Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE – Programa de Engenharia Química

COQ 790 – ANÁLISE DE SISTEMAS DA ENGENHARIA QUÍMICA

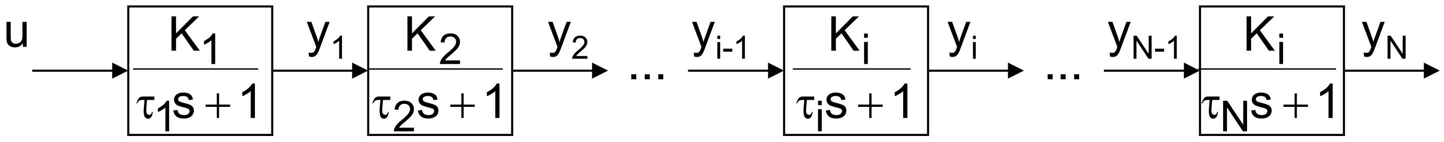
AULA 9:

Dinâmica de Ordem Superior; Efeito de múltiplos zeros; Sistemas com Atraso.

2014/1

Dinâmica de Sistemas de Ordem Superior

Consideremos o caso de N sistemas de primeira ordem em série:



A função de transferência global, para esse processo, é dada por:

$$G(s) = \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{K_i}{\tau_i s + 1} \right)$$

De modo que:

$$y(s) = \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{K_i}{\tau_i s + 1} \right) u(s)$$

Parâmetros característicos:

- Ganhos estáticos combinados: $K = \prod_{i=1}^{N} K_i$
- N constantes de tempo $\tau_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$

Na forma expandida, o denominador da função de transferência fica:

$$G(s) = \frac{K}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

De modo que podemos interpretar o conjunto de N sistemas de primeira ordem em série como um sistema de ordem N, com N pólos dados por:

$$p_i = -\frac{1}{\tau_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

Consideremos, agora, a resposta desse sistema ao **degrau**:

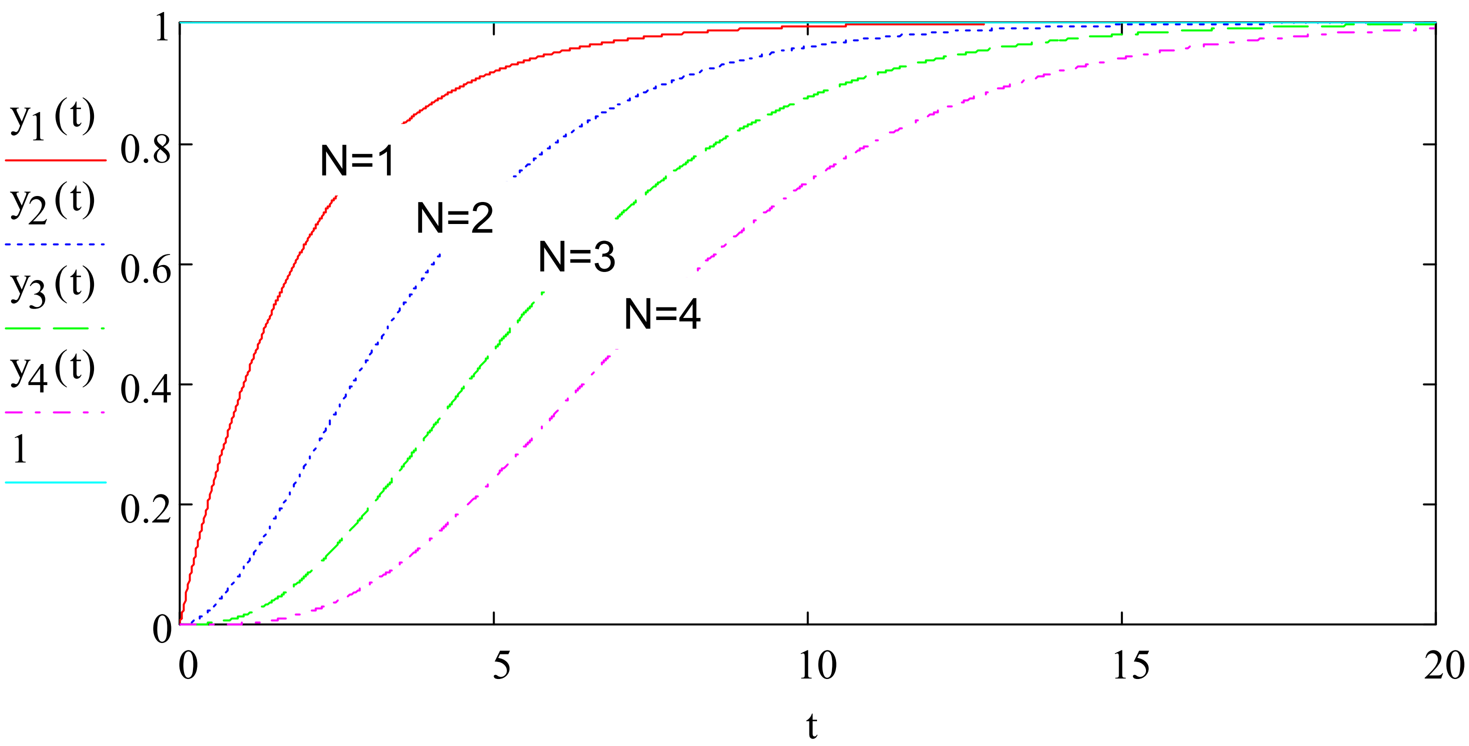
$$y(s) = \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{K_i}{\tau_i s + 1} \right) \frac{1}{s} = K \left(\frac{c_0}{s} + \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\tau_i s + 1} \right) \qquad c_0 = 1, \quad c_i = \lim_{s \to (-1/\tau_i)} \frac{(\tau_i s + 1) G(s)}{K s}$$

No domínio temporal, a resposta fica:

$$y(t) = K \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\tau_i} e^{-t/\tau_i} \right)$$

No Mathcad:

$K_i = 1,\ \tau_i = 2,\ i = 1, 2, \ldots, N$



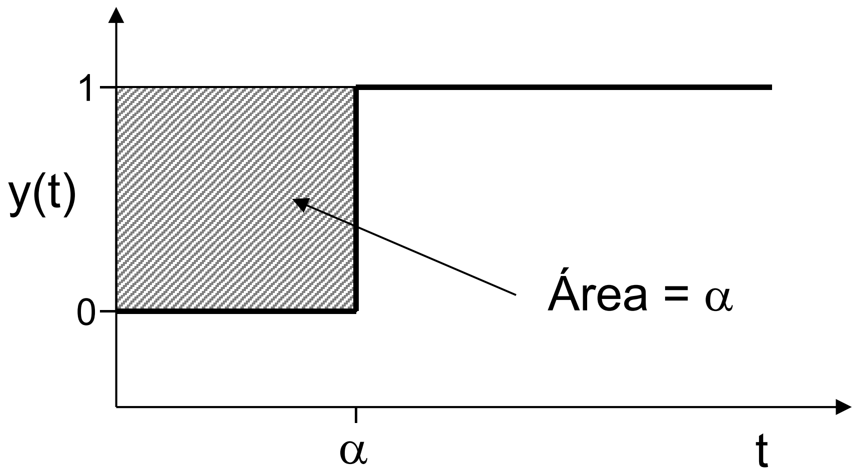
Consideremos, agora, um caso especial:

- Todos os N ganhos estáticos envolvidos iguais a 1;
- Todas as constantes de tempo idênticas;
- Cada constante de tempo igual a α/N.

A função de transferência para esse sistema fica:

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{N}s + 1\right)^N}$$

O que acontece quando $N \to \infty$?   (detalhes mais tarde)



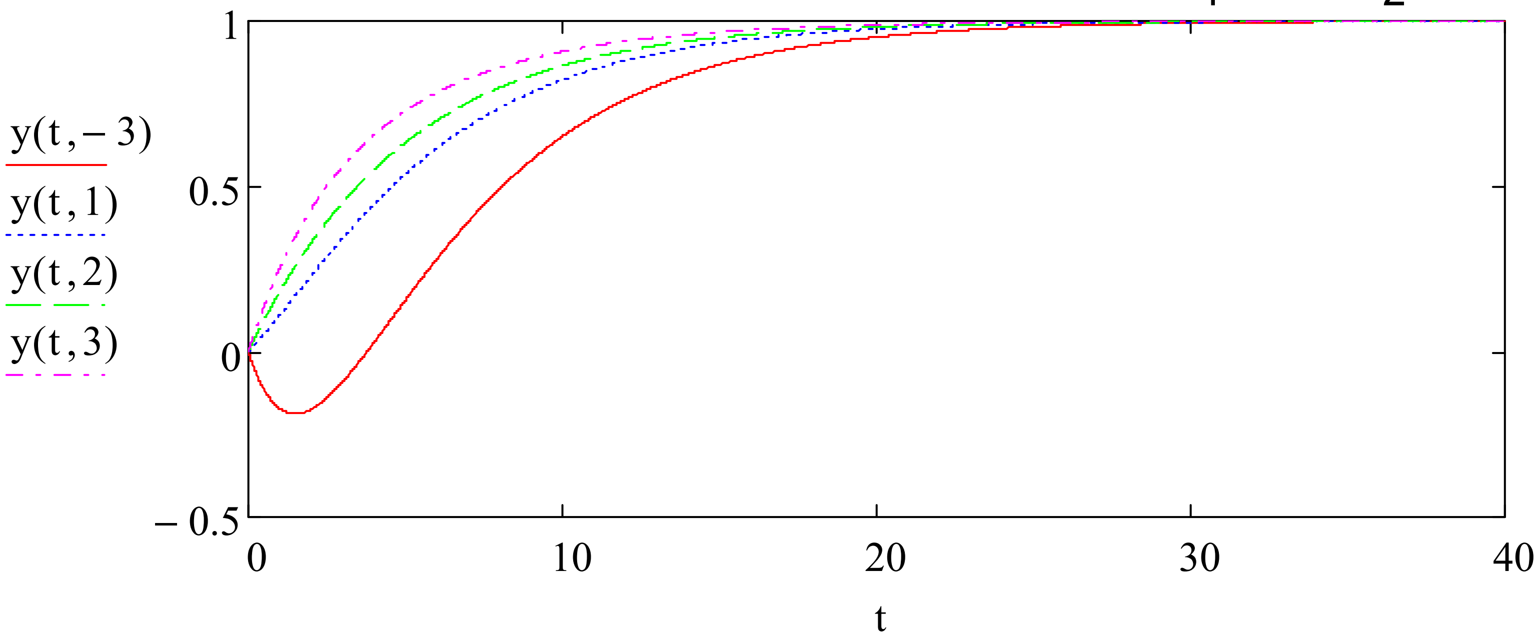
• Zeros Positivos x Zeros Negativos

Consideremos a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K(\eta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Resposta ao degrau unitário:

$K = 1,\ \tau_1 = 2,\ ,\ \tau_2 = 5$



Consideremos, agora, a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K\left(-\eta s+1\right)\left(\xi_1 s+1\right)\left(\xi_2 s+1\right)\cdots\left(\xi_m s+1\right)}{\left(\tau_1 s+1\right)\left(\tau_2 s+1\right)\cdots\left(\tau_n s+1\right)}$$

com $\eta > 0, \xi_i > 0 \ (i = 1,2,\ldots,m), \tau_j > 0 \ (j = 1,2,\ldots,n)$

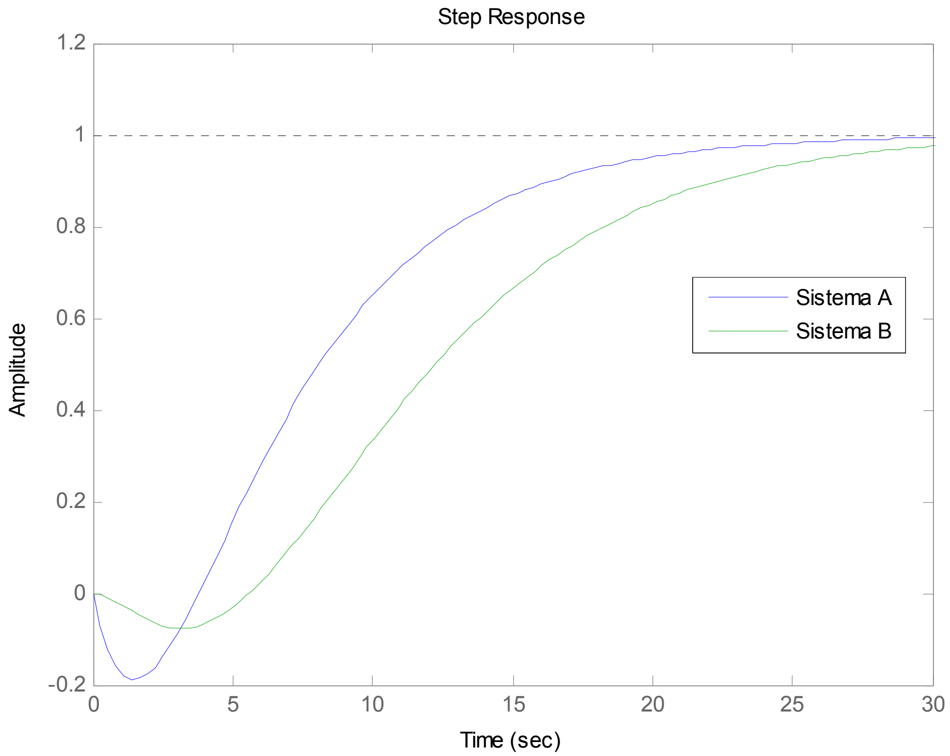
De modo compacto:

$$G(s) = \frac{K\left(-\eta s+1\right)\prod_{i=1}^{m}\left(\xi_i s+1\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(\tau_j s+1\right)}$$

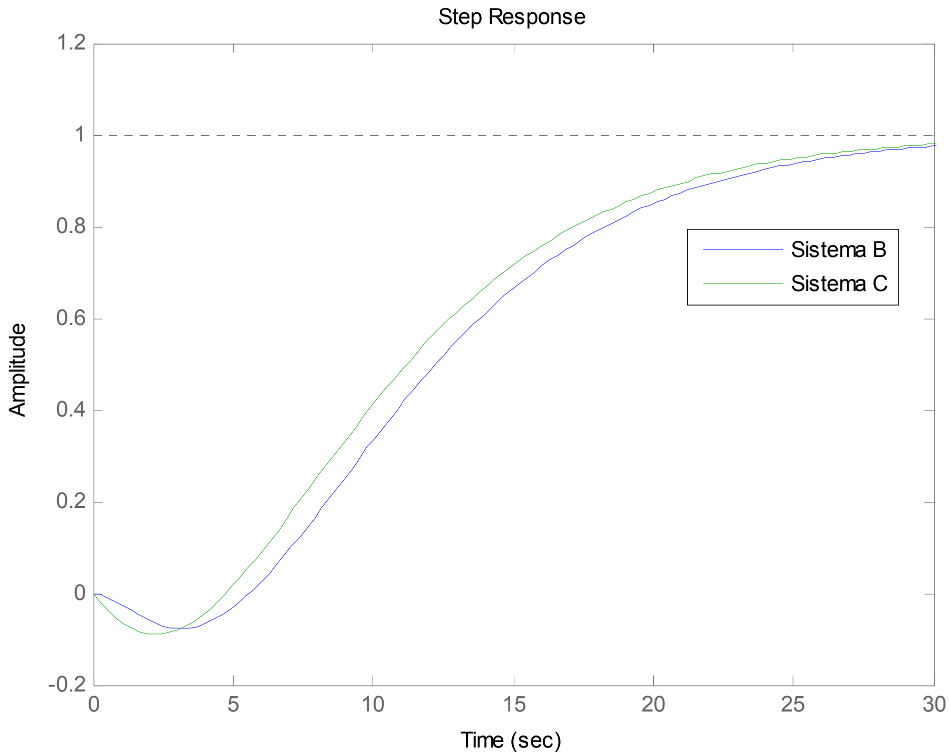
- Sistema A: $$G(s)=\frac{(-3s+1)}{(2s+1)(5s+1)}$$
- Sistema B: $$G(s)=\frac{(-3s+1)}{(2s+1)(5s+1)(4s+1)}$$
- Sistema C: $$G(s)=\frac{(-3s+1)(s+1)}{(2s+1)(5s+1)(4s+1)}$$

No Matlab:

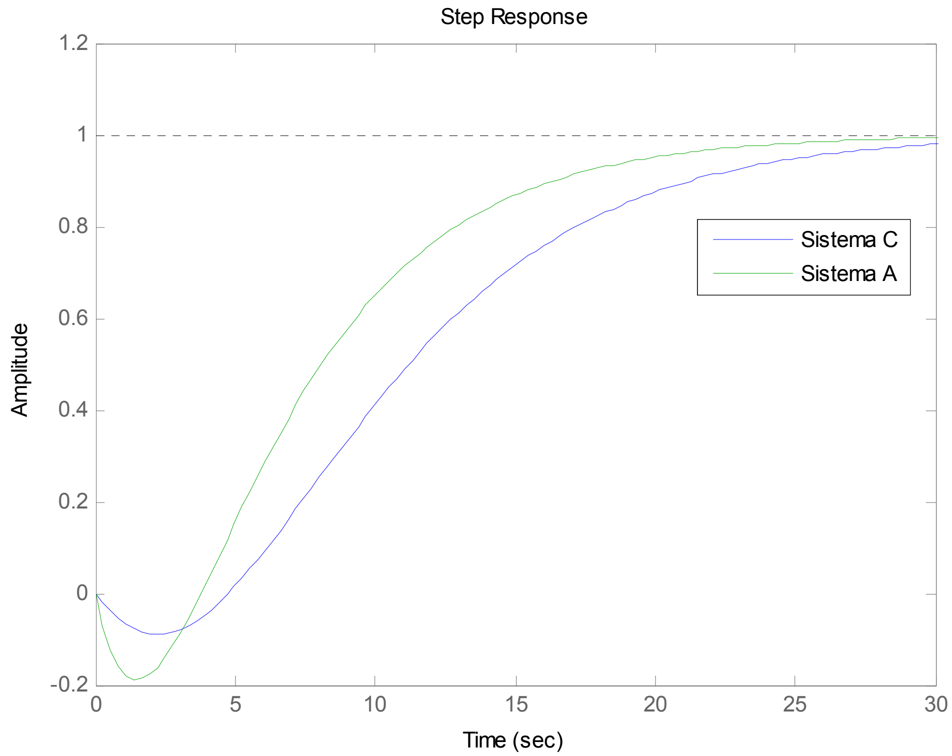
```
>> num = [-3 1];
>> den = [10 7 1];
>> G = tf(num,den)

Transfer function:
   -3 s + 1
----------------
10 s^2 + 7 s + 1

>> step(G)
```



- Sistema A: $$G(s)=\frac{(-3s+1)}{(2s+1)(5s+1)}$$
- Sistema B: $$G(s)=\frac{(-3s+1)}{(2s+1)(5s+1)(4s+1)}$$
- Sistema C: $$G(s)=\frac{(-3s+1)(s+1)}{(2s+1)(5s+1)(4s+1)}$$

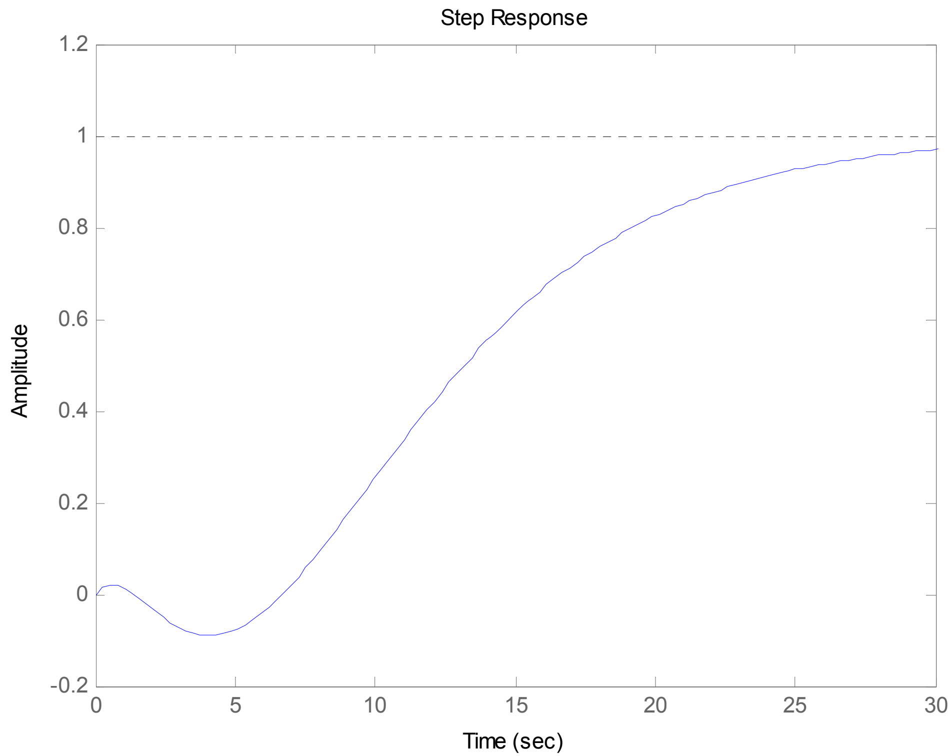


- Sistema A: $$G(s)=\frac{(-3s+1)}{(2s+1)(5s+1)}$$
- Sistema B: $$G(s)=\frac{(-3s+1)}{(2s+1)(5s+1)(4s+1)}$$
- Sistema C: $$G(s)=\frac{(-3s+1)(s+1)}{(2s+1)(5s+1)(4s+1)}$$

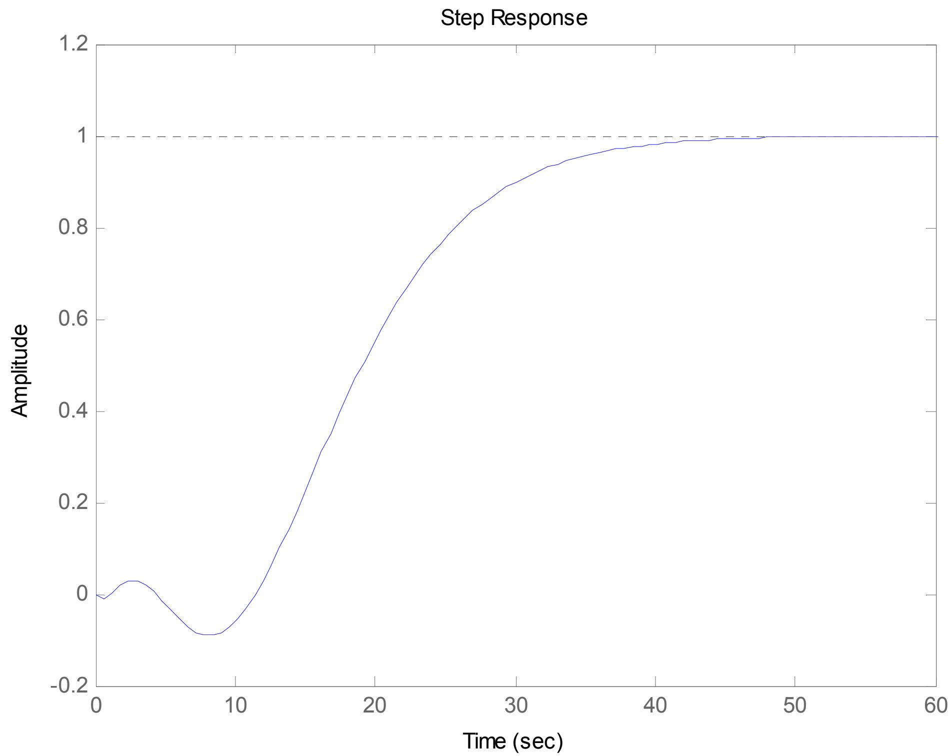


Consideremos, agora, o caso de múltiplos zeros positivos

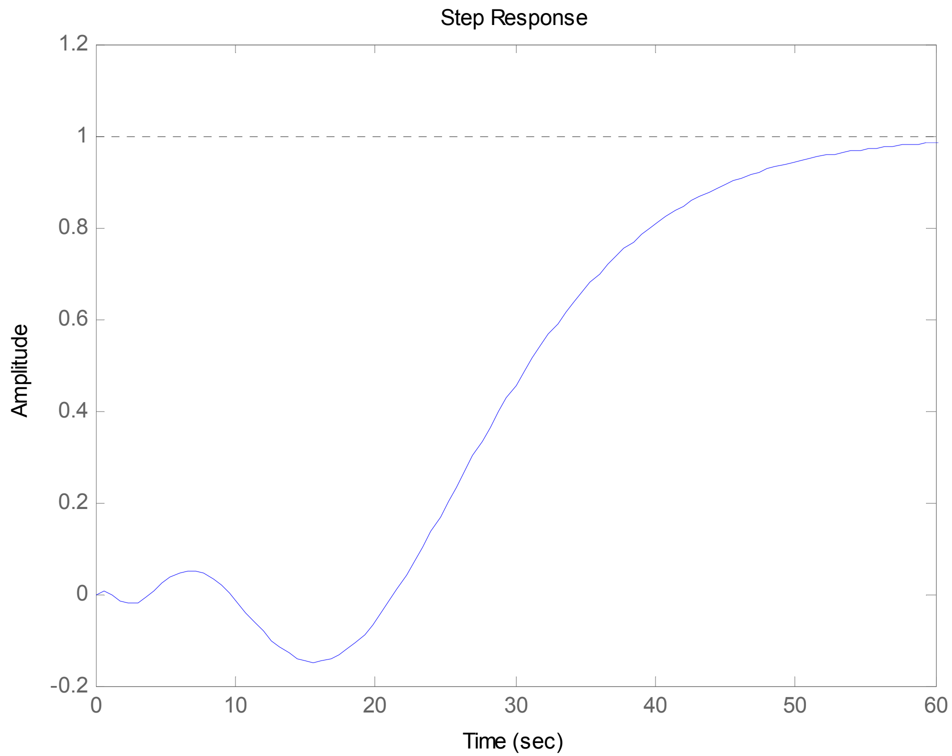
- Sistema D: $$G(s) = \frac{(-3s+1)(-s+1)}{(2s+1)(5s+1)(4s+1)}$$



• Sistema E: $$G(s) = \frac{(-3s+1)(-s+1)(-2.5s+1)}{(2s+1)(5s+1)(4s+1)(3.5s+1)}$$



- Sistema F: $$G(s)=\frac{(-3s+1)(-s+1)(-2.5s+1)(-6s+1)}{(2s+1)(5s+1)(4s+1)(3.5s+1)(7s+1)}$$



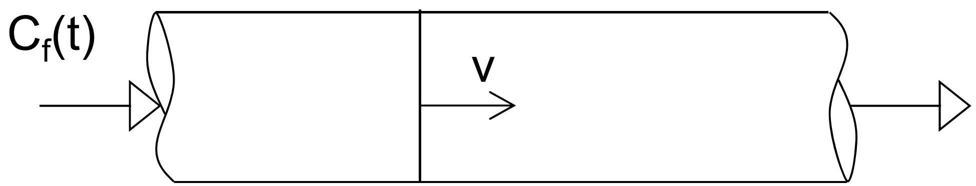
O sistema com um número ímpar de zeros RHP exibe resposta inversa verdadeira no senso que a direção inicial da resposta ao degrau irá sempre ser oposta à direção do estado estacionário final, independente do número de inversões envolvidas nesse processo.

Por outro lado, a porção inicial da resposta ao degrau de um sistema com um número par de zeros RHP exibirá o mesmo número de inversões antes de partir para a direção do estado estacionário final, mas a direção inicial será sempre a mesma desse estado estacionário final (Ray & Ogunnaike, 1994).

Sistemas com Atraso

• Sistemas com Atraso Temporal

Consideremos o seguinte exemplo:



Trata-se do escoamento puramente advectivo em um tubo de comprimento L, cujo fluido escoa com velocidade v. O modelo matemático para esse sistema é:

$$\frac{\partial C(t,z)}{\partial t} + v\frac{\partial C(t,z)}{\partial z} = 0, \quad 0 < z < L, \quad C(t,0) = C_f(t), \quad C(0,z) = 0$$

No domínio de Laplace o modelo fica:

$$C(s,z) = e^{-\frac{z}{v}s} C_f(s)$$

Na saída do tubo teremos:

$$C(s,L) = e^{-\frac{L}{v}s} C_f(s) \quad \Rightarrow \quad y(s) = e^{-\theta s} u(s)$$

onde θ é o tempo de residência médio. A conversão direta para o domínio temporal resulta em:

$$y(t) = u(t - \theta)$$

indicando que a resposta de saída é exatamente igual à perturbação de entrada, apenas atrasada θ unidades de tempo!

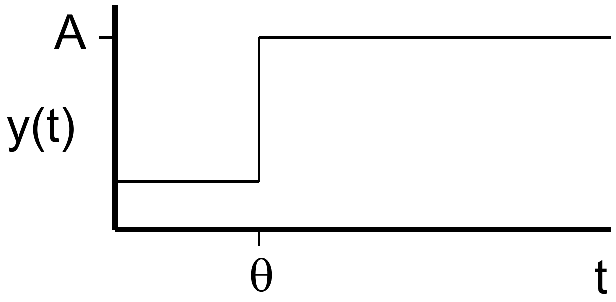
Sistemas com atraso puro são, portanto, aqueles com a seguinte função de transferência:

$$g(s) = e^{-\theta s}$$

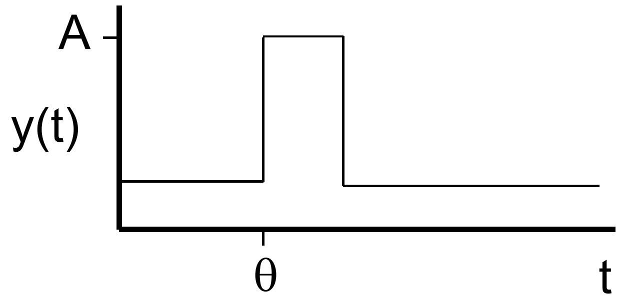
onde θ indica a magnitude do atraso.

Respostas de sistema de atraso puro a perturbações típicas:

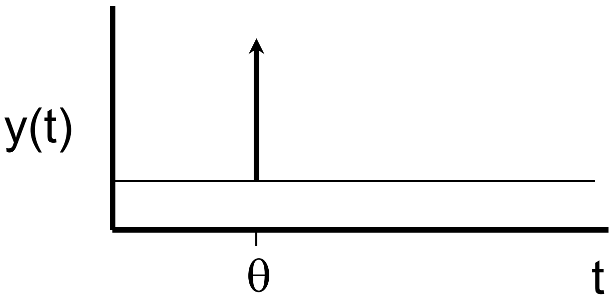
✓ Degrau:



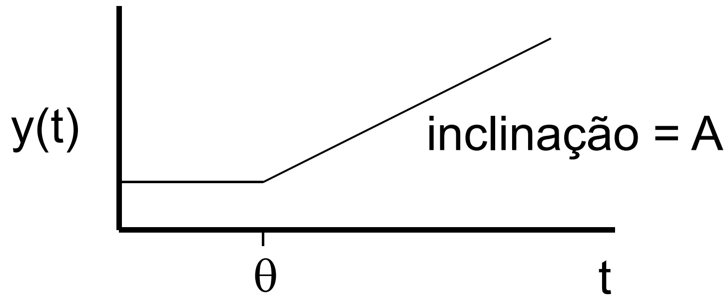
✓ Pulso:



✓ Impulso:



✓ Rampa:



Função de transferência de N sistemas de primeira ordem em série:

$$G_N(s) = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{N}s+1\right)^N}$$

$e = 2.718$

$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$

$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 2.488$

$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2.594$

$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2.705$

de modo que:

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} G_N(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{N}s+1\right)^N}}$$

Agora observe que:

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \Longrightarrow e^{-\alpha} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\alpha m}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\alpha m}}$$

Fazendo N=αm:

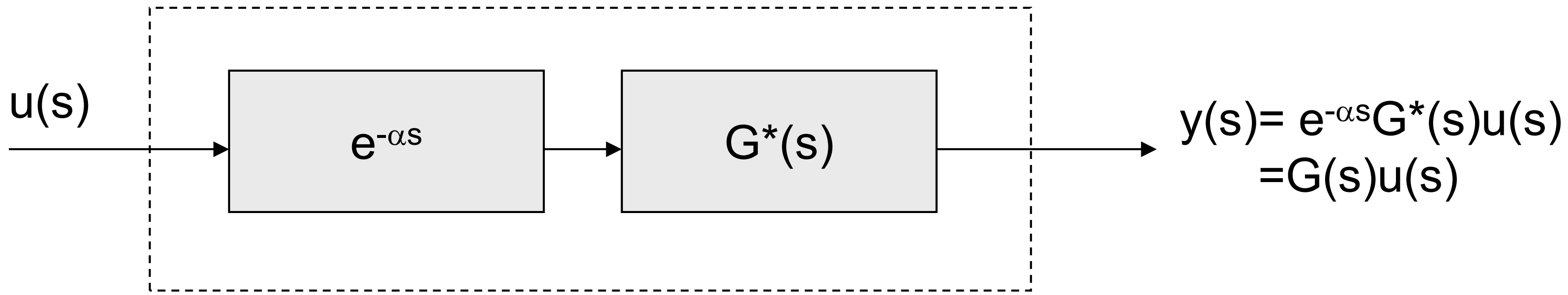
$$e^{-\alpha} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{N}\right)^N} \Longrightarrow \boxed{e^{-\alpha s} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{N}s+1\right)^N}}$$

Portanto:

$$\lim_{N\to\infty} G_N(s) = e^{-\alpha s}$$

O sistema com atraso puro, α, é obtido no caso limite de uma sequência de N sistemas de primeira ordem idênticos (cada um com constante de tempo α/N) conectados em série, quando $N\to\infty$.

Interpretação de um atraso em termos de funções de transferência:



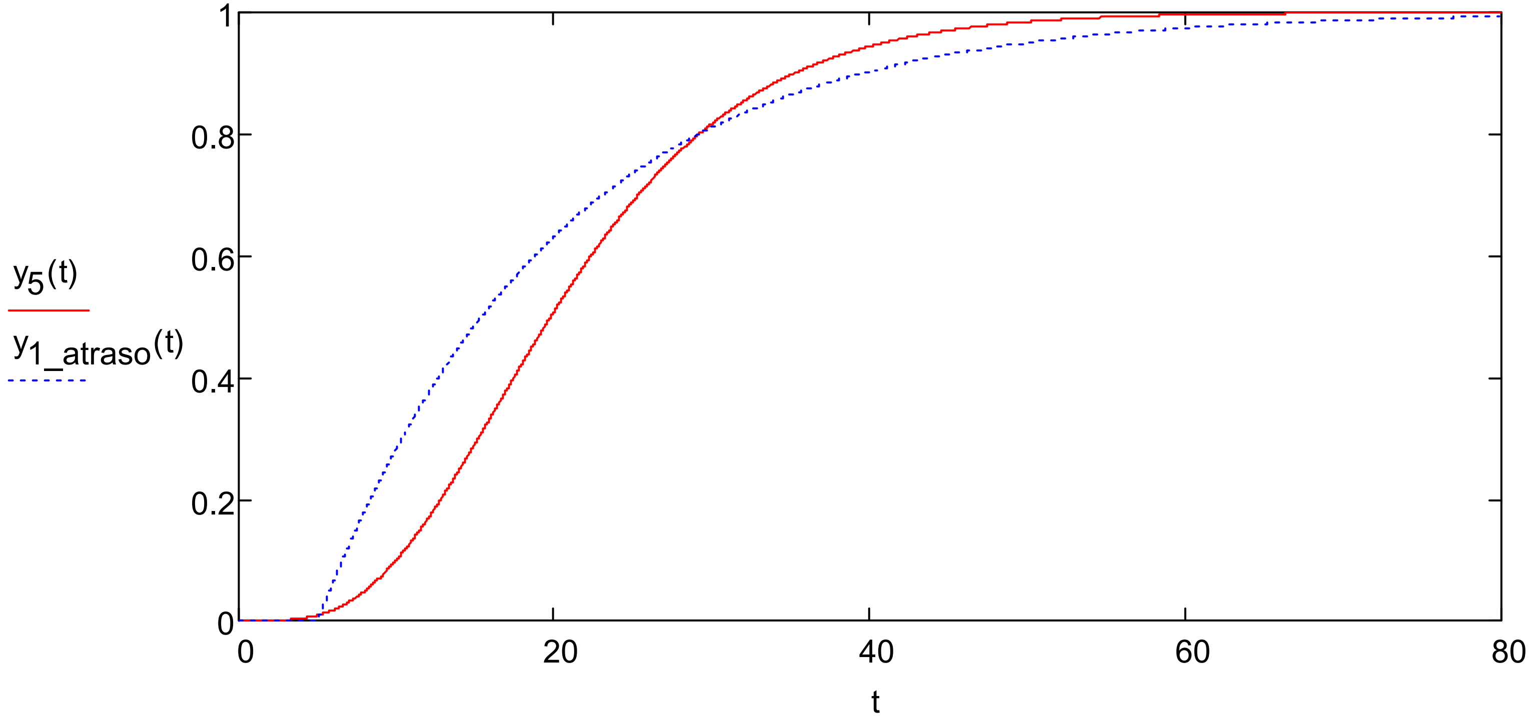
$$G(s) = \frac{Ke^{-\alpha s}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

Caso geral

$$G(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\xi_i s + 1)e^{-\alpha s}}{\prod_{i=1}^{n}(\tau_i s + 1)}$$

Exemplo:

$$G_2(s) = \frac{1}{(3s+1)(5s+1)(4s+1)(3.5s+1)(7s+1)} \qquad G_{1+atraso}(s) = \frac{e^{-5s}}{15s+1}$$



Aproximações racionais para $e^{-\alpha s}$

As aproximações mais usadas são aquelas de Padé, com a forma geral:

$$e^{-\alpha s} \approx \frac{a_p(\alpha s)^p + a_{p-1}(\alpha s)^{p-1} + \ldots + a_0}{b_q(\alpha s)^q + b_{q-1}(\alpha s)^{q-1} + \ldots + b_0}$$

onde p, q, a_i (i=1,...,p) e b_j (j=1,...,q) escolhidos de modo a melhor aproximar a exponencial.

A expansão em série de Taylor pode ser usada mas, para representar bem, necessita de muitos termos:

$$e^{-\alpha s} = 1 - \alpha s + \frac{(\alpha s)^2}{2!} - \frac{(\alpha s)^3}{3!} + \ldots$$

As aproximações de Padé mais usadas são as de primeira, segunda e terceira ordens:

$$e^{-\alpha s} \approx \frac{1-\frac{\alpha}{2}s}{1+\frac{\alpha}{2}s}$$

$$e^{-\alpha s} \approx \frac{1-\frac{\alpha}{2}s+\frac{\alpha^2}{12}s^2}{1+\frac{\alpha}{2}s+\frac{\alpha^2}{12}s^2}$$

$$e^{-\alpha s} \approx \frac{1-\frac{\alpha}{2}s+\frac{\alpha^2}{10}s^2-\frac{\alpha^3}{120}s^3}{1+\frac{\alpha}{2}s+\frac{\alpha^2}{10}s^2+\frac{\alpha^3}{120}s^3}$$