Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE – Programa de Engenharia Química

COQ 790 – ANÁLISE DE SISTEMAS DA ENGENHARIA QUÍMICA

AULA 8:

Sistemas de Primeira Ordem (Continuação): Sistema Lead-Lag; Sistemas de Segunda Ordem; Álgebra de Diagrama de Blocos; Sistemas com Resposta Inversa.

2014/1

• **Sistema do tipo *Lead-Lag* (Avanço-Atraso):**

O sistema dinâmico cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = K\frac{\xi s + 1}{\tau s + 1}$$

é chamado de sistema *lead-lag*. A expansão em frações parciais resulta em:

$$G(s) = K\frac{\xi s + 1}{\tau s + 1} = K\left[a_0 + \frac{a_1}{\tau s + 1}\right]$$

com: $a_0 = \dfrac{\xi}{\tau} = \rho \qquad a_1 = 1 - \dfrac{\xi}{\tau} = (1 - \rho)$

de modo que:

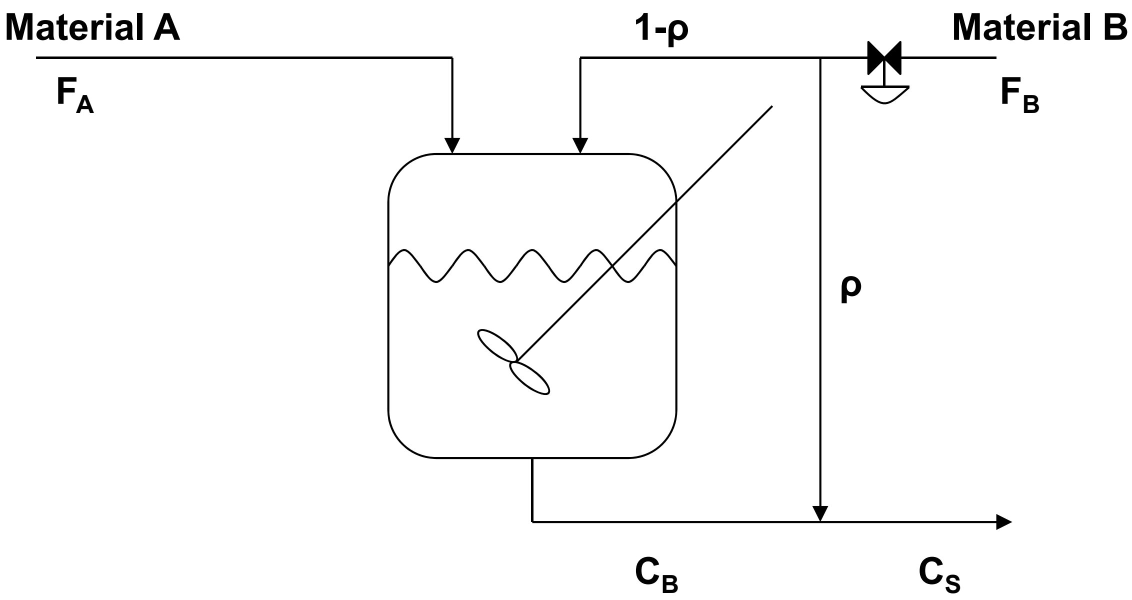
$$y(s) = G(s)u(s) = \left[\rho K + (1-\rho)\frac{K}{\tau s + 1}\right]u(s)$$

O comportamento dinâmico do sistema lead-lag é uma média ponderada do comportamento dinâmico de um sistema do tipo puro ganho e daquele de um sistema de primeira ordem, ρ sendo o fator de ponderação, a razão lead-lag.

A resposta temporal de um sistema dinâmico *lead-lag* (ganho K, constante de tempo τ, razão *lead-lag* ρ) a uma dada perturbação será dada pela combinação linear das respectivas respostas dos sistemas do tipo ganho puro (ganho = K), $y_g(t)$, e de primeira ordem (ganho K, constante de tempo τ), $y_1(t)$ a essa mesa perturbação:

$$y(t) = \rho y_g(t) + (1-\rho) y_1(t)$$

<u>Exemplo</u>:

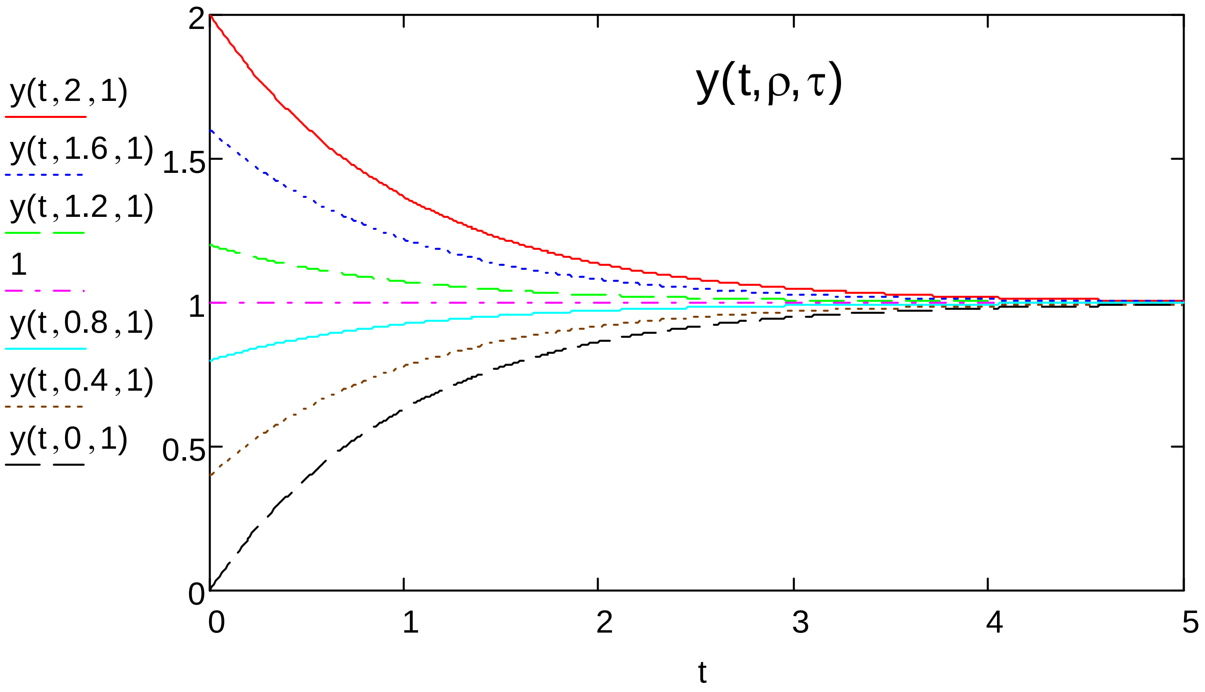


Resposta ao degrau de um sistema *lead-lag*:

$$y_g(t) = K \quad e \quad y_1(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Logo:

$$y(t) = K\left[\rho + (1-\rho)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right]$$



Análise:

- ✓ **Caso 1: ρ<1 (ξ<τ)**
- ✓ **Caso 2: ρ=1 (ξ=τ)**
- ✓ **Caso 3: ρ>1 (ξ>τ)**

Sistemas de 2ª Ordem

Sistemas de Segunda Ordem

Os sistemas de segunda ordem têm dois polos e são tipicamente representados por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Considerando o caso de sistemas de segunda ordem puros, lineares, com coeficientes constantes e condições iniciais nulas, temos:

$$a_2 \frac{dy^2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad \text{com} \quad y(0) = 0 \text{ e } \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Usando a transformada de Laplace chegamos à função de transferência:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

A função de transferência dos sistemas de segunda ordem tem uma forma padrão de ser escrita:

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \quad \begin{cases} K = G(0) = b_0 / a_0 \\ \tau = \sqrt{a_2 / a_0} \\ 2\zeta\tau = a_1 / a_0 \end{cases}$$

$K = G(0) = b_0 / a_0 \longrightarrow$ **Ganho estático**

$\tau = \sqrt{a_2 / a_0} \longrightarrow$ **Constante de tempo aparente (período natural de oscilação)**

$2\zeta\tau = a_1 / a_0 \longrightarrow$ ζ **coeficiente de amortecimento**

A forma geral dos polos é:

$$p = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

- ✓ **0<ζ<1: polos complexas**
- ✓ **ζ=1: polo real duplo,** $p = \frac{-1}{\tau}$
- ✓ **ζ>1: polos reais, distintos e negativos**
- ✓ **ζ=0: polo imaginário puro,** $p = \frac{\pm i}{\tau}$

resultando numa oscilação permanente com período τ; esta é a origem do nome período natural de oscilação.

Note também que:

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} = \frac{K}{\tau^2 (s - p_1)(s - p_2)} \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2}} \qquad \zeta = -\frac{(p_1 + p_2)}{2} \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2}}$$

Os sistemas de segunda ordem podem ser originados da combinação de sistemas de primeira ordem ou serem inerentemente de segunda ordem.

- **Combinação de sistemas de primeira ordem**

Dois sistemas de primeira ordem combinados, mas sem interação, resultam na seguinte função de transferência:

$$G(s) = \left(\frac{K_1}{\tau_1 s + 1}\right)\left(\frac{K_2}{\tau_2 s + 1}\right) = \frac{K_1 K_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}$$

Comparando com a forma padrão:

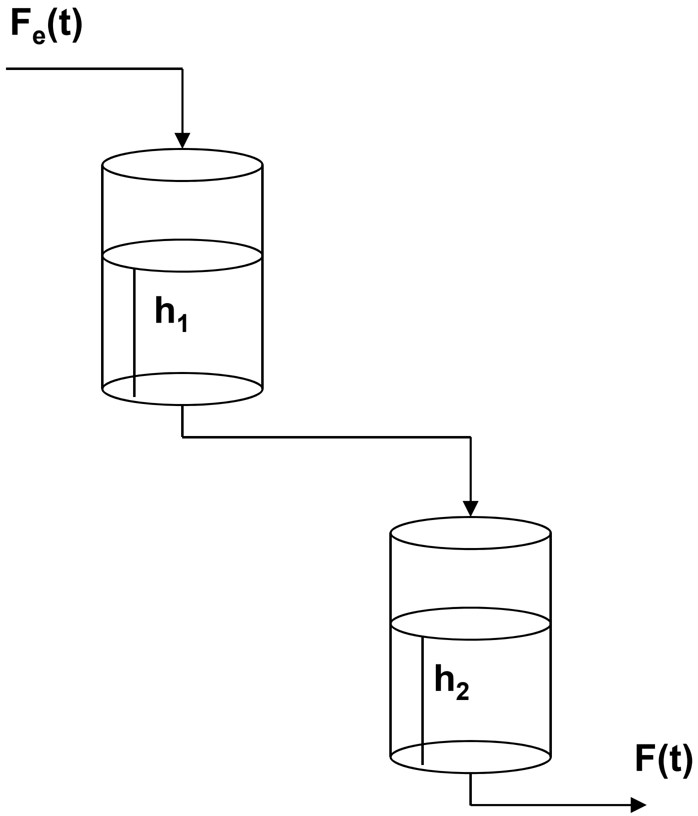
$$K = K_1 K_2$$

$$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2}$$

$$\zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

O primeiro fator é a média aritmética e o segundo a inversa da média geométrica. Como a média aritmética é sempre maior ou igual a geométrica, o coeficiente de amortecimento para este tipo de sistema será sempre maior ou igual a 1, o que é um indicativo de que não haverá oscilação (os polos são $-1/\tau_1$ e $-1/\tau_2$, reais).

Um sistema deste tipo, por exemplo, é a combinação de dois tanques de nível, como mostrado abaixo:



Dois sistemas de primeira ordem combinados, mas com interação, resultam na seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K_1 K_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + K_2 \tau_1) s + 1}$$

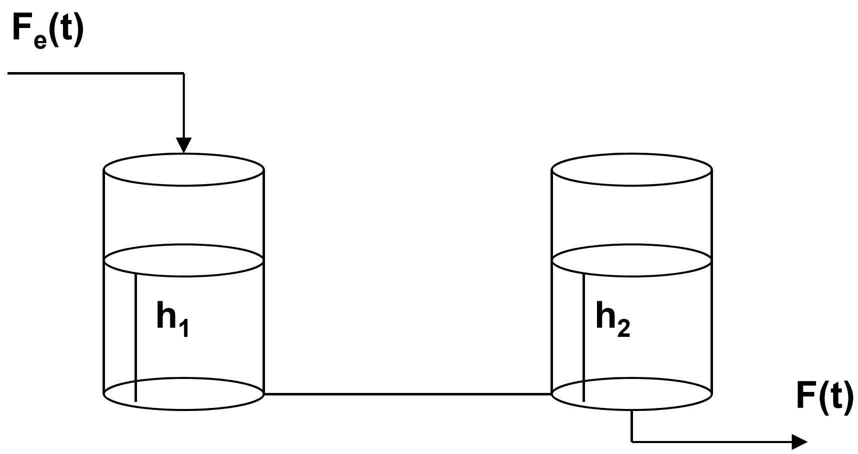
Comparando com a forma padrão:

$$\tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2}$$

$$\zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2 + K_2 \tau_1}{2} \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

Novamente o coeficiente de amortecimento não pode ser menor do que 1 e este sistema também não apresenta oscilação.

Um sistema deste tipo pode ser exemplificado pela combinação de dois tanques de nível:



• **Sistema inerentemente de segunda ordem**

Neste caso os polos podem ser reais e distintos, reais e repetidos, complexos conjugados e imaginários conjugados, cuja forma geral é:

$$p = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

Resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem:

$$y(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}\frac{A}{s} = \frac{AK/\tau^2}{s(s-p_1)(s-p_2)}$$

Resolvendo pela técnica de expansão em frações parciais, obtemos:

$$y(s) = \frac{AK/\tau^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} \Rightarrow y(t) = c_0 + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} = AK\left[1 + \frac{p_2 e^{p_1 t}}{(p_1 - p_2)} + \frac{p_1 e^{p_2 t}}{(p_2 - p_1)}\right]$$

onde:

$$p_1, p_2 = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

Observe que:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Análise:

✓ **Caso 1: $0<\zeta<1$ (p_1 e p_2 raízes complexas conjugadas)**

$$y(t) = AK\left[1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta t/\tau} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{\tau} t + \phi\right)\right]$$

onde:

$$\beta = \sqrt{\left|\zeta^2 - 1\right|}$$

$$\phi = \operatorname{arctg}(\beta/\zeta)$$

✓ **Caso 2: ζ=1 (p_1=p_2=-1/τ; raízes reais e iguais)**

Nesse caso, a seguinte função de transferência deve ser invertida:

$$y(s) = \frac{AK/\tau^2}{s(s-p_1)^2} \Rightarrow y(t) = AK\left[1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]$$

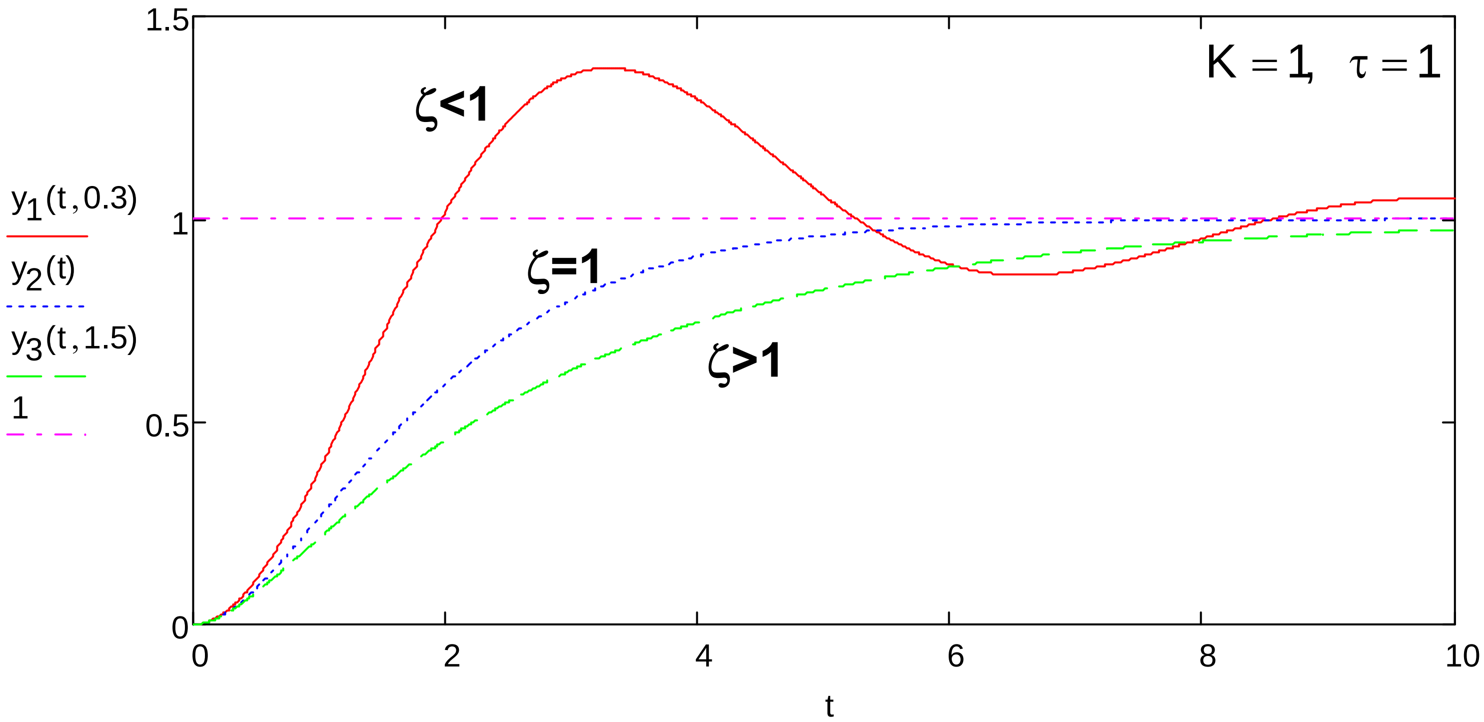
✓ **Caso 3: ζ>1 (p_1 e p_2 raízes reais e distintas)**

Nesse caso, a seguinte função de transferência deve ser invertida:

$$p_1, p_2 = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\beta}{\tau}$$

de modo que:

$$y(t) = AK\left[1 - e^{-\zeta t/\tau}\left(\cosh\frac{\beta}{\tau}t + \frac{\zeta}{\beta}\operatorname{senh}\frac{\beta}{\tau}t\right)\right]$$



Análise:

✓ **Caso 1 (0<ζ<1): A resposta é oscilatória e é dita sub-amortecida (*underdamped*).**

✓ **Caso 2 (ζ=1): A resposta é dita criticamente amortecida (*critically damped*) e oferece a resposta mais rápida para alcançar o valor final sem oscilação.**

✓ **Caso 3 (ζ>1): A resposta é morosa e é dita sobre-amortecida (*overdamped*).**

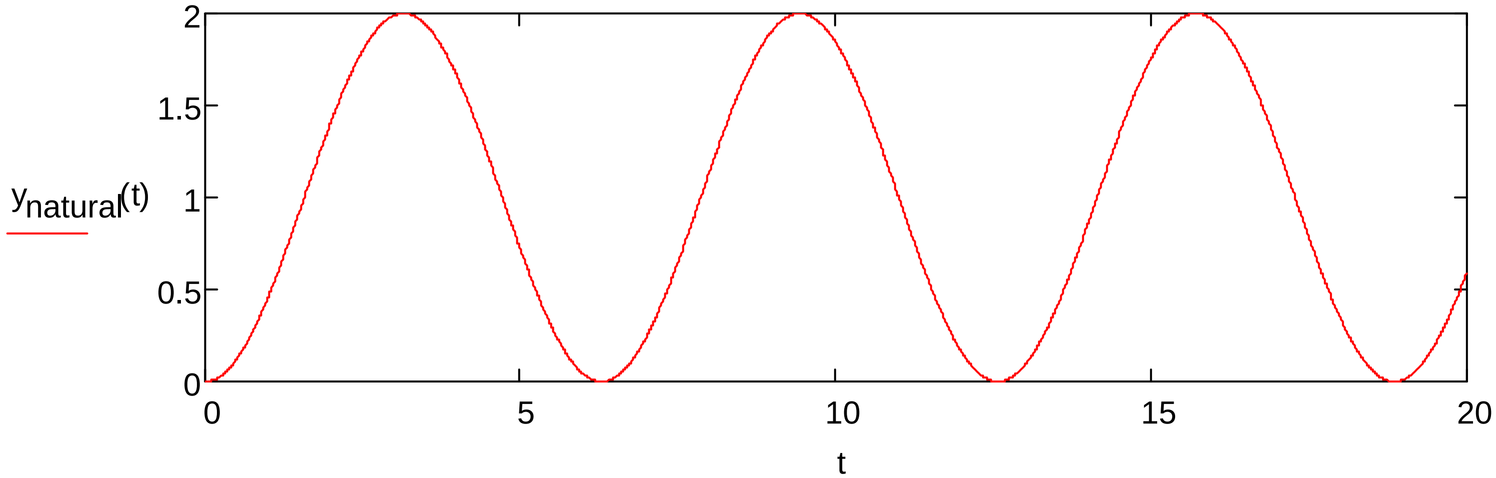
Consideremos novamente o caso sub-amortecido ($0<\zeta<1$):

$$y(t) = AK\left[1 - \frac{1}{\beta}e^{-\zeta t/\tau}\text{sen}\left(\frac{\beta}{\tau}t + \phi\right)\right]$$

e vejamos a resposta do sistema para $\zeta=0$:

$$y(t) = AK\left[1 - \text{sen}\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Vemos que a resposta obtida é um sinal sinusoidal puro e não amortecido com frequência $1/\tau$, chamada de frequência natural de oscilação. Observe que o seu inverso é τ, portanto chamado de período natural de oscilação.



• **Efeito de um zero**

A função de transferência para um sistema de segunda ordem com um zero é dada por:

$$G(s) = \frac{K\left(\xi_1 s + 1\right)}{\left(\tau_1 s + 1\right)\left(\tau_2 s + 1\right)}$$

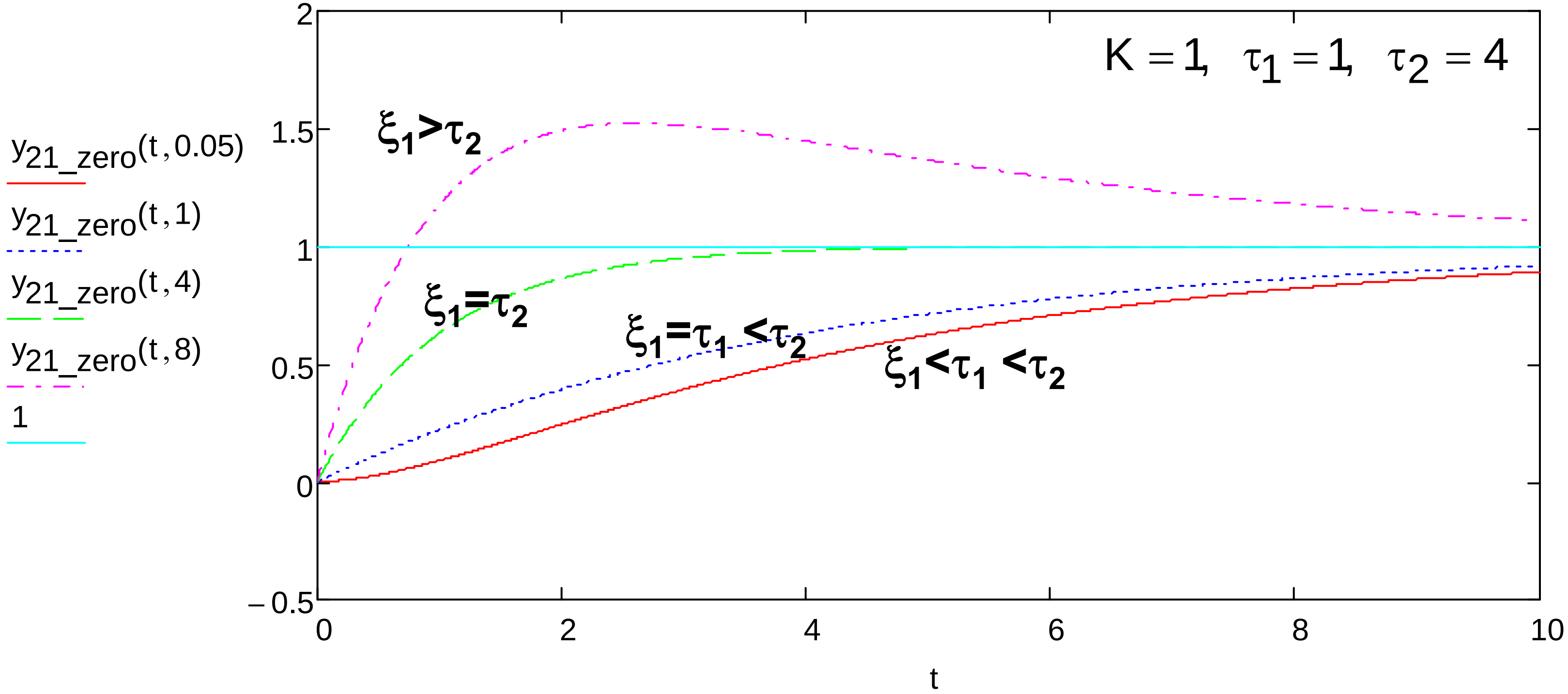
Também conhecido como sistema (2,1)

de modo que a resposta a um degrau unitário no domínio de tempo fica:

$$y\left(t\right) = K\left(1 - \frac{\tau_1 - \xi_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2 - \xi_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$

Comparando sua resposta a um degrau unitário com a resposta do sistema de segunda ordem puro:

$$y\left(t\right) = K\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$



Análise:

✓ **Caso 1 ($\xi_1 > \tau_2$): Observamos a possibilidade de *overshoot*.**

✓ **Caso 2 ($\xi_1 = \tau_2$): Verificamos o cancelamento de um polo com o zero; logo o sistema se comporta como um sistema de primeira ordem.**

✓ **Caso 3 ($0 < \xi_1 < \tau_2$): À medida que ξ diminui, as respostas tendem para aquelas de um sistema de segunda ordem sobre-amortecido.**

Observações finais para o sistema 2,1:

- ✓ **Diferentemente de um sistema de segunda ordem puro, a resposta com um zero é mais rápida. Vemos então, com clareza, que o efeito do termo *lead* acelera o processo.**

- ✓ **É possível acelerar o sistema até o ponto de haver *overshoot*. Isso acontece quando a constante de tempo *lead* for maior que as duas constantes de tempo *lag*.**

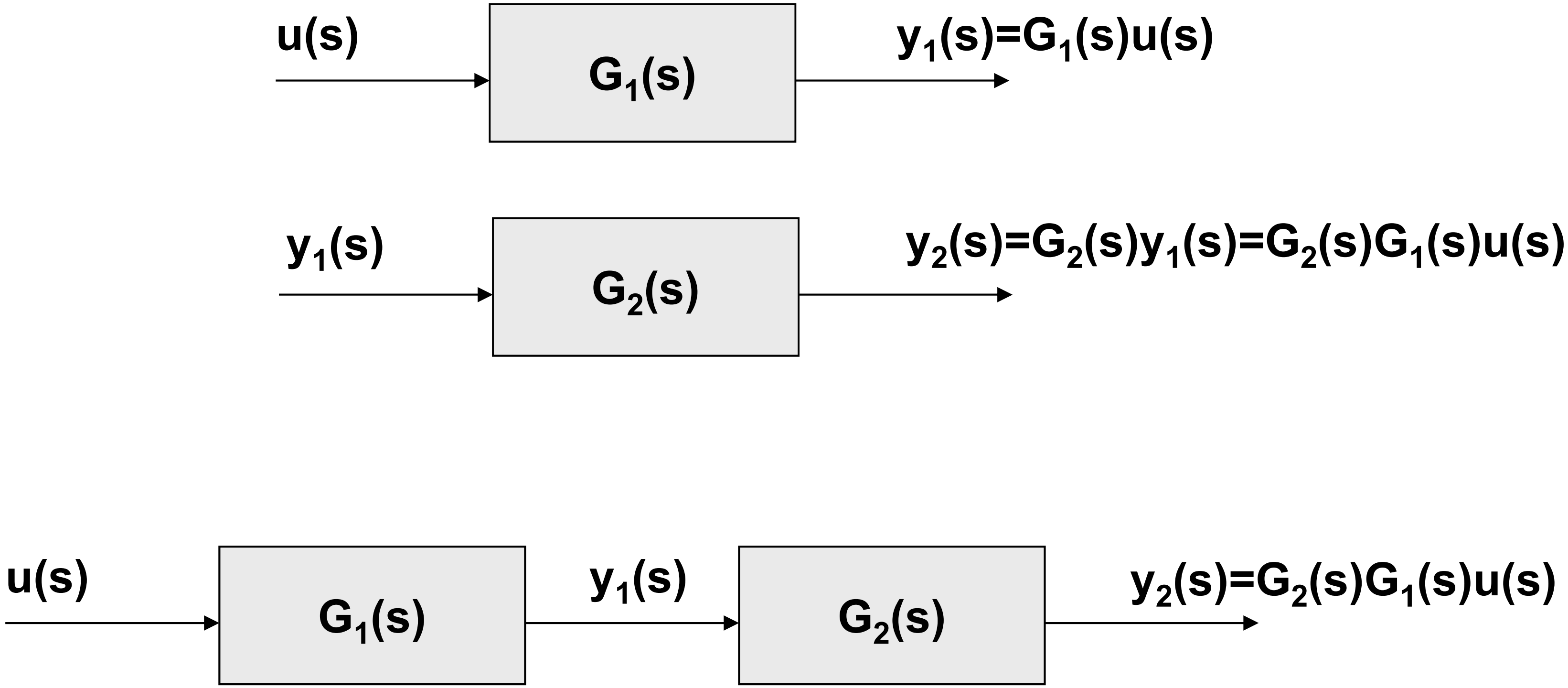
- ✓**Pode-se mostrar que esse sistema tem inclinação inicial não nula:**

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \frac{K\xi_1}{\tau_1\tau_2}$$

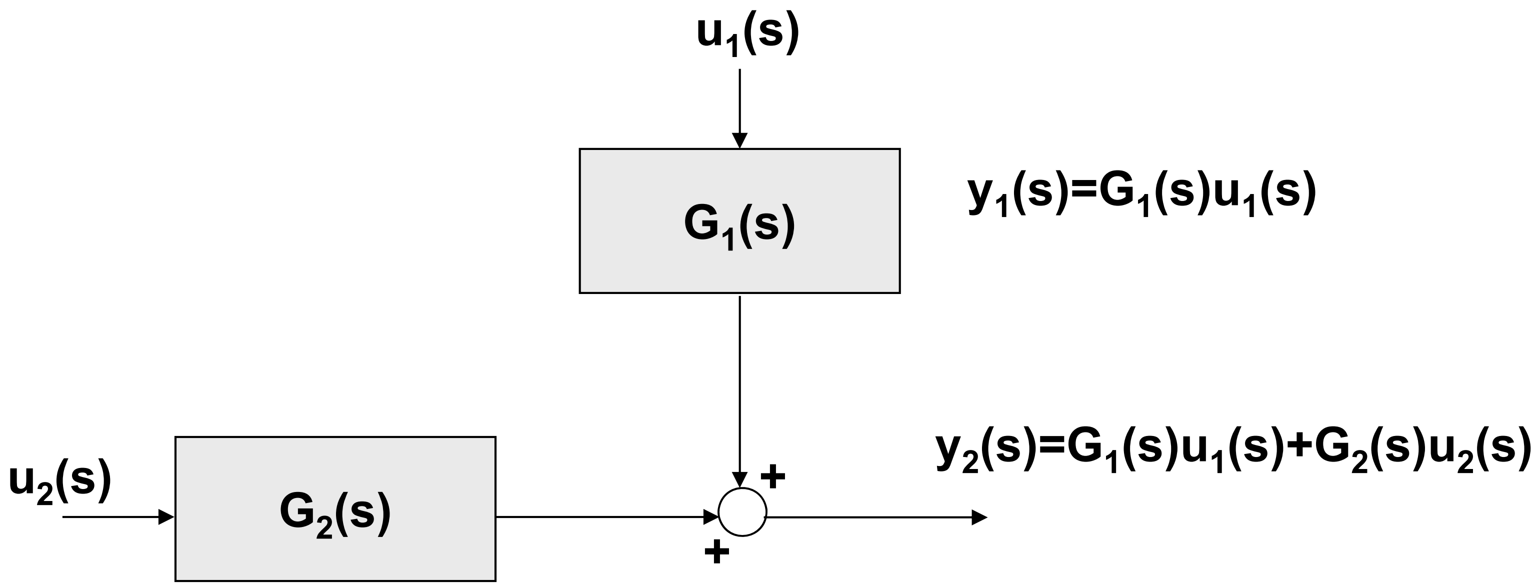
Deve-se observar que a inclinação é positiva quando os sinais de K e ξ_1 forem os mesmos, e negativa quando K e ξ_1 tiverem sinais opostos.

Álgebra de Diagramas de Blocos (Revisão)

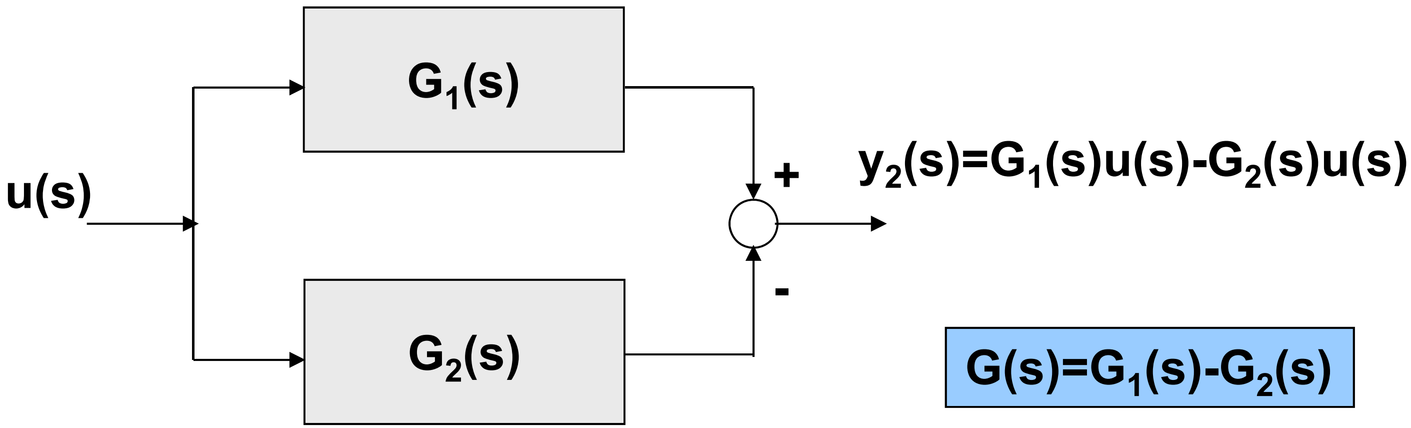
A função de transferência relaciona a resposta de saída de um sistema à perturbação de entrada:



Álgebra de Diagramas de Blocos (Revisão)



Álgebra de Diagramas de Blocos (Revisão)



$$G(s)=G_1(s)-G_2(s)$$

• **Resposta inversa**

Consideremos um sistema cuja função de transferência, G(s), é composta de duas partes:

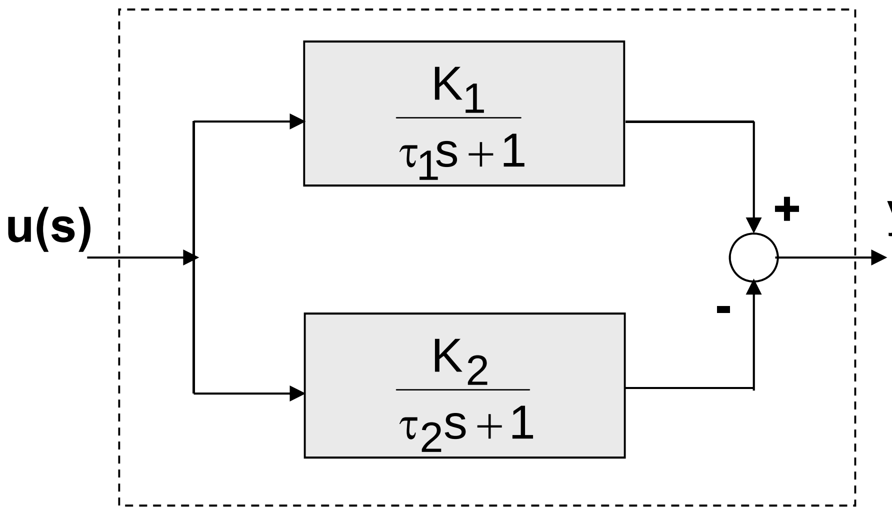
$$G(s) = G_1(s) - G_2(s)$$

modo secundário (opositor)

modo principal

Vamos considerar, em particular, a situação de dois sistemas de primeira ordem:

$$G(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} - \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}, \quad \text{com } K_1 > 0,\ K_2 > 0,\ K_1 > K_2$$



$$\begin{aligned} y(s) &= G(s)u(s) \\ &= G_1(s)u(s) - G_2(s)u(s) \\ &= y_1(s) - y_2(s) \end{aligned}$$

Consideremos, agora, a resposta ao degrau unitário desse sistema. De nosso aprendizado com os sistema de primeira ordem, sabemos que:

$$y(\infty) = K_1 - K_2$$

e como $K_1 > K_2$, essa quantidade é positiva.

<u>Inclinação inicial</u>

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt}$$

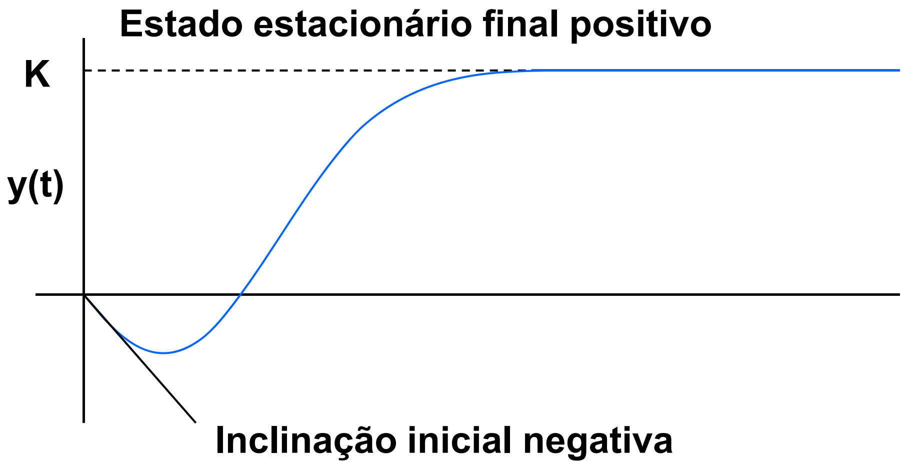
$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \frac{K_1}{\tau_1} - \frac{K_2}{\tau_2}$$

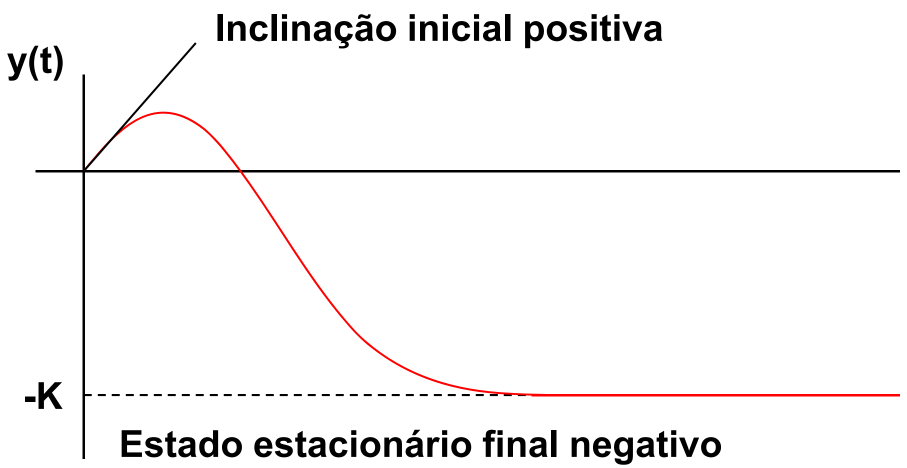
Vamos, agora, admitir que:

$$\frac{K_2}{\tau_2} > \frac{K_1}{\tau_1}$$

Representação gráfica da resposta inversa:



(1)



(2)

Considerações finais dos sistemas com resposta inversa:

✓ **Sistemas cujas respostas ao degrau são caracterizadas por tal inversão inicial (o processo se inicia na "direção errada" que é, a seguir, revertida de modo que o processo segue pela "direção correta") são aqueles que exibem resposta inversa.**

Resposta inversa ocorre como resultado líquido de (pelo menos de dois) modos dinâmicos de magnitudes diferentes, operando em escalas de tempo diferentes. O modo rápido, que deve ter a menor magnitude, é responsável pela resposta inicial "na direção errada"; esse comportamento é, com o tempo, superado pelo modo lento que tem maior magnitude.

✓ **Agora observe que:**

$$G(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} - \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} = \frac{(K_1\tau_2 - K_2\tau_1)s + (K_1 - K_2)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Podemos ver que o sistema acima é um sistema 2,1:

$$G(s) = \frac{K(\xi_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

onde:

$$K = K_1 - K_2$$

$$\xi = \frac{K_1\tau_2 - K_2\tau_1}{K_1 - K_2} = \left(\frac{K_1}{\tau_1} - \frac{K_2}{\tau_2}\right)\frac{\tau_1\tau_2}{(K_1 - K_2)}$$

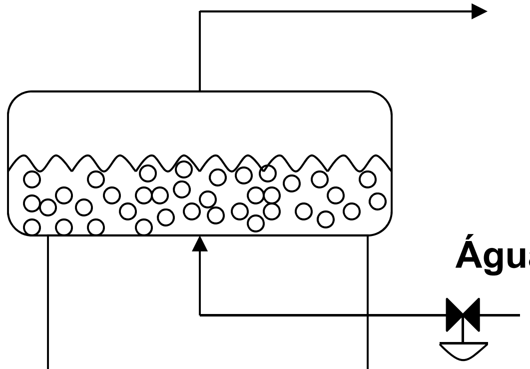
Para obtermos resposta inversa como mostrado na Figura 1, é requerido que K_1, K_2 sejam positivos, $K_1 > K_2$ e também que $K_2/\tau_2 > K_1/\tau_1$. Isso implica que $K>0$ e $\xi<0$.

Alternativamente, a Figura (2) pode ser obtida para $|K_1| > |K_2|$ com K_1 e K_2 negativos e também que $|K_2/\tau_2| > |K_1/\tau_1|$. Isso implica que $K<0$ e $\xi<0$.

Assim, vemos que embora o ganho global do processo possa ter qualquer sinal, $\xi<0$ é um requerimento para resposta inversa de G(s), isto é, G(s) tem que possuir um zero positivo (Right-Half Plane – RHP).

Exemplos de sistemas com resposta inversa:

✓ **Um tambor de vapor:**



✓ **Um refervedor de uma coluna de destilação.**

✓ **Um reator catalítico tubular exotérmico.**