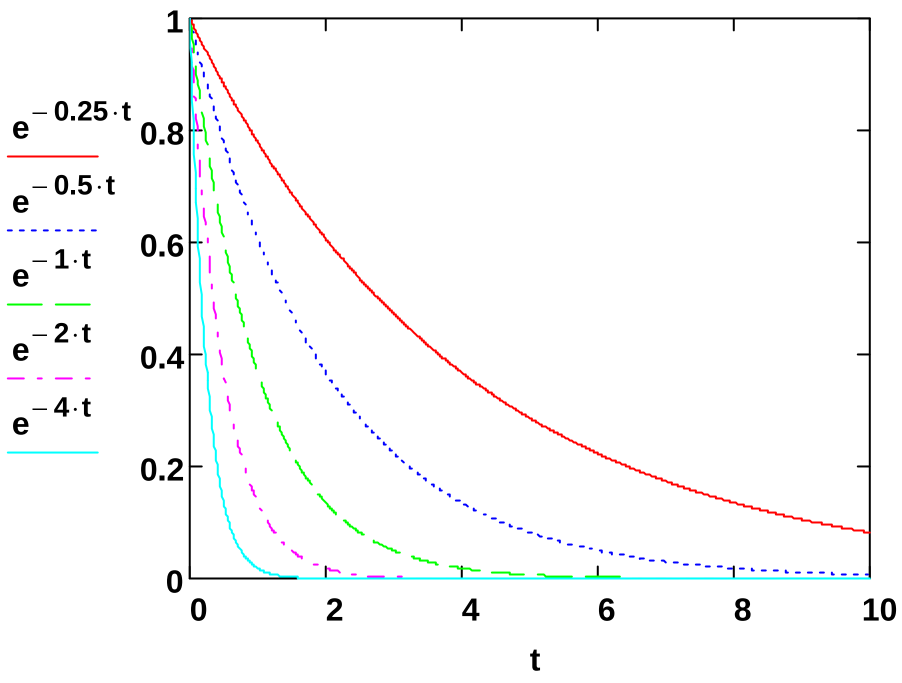
Obtemos: $$y(t) = g(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, e^{\left(-\frac{1}{T_j} + i\omega_j\right)t}$$

Um procedimento para ordenação dos polos do sistema segue o valor de suas partes reais, assim:

$$|Re(p_1)| \geq |Re(p_2)| \geq \ \ldots$$

Para o caso de todos os pólos serem reais e negativos, temos:

$$y(t) = c_1\,e^{-\frac{t}{T_1}} + c_2\,e^{-\frac{t}{T_2}} + \ldots + c_n\,e^{-\frac{t}{T_n}}$$



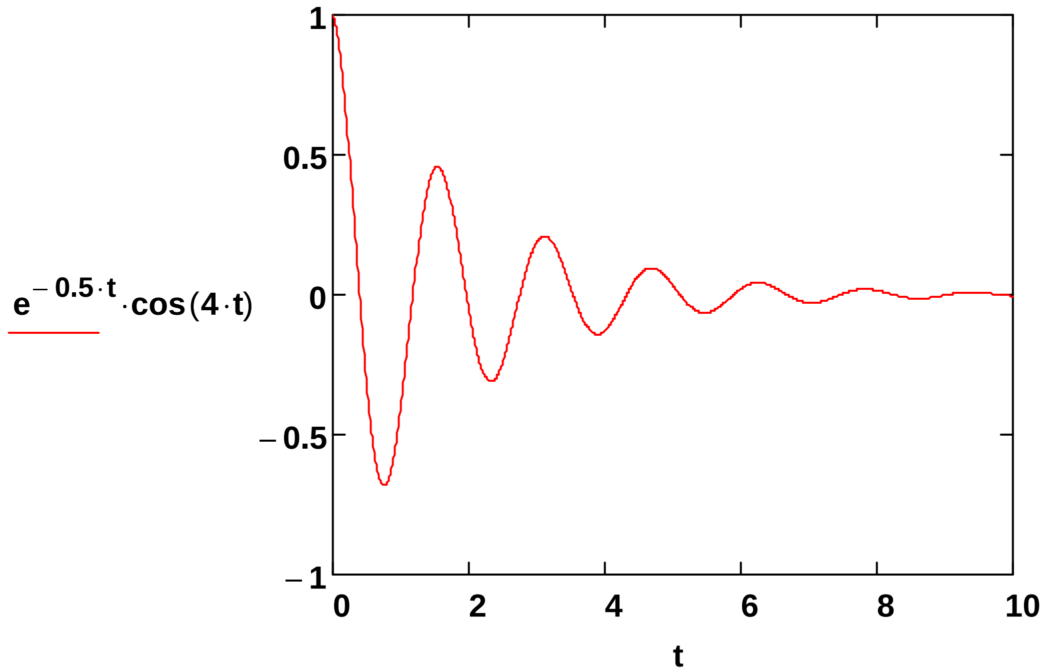
Um par de raízes complexas conjugadas implica em:

$$p_j = -\frac{1}{T_j} + i\omega_j \text{ e } p_{j+1} = -\frac{1}{T_j} - i\omega_j$$

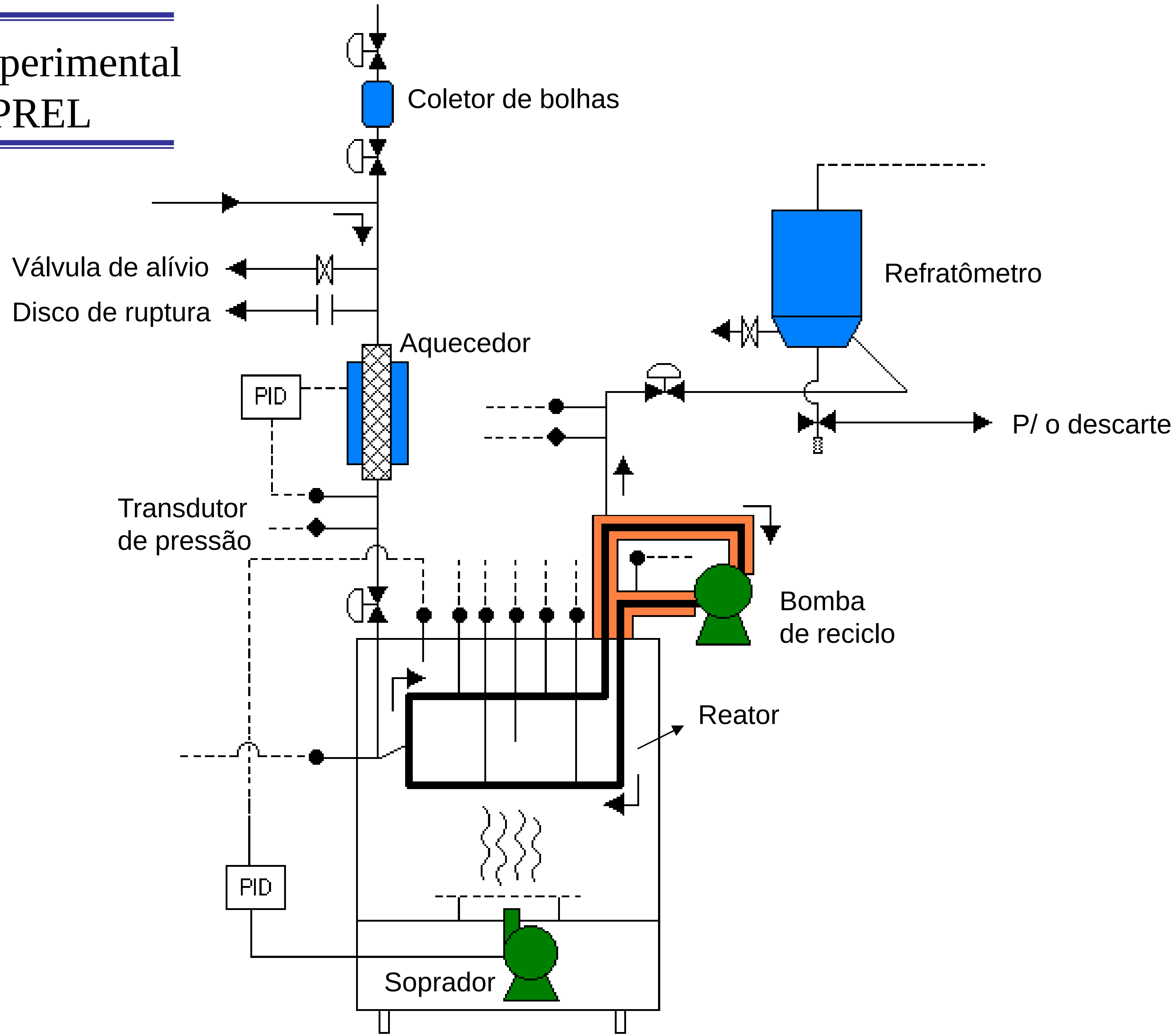
gerando, na resposta, um termo da forma:

$$2\rho_j \, e^{\frac{-t}{T_j}} \cos\left(\omega_j t + \theta_j\right)$$

com ρ_j e θ_j associados aos coeficientes c_j e c_{j+1}.

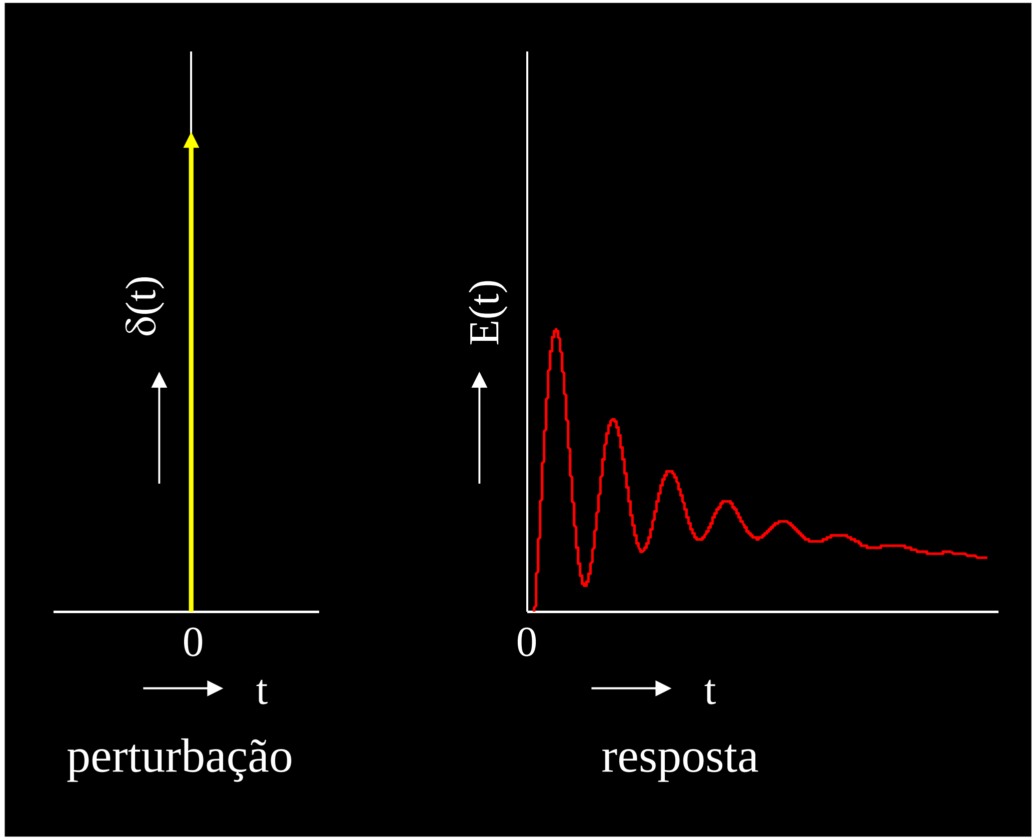


Reator Experimental UWPREL

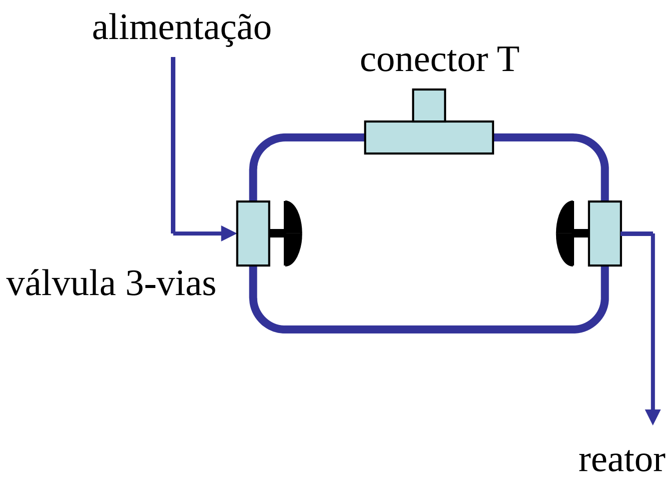


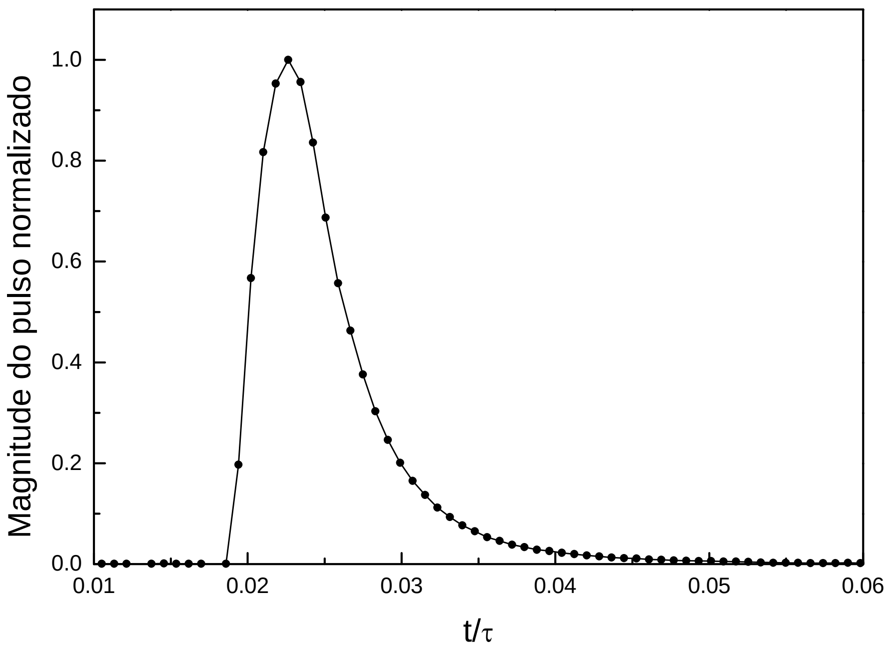
Realização de experimentos de DTR

Técnica: uso da injeção de pulso de traçador para obter a DTR do reator.

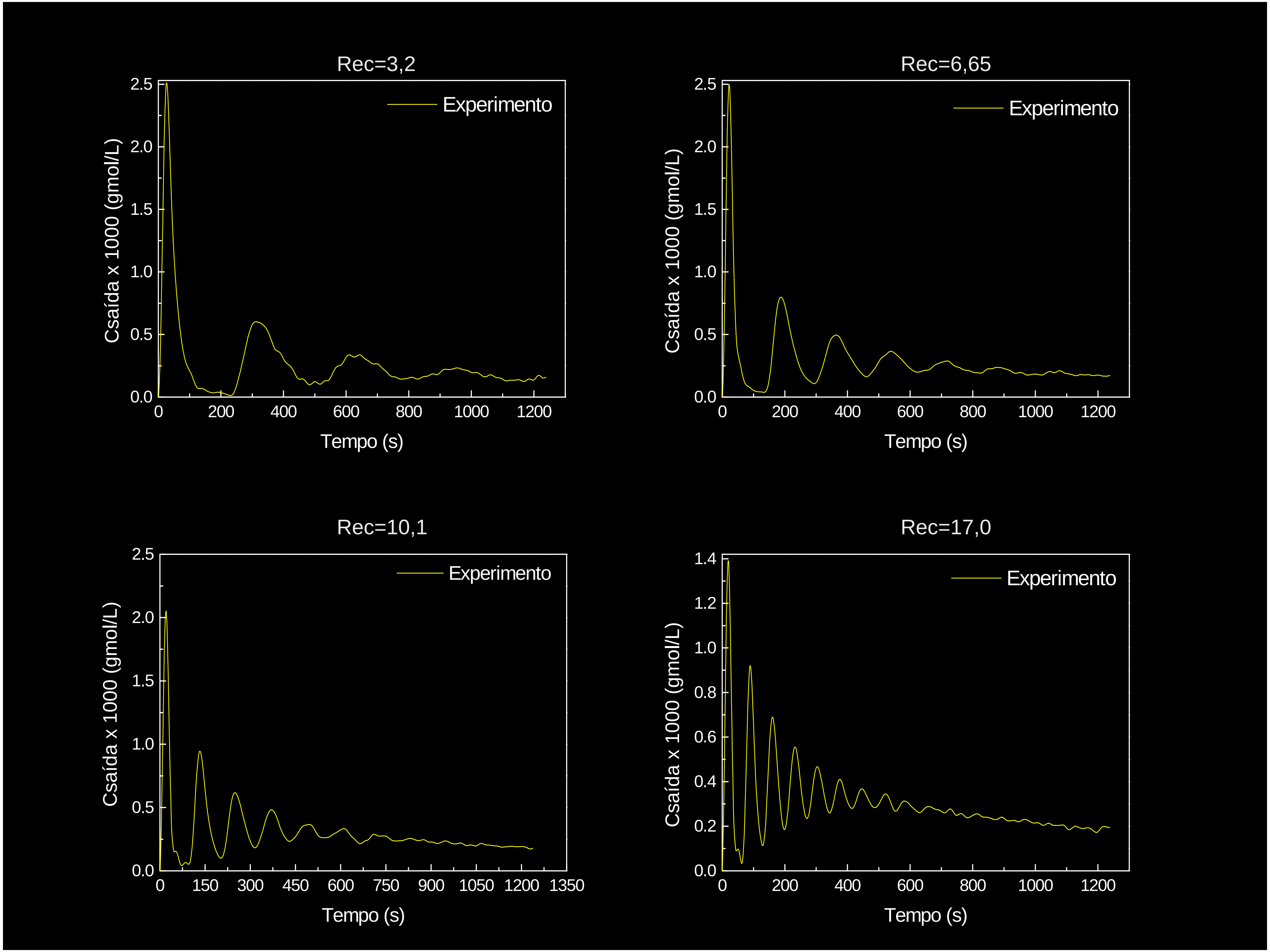


Pulso: 3,1 mL de KCl 0,01M

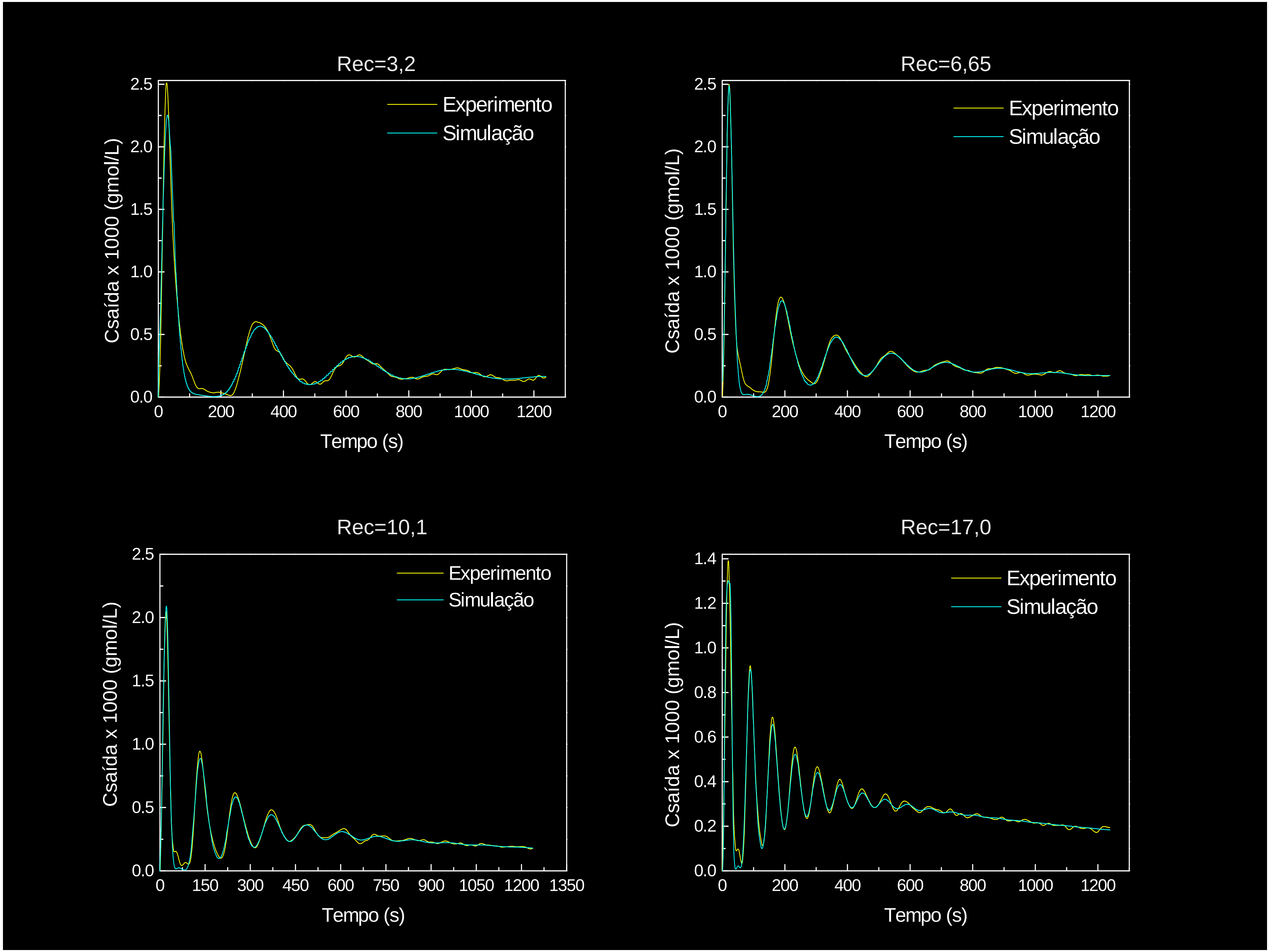




Pulso de traçador típico injetado no reator.



Rec=3,2
Rec=6,65
Rec=10,1
Rec=17,0
Experimento
Csaída x 1000 (gmol/L)
Tempo (s)



Rec=3,2
Rec=6,65
Rec=10,1
Rec=17,0
Experimento
Simulação
Csaída x 1000 (gmol/L)
Tempo (s)

• Degrau Unitário:

É uma perturbação severa que tira o sistema do seu ponto de operação. A resposta inclui toda a informação dinâmica do sistema. Requer uma quantidade grande de massa ou energia.

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 1 \text{ para } t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s) = G(s)u(s) = G(s)\frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = \hat{c}_0 + \sum_{j=1}^{n} \hat{c}_j \, e^{p_j t}$$

Cálculo dos coeficientes: $\hat{c}_0 = \lim\limits_{s \to 0} \cancel{s} G(s) \frac{1}{\cancel{s}} = G(0)$

$$\hat{c}_j = \lim_{s \to p_j} \left(s\text{-}p_j\right) \frac{G(s)}{s} = \frac{c_j}{p_j}$$

Logo: $y(t) = G(0) + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{c_j}{p_j} \, e^{p_j t}$

O primeiro termo é consequência do degrau introduzido. Os outros são próprios do sistema.

Se todos os pólos, p_j, tiverem parte real negativa:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = G(0) \quad \Longrightarrow \quad \textbf{Ganho estático}$$

O **ganho estático** mede a qualidade do sistema de aumentar ou diminuir o sinal de entrada, uma vez atingido o estado estacionário.

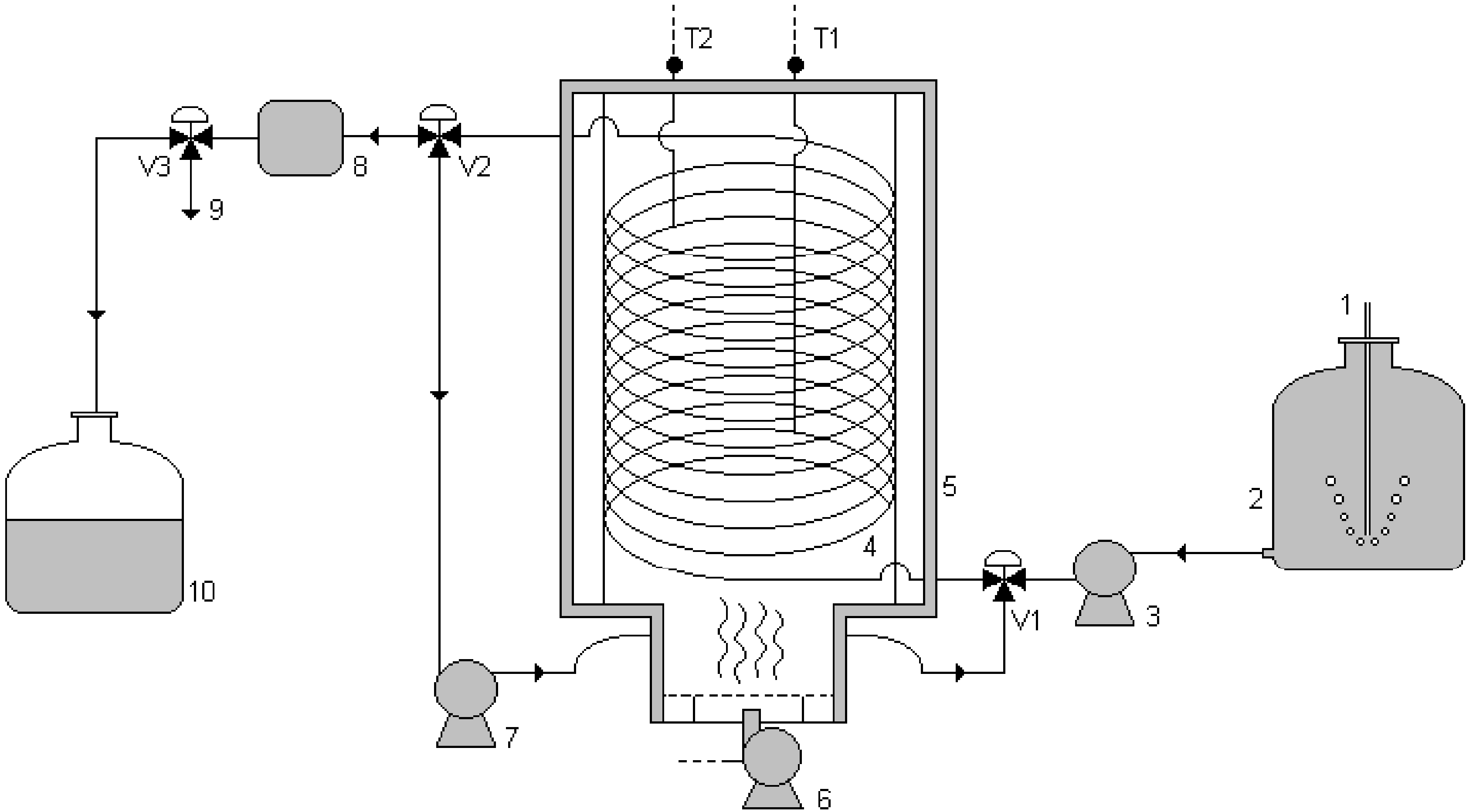
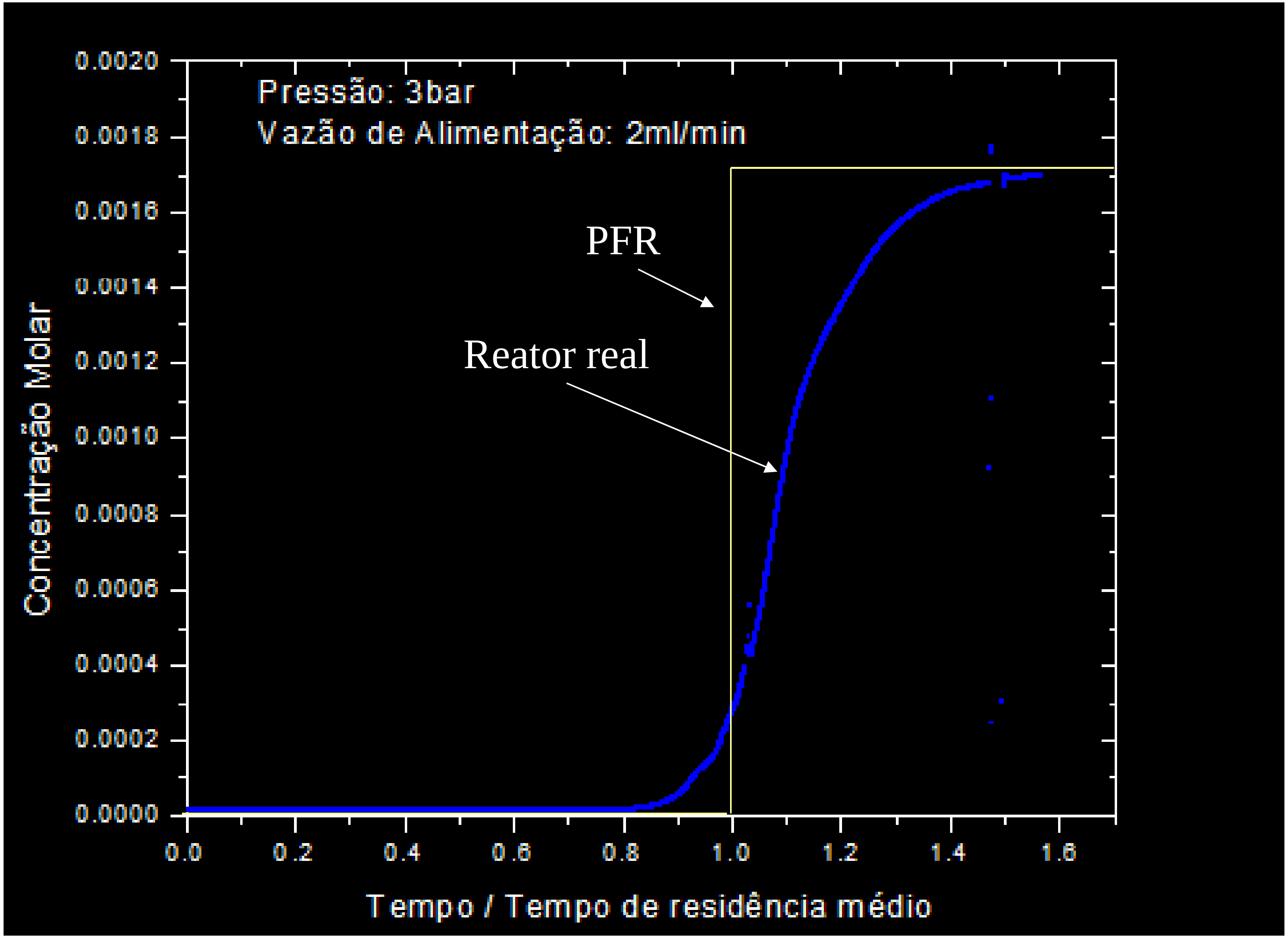
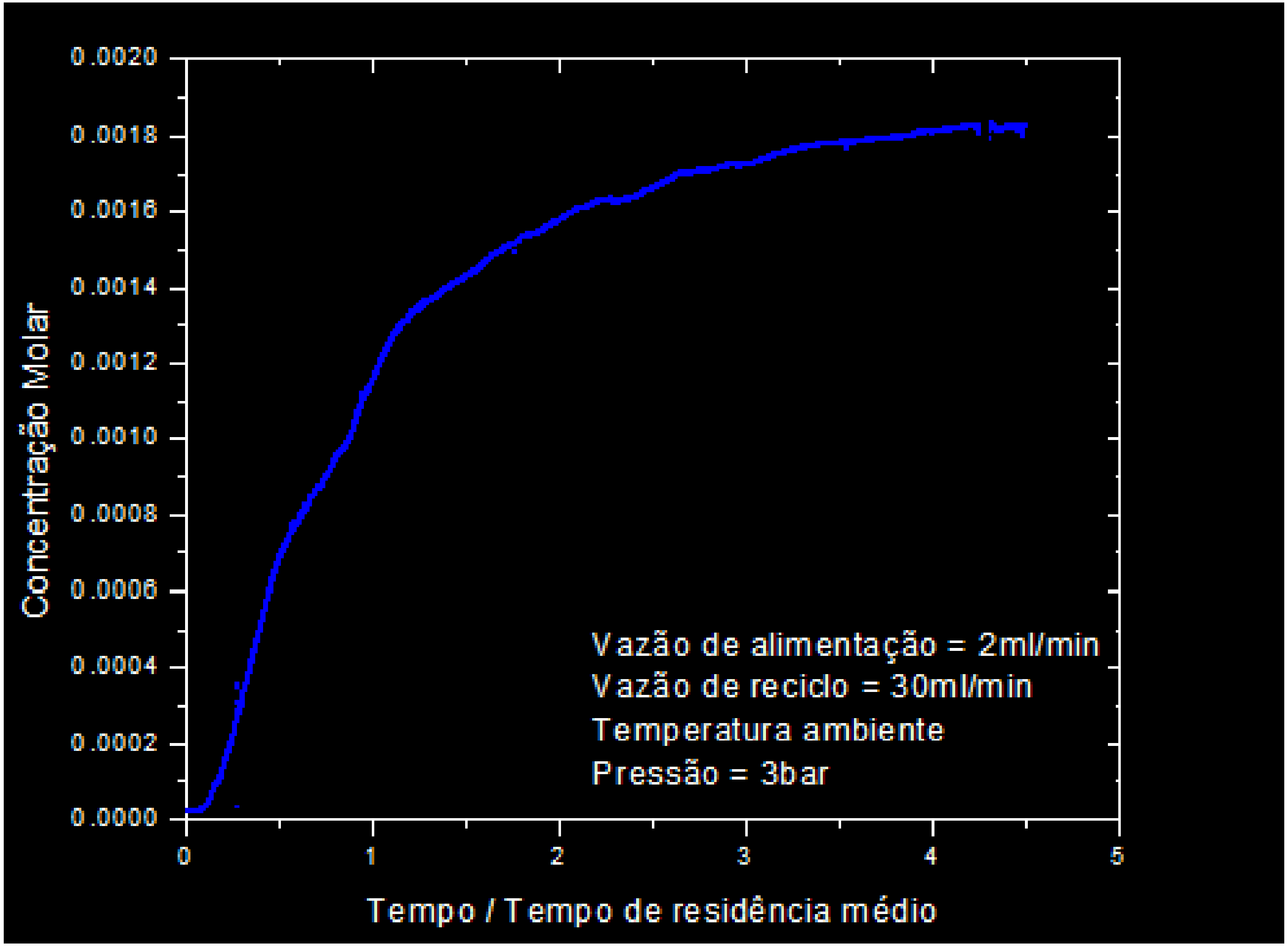


Diagrama esquemático do aparato experimental. (1) Borbulhador de nitrogênio; (2) reservatório de alimentação; (3) bomba de alimentação; (4) reator tubular; (5) invólucro isolante; (6) sistema de aquecimento (triac, resistência elétrica e soprador); (7) bomba de reciclo; (8) densímetro digital Anton Paar; (9) linha de amostragem; (10) reservatório de descarte; (11) T1,T2 – termopares; V1 - válvula abre fecha de três vias; V2 ,V3 - válvulas abre-fecha de duas vias.

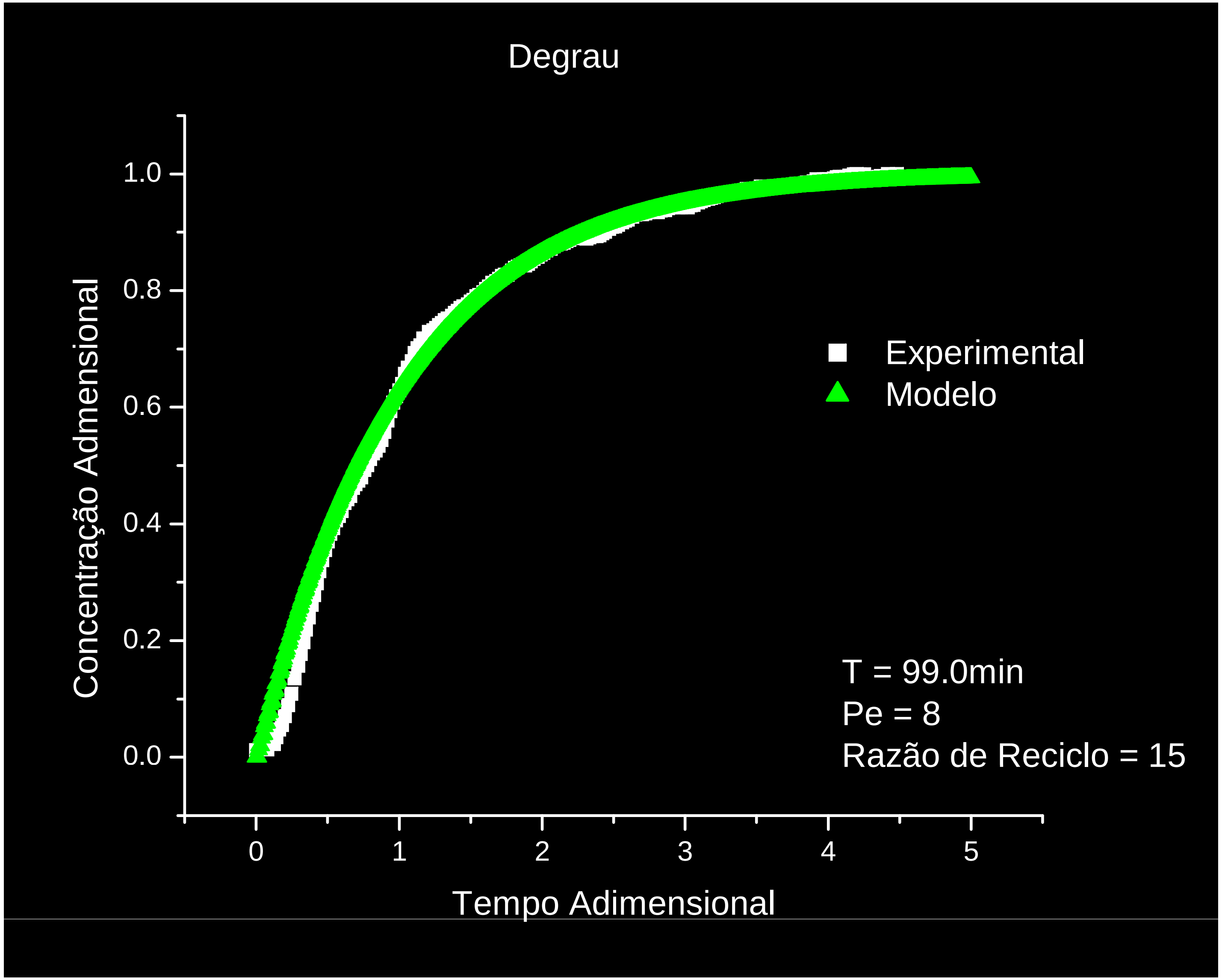
Degrau sem Reciclo, Vazão Baixa



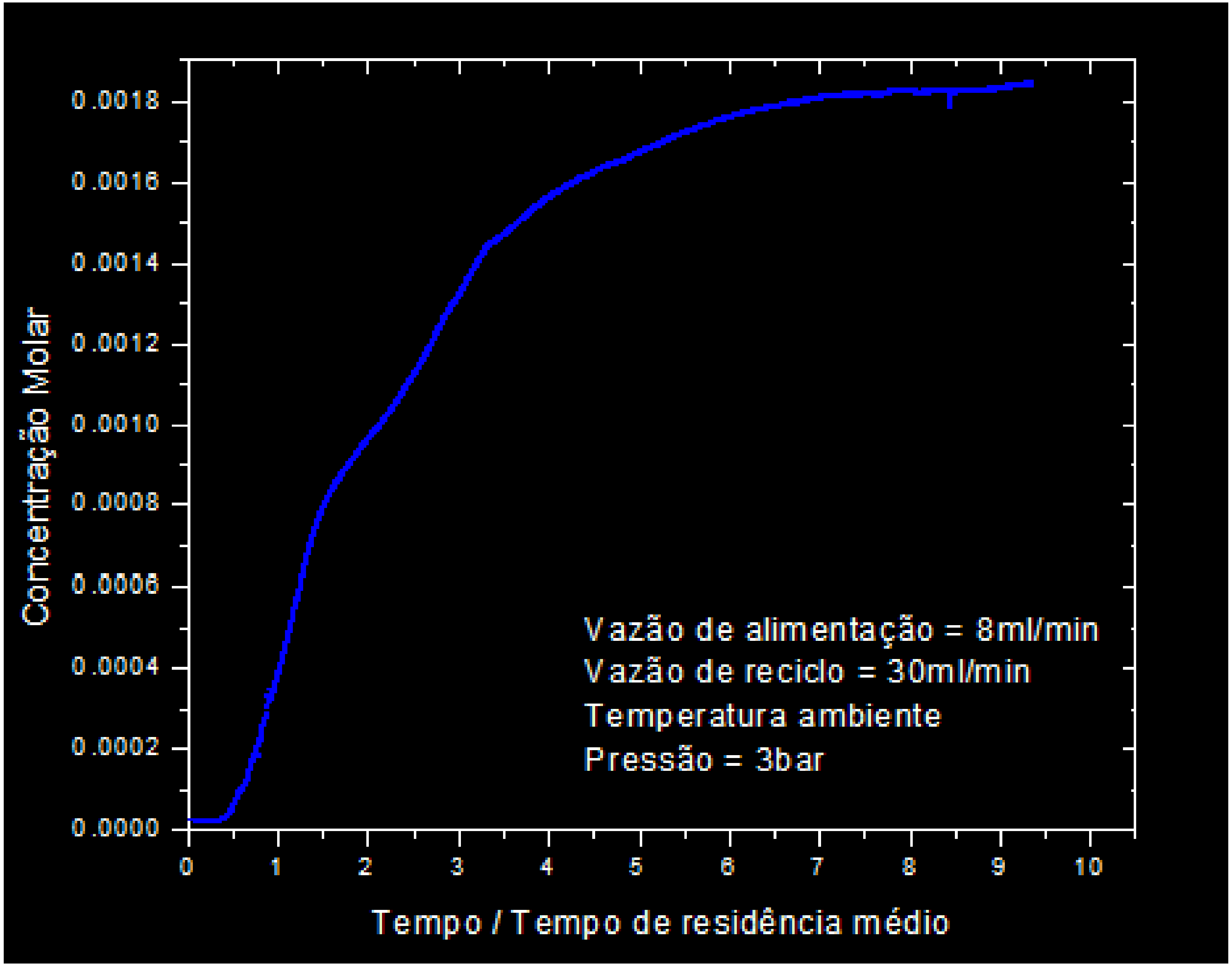
Degrau com Reciclo, Vazão Baixa



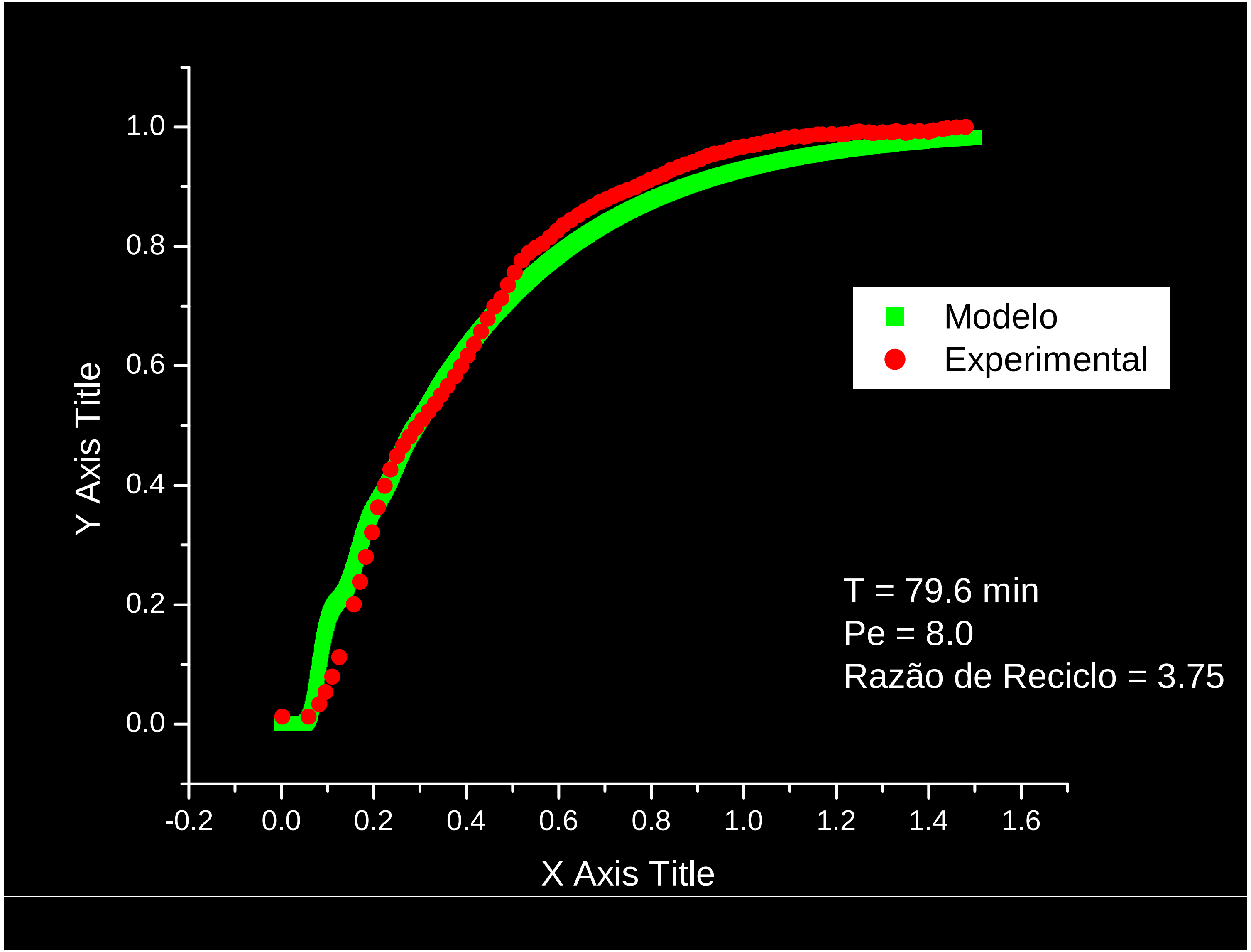
Degrau com Reciclo, Vazão Baixa - Modelagem



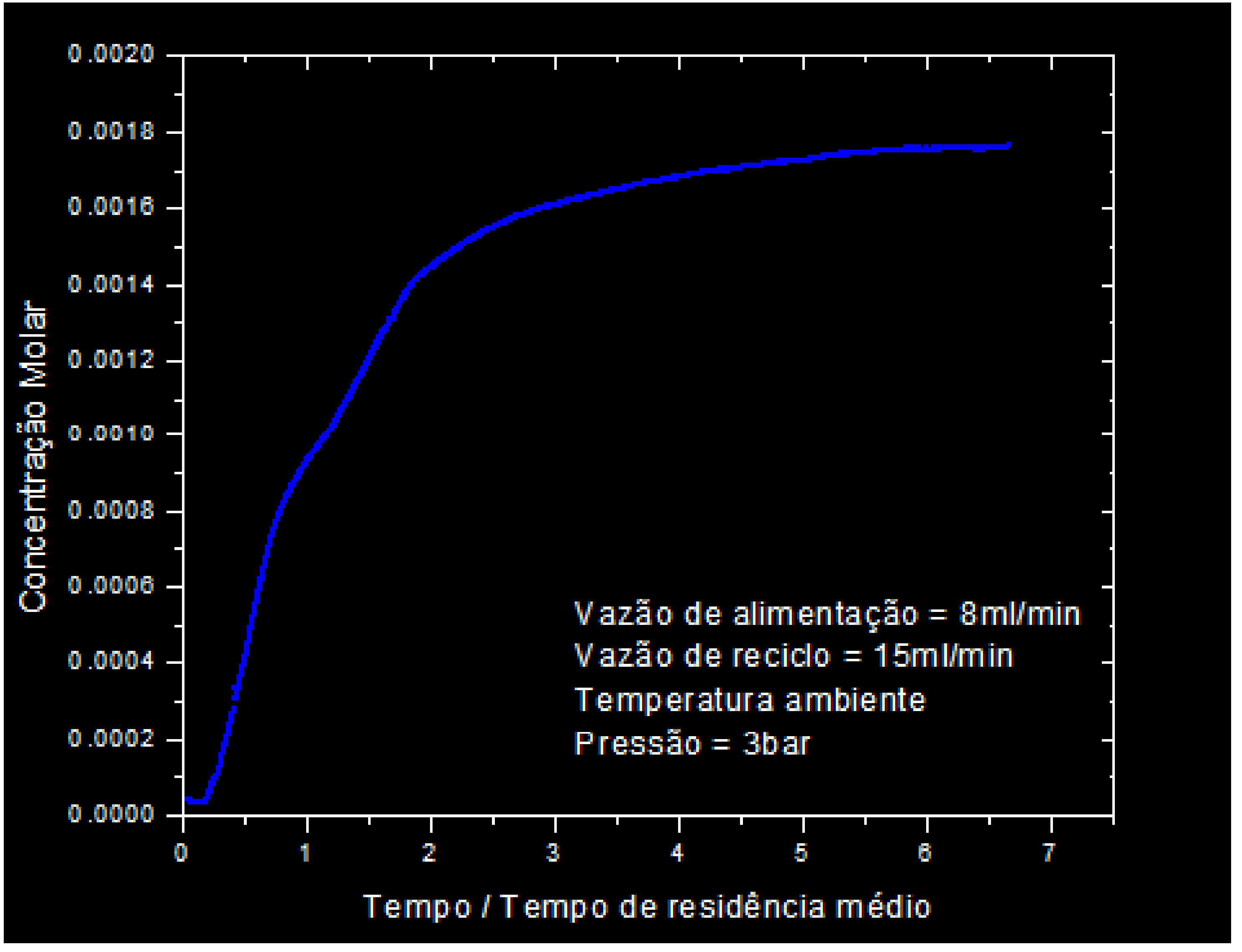
Degrau com Reciclo, Vazão Alta



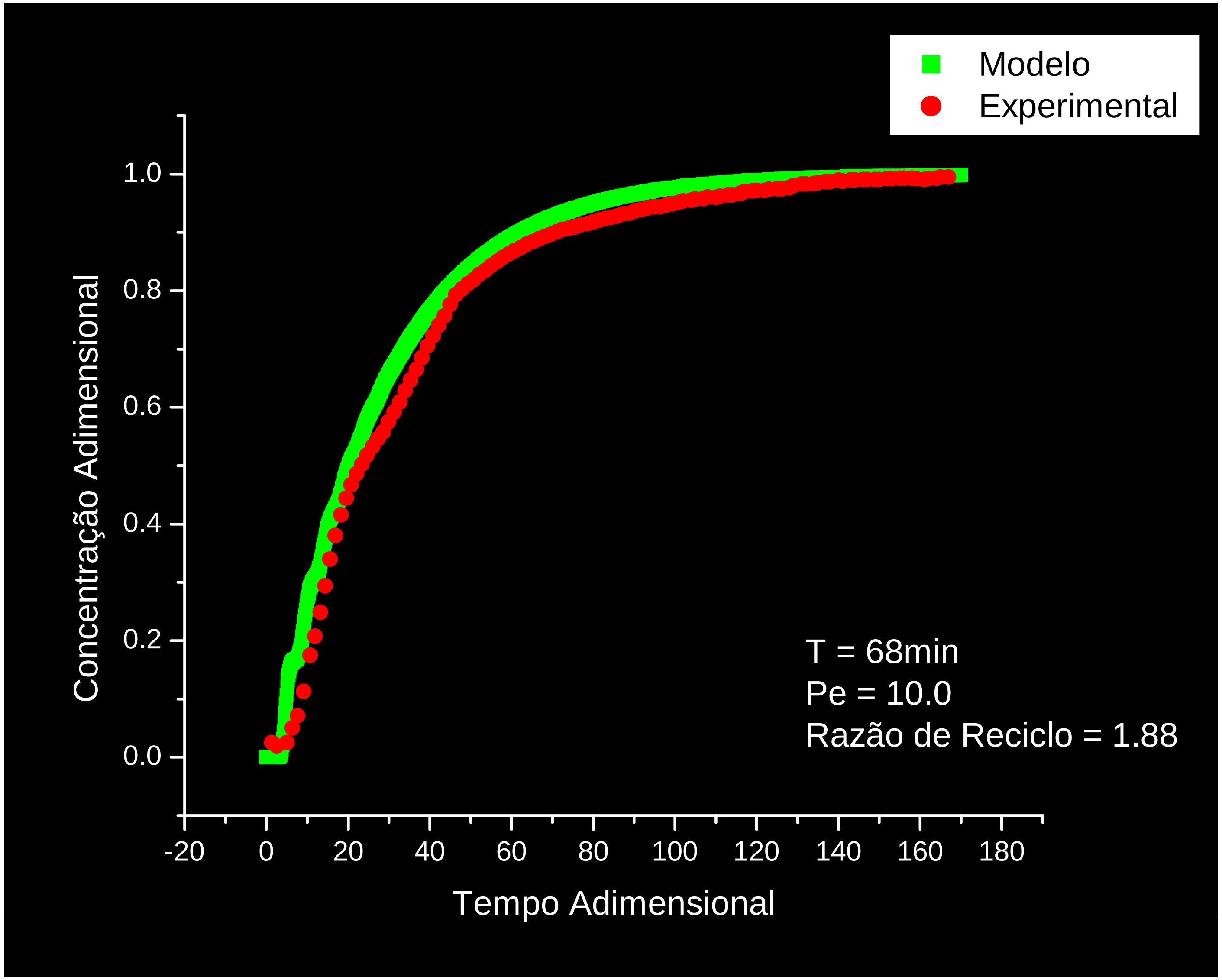
Degrau com Reciclo, Vazão Alta - Modelagem



Degrau com Reciclo, Vazão Alta e Diferente Razão de Reciclo

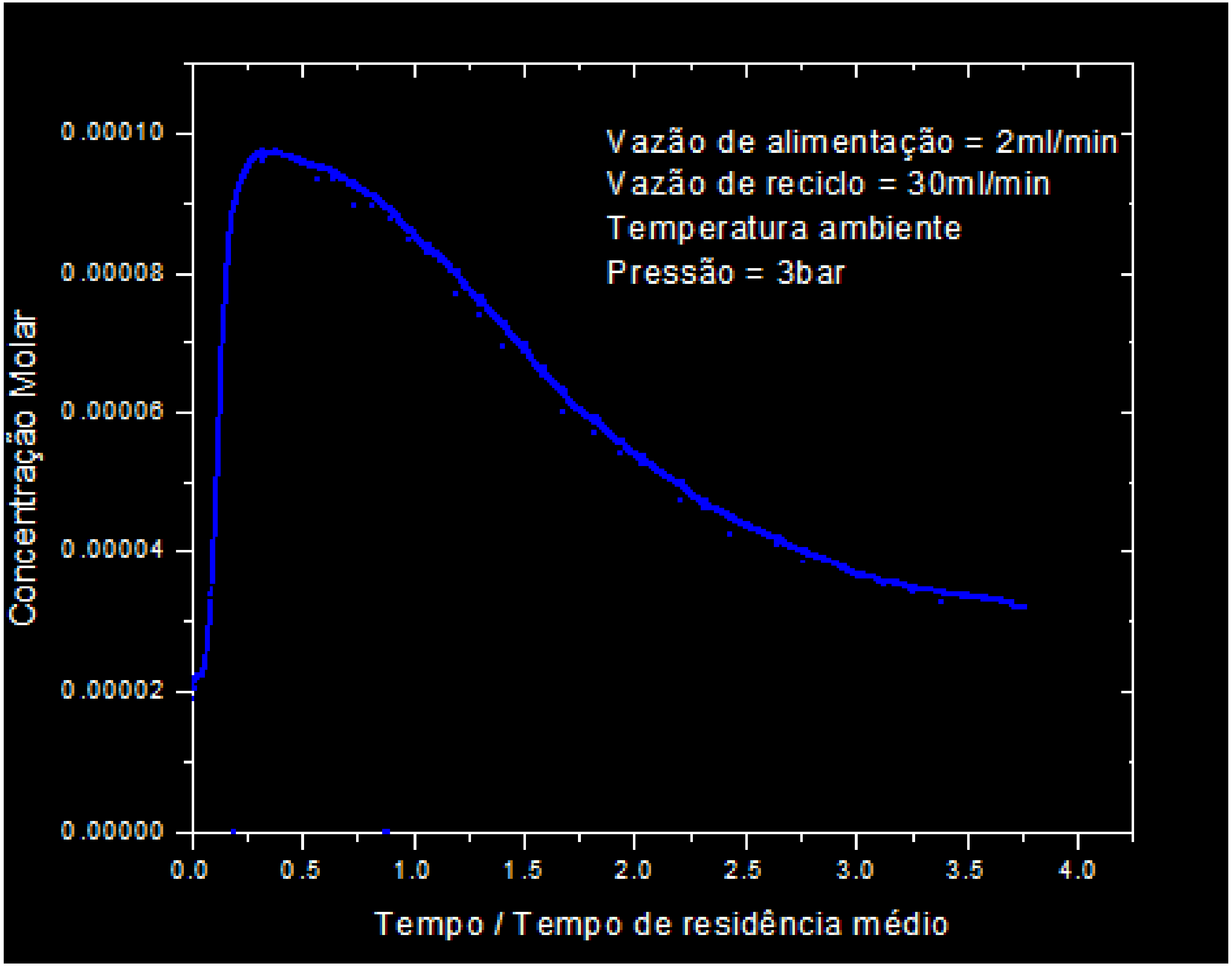


Modelagem

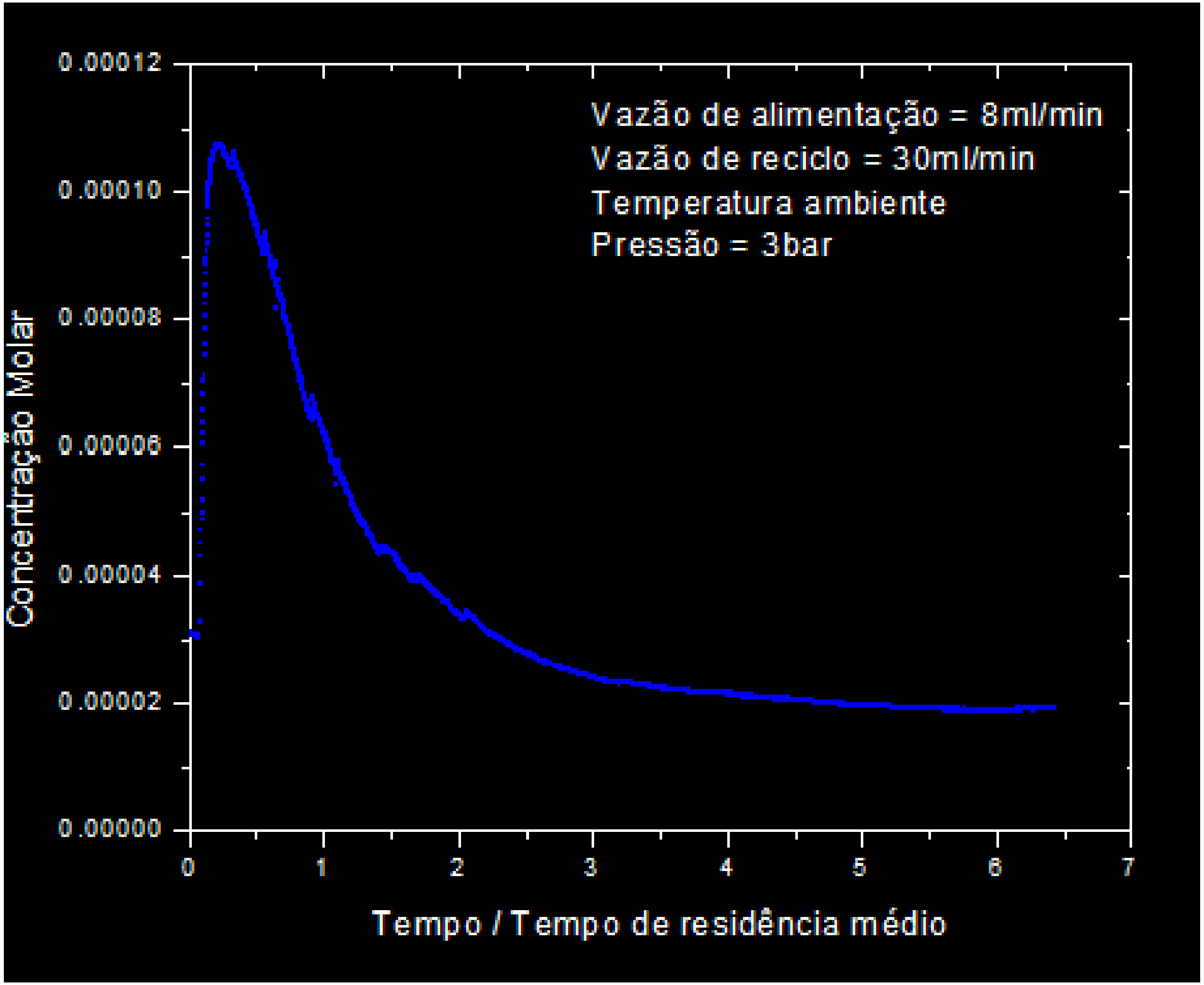


Modelo
Experimental
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Concentração Adimensional
-20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
Tempo Adimensional
T = 68min
Pe = 10.0
Razão de Reciclo = 1.88

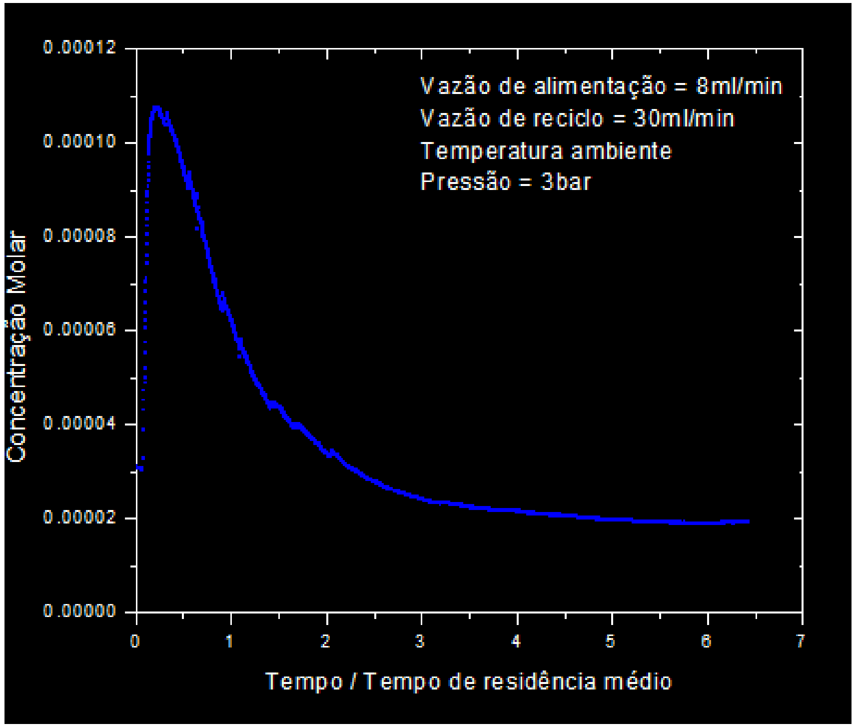
Pulso Vazão Baixa

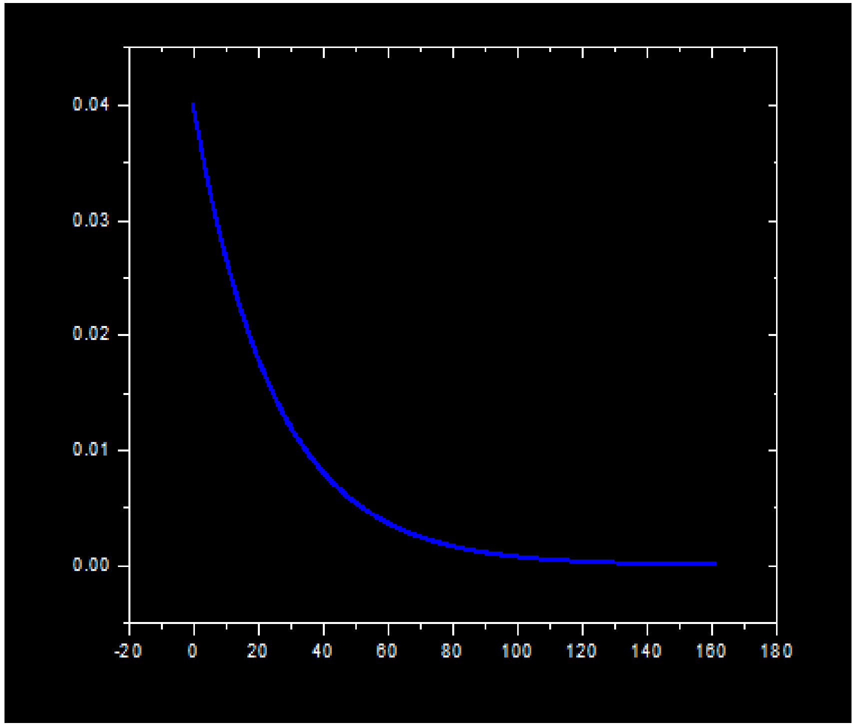


Pulso Vazão Alta

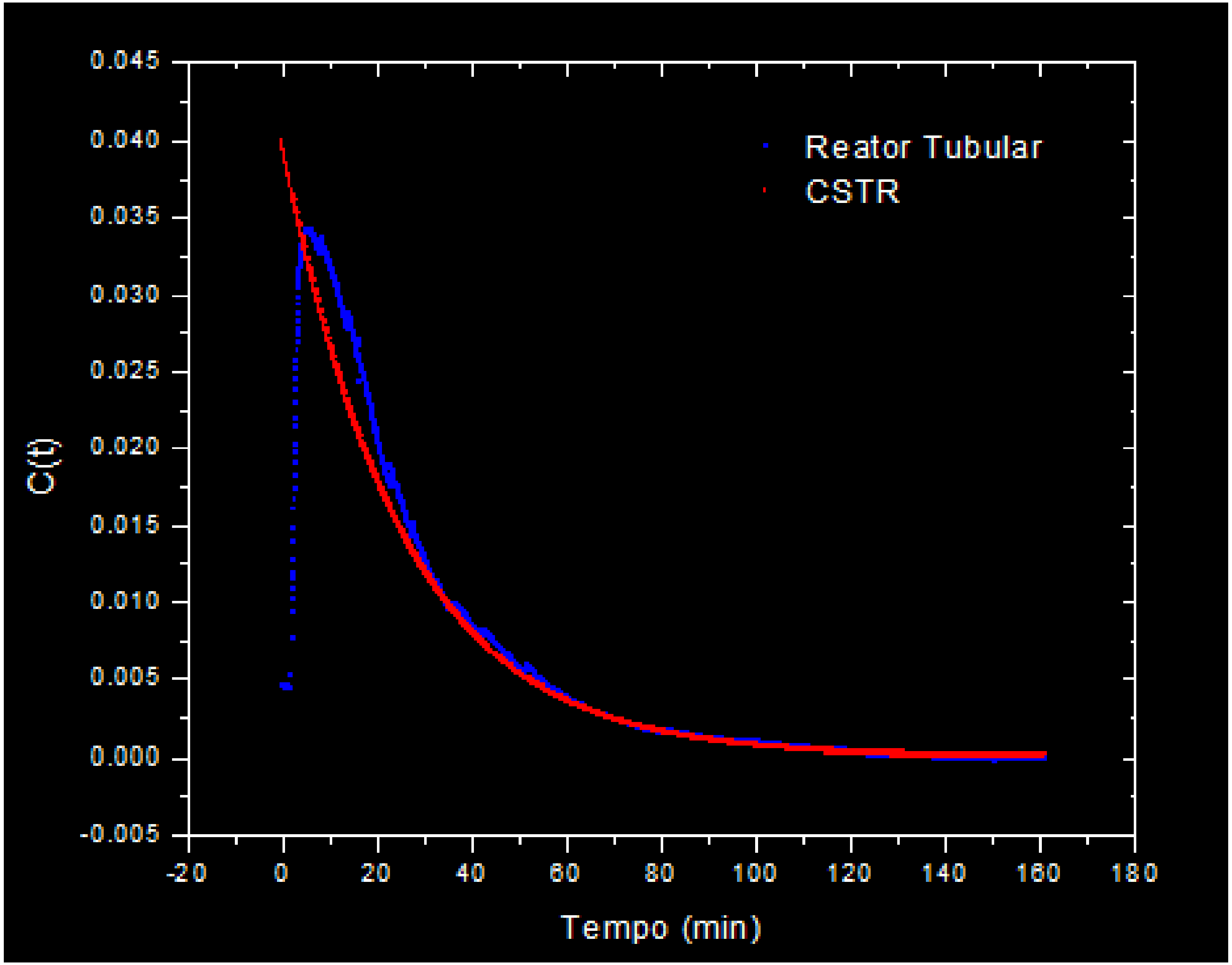


Modelagem do Experimento do Tipo Pulso com Vazão Alta





Modelagem do Experimento do Tipo Pulso com Vazão Alta



- <u>Perturbação Oscilatória</u>:

Mantém o valor médio do sinal de saída. É fácil de gerar. A resposta ao sinal só contém uma pequena parcela de informação relativa à dinâmica do sistema.

$$u(t) = \cos(\omega t + \theta_0) \qquad \begin{cases} \theta_0 = 0 & u(t) = \cos(\omega t) \\ \theta_0 = -\dfrac{\pi}{2} & u(t) = \mathrm{sen}(\omega t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$u(s) = \frac{s\cos(\theta_0) - \omega\,\mathrm{sen}(\theta_0)}{s^2 + \omega^2} \qquad \begin{cases} \theta_0 = 0 & u(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2} \\ \theta_0 = -\dfrac{\pi}{2} & u(t) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y(s) = G(s)u(s) = G(s)\frac{s\cos(\theta_0) - \omega\mathrm{sen}(\theta_0)}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(s) = G(s)\frac{s\cos\phi_0 - \omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0}{s^2+\omega^2} = \frac{\tilde{c}_0}{s-i\omega} + \frac{\tilde{c}_0^*}{s+i\omega} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{c}_j}{s-p_j}$$

$$\tilde{c}_0 = \lim_{s\to i\omega} (s-i\omega)G(s)\frac{s\cos\phi_0 - \omega\,sen\phi_0}{(s-i\omega)(s+i\omega)} = G(i\omega)\frac{i\phi\cos\phi_0 - \phi\,sen\phi_0}{2i\phi} = \frac{G(i\omega)}{2}(\cos\phi_0 + i\,sen\phi_0)$$

$$\tilde{c}_0 = \frac{G(i\omega)}{2}e^{i\phi_0} \qquad \tilde{c}_0^* = \frac{G(-i\omega)}{2}e^{-i\phi_0} \qquad \tilde{c}_j = \lim_{s\to p_j}(s-p_j)G(s)\frac{s\cos\phi_0 - \omega\,\mathrm{sen}\phi_0}{s^2+\omega^2} = c_j\left[\frac{p_j\cos\phi_0 - \omega\,\mathrm{sen}\phi_0}{p_j^2+\omega^2}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[G(i\omega)\,e^{i\phi_0}\,e^{i\omega t} + G(-i\omega)\,e^{-i\phi_0 - i\omega t}\right] + \sum_{j=1}^{n} c_j\left[\frac{p_j\cos\phi_0 - \omega\,\mathrm{sen}\,\phi_0}{p_j^2+\omega^2}\right]e^{p_j t}$$

Se os polos têm parte real negativa o somatório some com o tempo.

$$G(i\omega) = \rho\,e^{i\phi}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \rho\cos(\omega t + \phi_0 + \phi)$$

$$u(t) = \cos(\omega t + \phi_0)$$

Sistemas de Primeira Ordem

Sistemas de Primeira Ordem

Os **sistemas de primeira ordem só têm um polo** e são tipicamente representados por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Considerando o caso de sistemas de primeira ordem lineares, com coeficientes constantes e condição inicial nula, temos:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad \text{com} \quad y(0) = 0$$

Usando a transformada de Laplace chegamos à função de transferência:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

A função de transferência dos sistemas de primeira ordem tem uma **forma padrão** de ser escrita:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \qquad \begin{cases} K = G(0) = \dfrac{b_0}{a_0} & \longrightarrow \quad \text{Ganho estático} \\[2ex] \tau = \dfrac{a_1}{a_0} & \longrightarrow \quad \text{Constante de tempo} \end{cases}$$

Os sistemas de primeira ordem **só têm um polo**:

$$p_1 = p = -\frac{1}{\tau} = -\frac{a_0}{a_1}$$

que, naturalmente, **só pode ser real** (lembrar nos sistemas reais os polos complexos aparecem na forma de pares conjugados, isto é, só podem existir em sistemas de segunda ordem ou maior).

- Sistema do tipo **Ganho Puro** (*Pure gain*): $G(s) = K \quad (\tau = 0 \text{ ou } a_1 = 0)$

- Sistema do tipo **Integrador Puro** (*Pure capacity*): $G(s) = \frac{K}{s} \quad (a_0 = 0)$

- Exemplo: O tanque de nível com vazão de saída constante

$$A_c \frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - q_s \xrightarrow{\text{variáveis-desvio}} \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{A_c} u(t) \xrightarrow{\mathbf{L}} y(s) = \frac{1/A_c}{s} u(s)$$

Resposta ao degrau de magnitude A:

$$y(s) = G(s)u(s) = \frac{K}{\tau s + 1}\frac{A}{s} \quad \Rightarrow \quad y(t) = KA(1 - e^{-t/\tau})$$

✓ O primeiro termo corresponde ao sinal degrau introduzido, com o sistema respondendo através do seu ganho estático: KA.

✓ O segundo termo, também ponderado pelo ganho estático (e magnitude do sinal), corresponde ao polo do sistema que, se for negativo - isto é, se τ for uma constante positiva - desaparece com o tempo, com uma velocidade inversamente proporcional ao tamanho de τ.

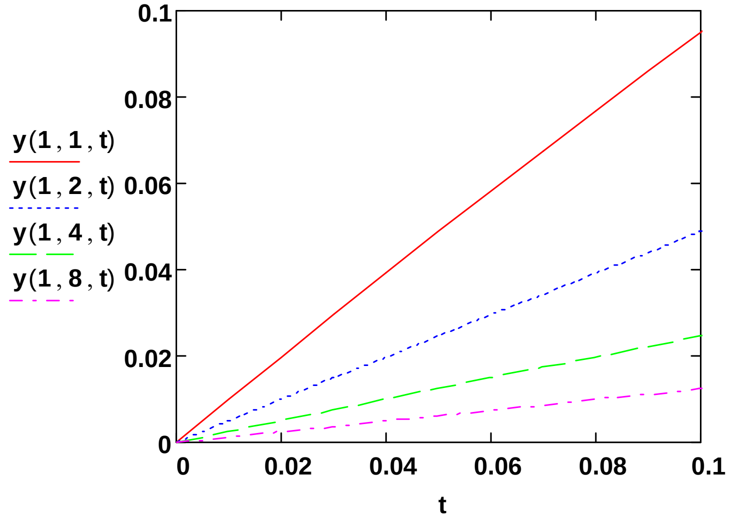
✓ Uma grande constante de tempo faz com que o termo **transiente** perdure por um tempo significativo. Pode-se dizer, então, que **grandes constantes de tempo** caracterizam **sistemas lentos** (*o conceito de lentidão só pode ser entendido em termos relativos!*).

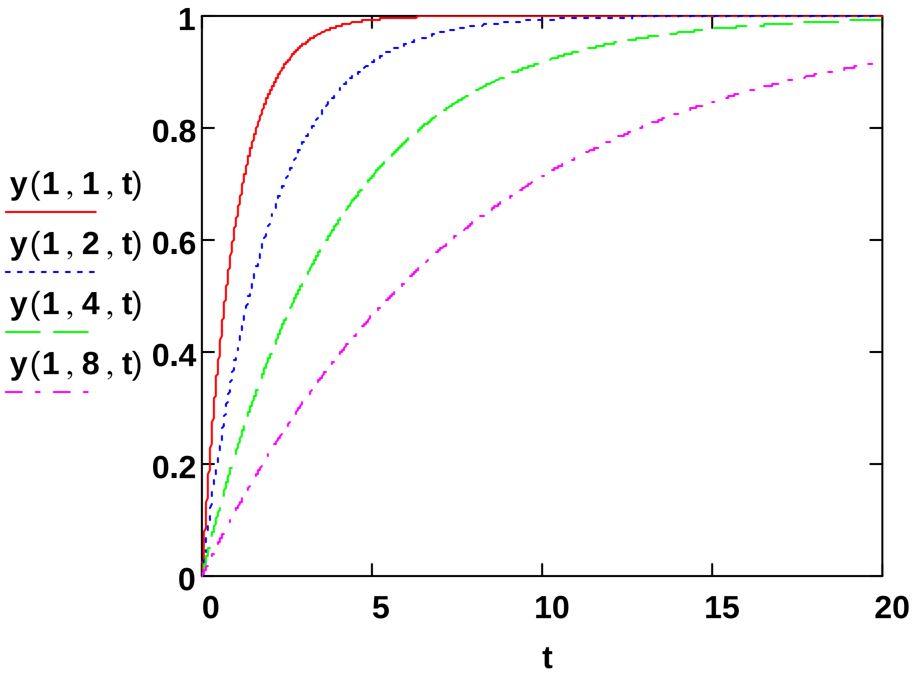
Mathcad:

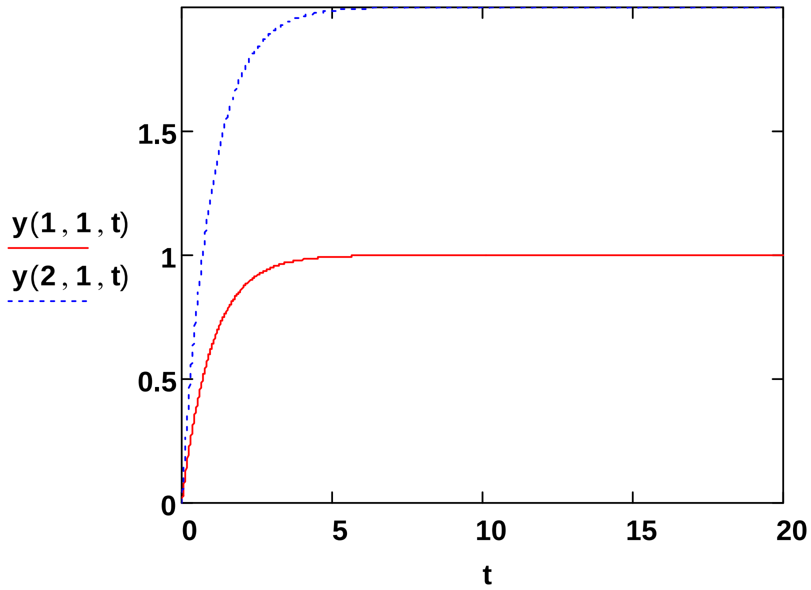
A=1

$$y(K,\tau,t) := K\cdot\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

$$t := 0, 0.01 .. 20$$



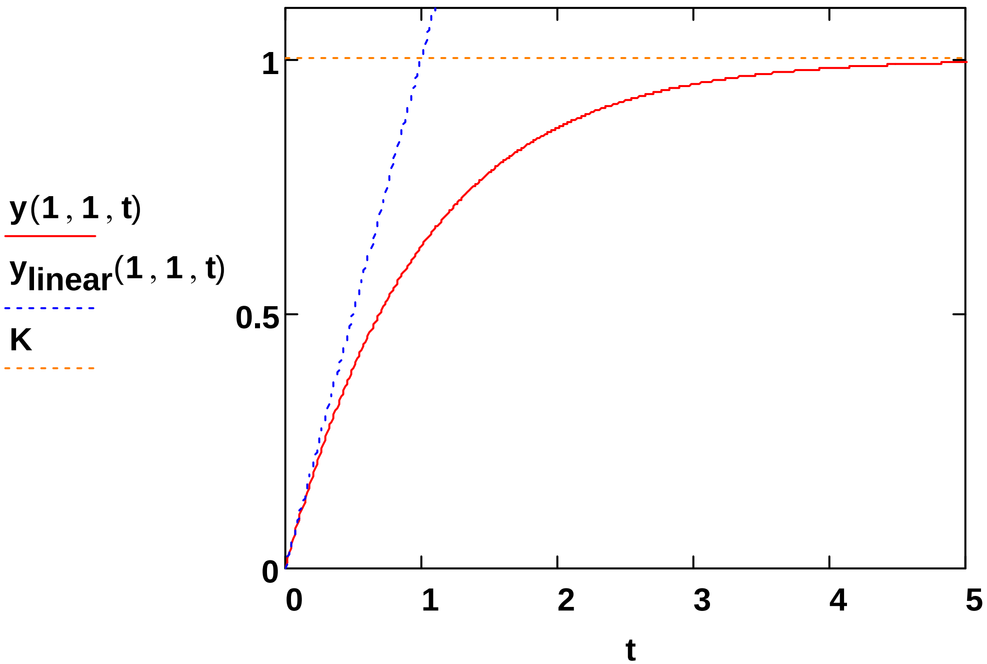




✓ Observa-se que a resposta é imediata, o que fica claro ao verificar que a **inclinação na origem é diferente de zero**:

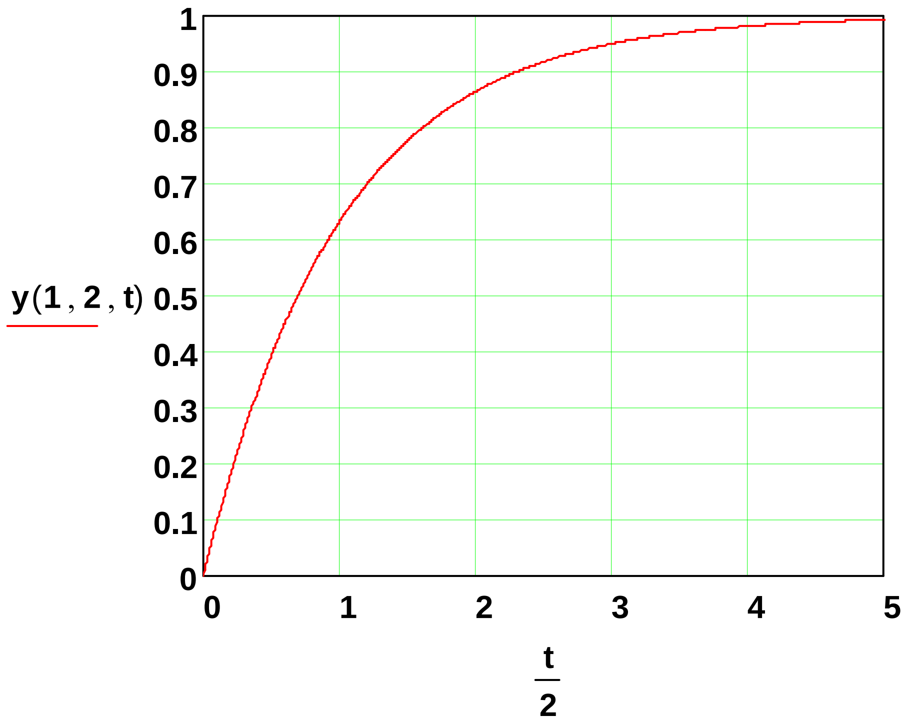
$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{KA}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right|_{t=0} = \frac{KA}{\tau}$$

✓ Este resultado também é útil para calcular a constante de tempo de um sistema de primeira ordem, bastando traçar a tangente na origem à resposta a um degrau e verificar em que tempo esta reta corta a reta correspondente à resposta estabelecida (para tempo tendendo a infinito), que corresponde ao produto da magnitude do sinal pelo ganho estático do sistema. Esse tempo é τ.



✓ Uma outra forma de determinar essa constante é calcular o tempo para o qual a resposta alcança 62,3% do seu valor final (resposta estabelecida):

$$y(t=\tau) = KA \cdot \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = KA \cdot \left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}632KA$$



✓ Observe, finalmente, que a resposta após 5 constantes de tempo pode ser considerada completamente estabelecida, o que é uma forma prática de inferir a constante de tempo dominante de um processo. Uma vez que se constata que a resposta se estabeleceu, divide-se o tempo correspondente por 5 e se obtém uma boa aproximação da constante de tempo que domina o processo:

$$y(t = 5\tau) = KA \cdot \left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) = KA \cdot \left(1 - e^{-5}\right) = 0{,}993KA$$