3 REPRESENTAÇÃO E/S NO DOMÍNIO DO TEMPO

3.1 Tempo Contínuo - Integral de Convolução

Consideramos sistemas monovariáveis

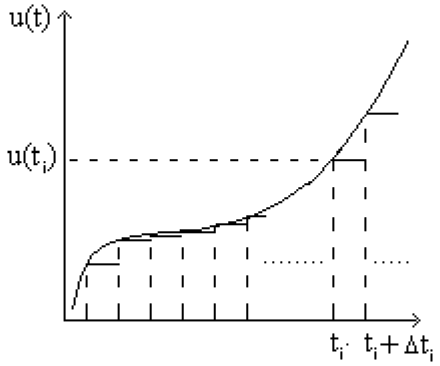
lineares (ou linearizados), invariantes e inicialmente em estado estacionário.

Podemos expressar o comportamento destes sistemas através de um modelo da forma,

$y(t) = H\left[u(t)\right]$

onde $H\left[\cdot\right]$ representa o operador que dá o vínculo entre a entrada e a saída do sistema.

Uma função u(t) qualquer pode ser aproximada por uma série de funções **pulso unitário** δ_Δ (t), conforme mostrado na figura abaixo,



segundo a equação

$$u(t) \cong \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(t_i)\ \delta_\Delta (t - t_i)\Delta t$$

onde

$$
\delta_{\Delta}\left(t-t_i\right)=\begin{cases} 0 & \text{para} \quad t<t_i \\ \dfrac{1}{\Delta t} & \text{para} \quad t_i \le t < t_i+\Delta t \\ 0 & \text{para} \quad t \ge t_i+\Delta t \end{cases}
$$

Confirma-se a validade desta aproximação ao calcular o valor da função nos tempos t_i. Por exemplo, seja $t=t_2$; $\delta_\Delta(t\text{-}t_i)$ será zero para todo tempo, menos para $t_2 \le t < t_2+\Delta t$, onde vale $\dfrac{1}{\Delta t}$. Então:

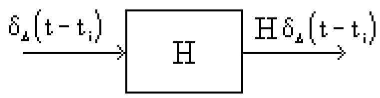
$$
u(t_2) = \ldots\ u(t_1) * 0 + u(t_2)\frac{1}{\Delta t} * \Delta t + u(t_3) * 0 + \ldots
$$

$$
u\left(t_2+\tau\right)=u\left(t_2\right) \quad \text{para } \tau<\Delta t
$$

Por outro lado a aproximação é uma **combinação linear** das funções $\delta_\Delta(t-t_i)$ com coeficientes $u(t_i)\Delta t$. substituindo no operador $H[\cdot]$

$$
y(t) \cong H\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta_\Delta(t-t_i)\ u(t_i)\ \Delta t\right]
$$

Como o sistema é **linear**, pelo **princípio da superposição** a saída é a mesma combinação linear das respostas às entradas individuais que foram combinadas; isto é, das $H\left[\delta_\Delta\left(t-t_i\right)\right]$, que são as respostas às funções pulso unitário que entram no tempo t_i.



O resultado é

$$
y(t) \cong \sum_{i=-\infty}^{\infty} H\left[\delta_\Delta(t-t_i)\right] u(t_i)\,\Delta t
$$

onde $H\left[\delta\left(t-t_i\right)\right]$ é a resposta do sistema à função pulso unitário

Reduzindo o intervalo Δt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \delta_\Delta (t - t_i) = \delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 \text{ para } t \neq \tau \\ \infty \text{ para } t = \tau \end{cases}$$ Função impulso unitário (**Delta de Dirac**)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H[\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau$$

A **resposta impulsional** do sistema é indicada

$$g(t, \tau) = H[\delta(t - \tau)].$$

Observar a presença de dois argumentos nesta função.

Como o sistema é **invariante no tempo** $g(t, \tau) = g(t - \tau)$

Considerando que os sinais são nulos para $t \leq 0$ e que sistemas reais não podem responder antes do sinal ter entrado, ou seja, sistemas causais:

$$\boxed{y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau}$$

Assim $H(\cdot) = \int_0^t g(t-\tau)(\cdot)d\tau$

Fazendo $\mu = t - \tau \Rightarrow d\tau = -d\mu$

para $\tau = 0 \quad \mu = t$

para $\tau = t \quad \mu = 0$

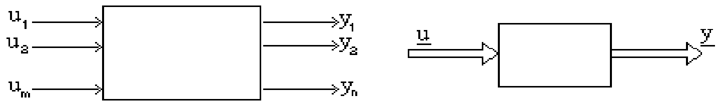
vem

$$y(t) = \int_t^0 g(\mu)\, u(t-\mu)\, [-d\mu]$$

$$\boxed{y(t) = \int_0^t g(\mu)\, u(t-\mu)\, d\mu}$$

In mathematics and in particular, functional analysis, **convolution** is a mathematical operator which takes two functions *f* and *g* and produces a third function that in a sense represents the amount of overlap between *f* and a reversed and translated version of *g*. A convolution is a kind of very general **moving average**, as one can see by taking one of the functions to be an indicator function of an interval.

Para sistemas **multivariáveis**



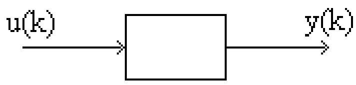
$$\underline{y}(t) = \int_0^t \underline{\underline{G}}(t-\tau)\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$$

com

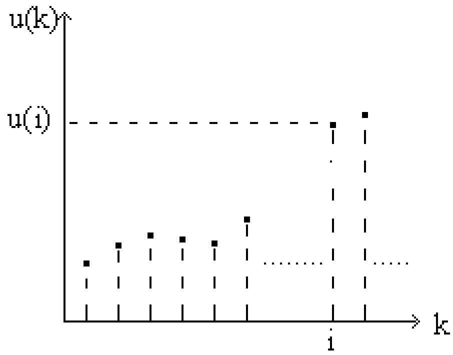
$$\underline{\underline{G}}(t-\tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t-\tau) & \dots & g_{1m}(t-\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(t-\tau) & \dots & g_{nm}(t-\tau) \end{bmatrix}$$

3.2 Tempo Discreto - Somatório de Convolução

Para sistemas discretos no tempo, a descrição do comportamento vem dada por **sequências** no lugar de **funções**; u(k), y(k), k=1, 2, ...



Para uma sequência qualquer:



$$u(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i)\,\delta_i(k)$$

A sequência **Delta de Kronecker** é tal que

$$\delta_i(k) = \begin{cases} 1 \text{ para } k = i \\ 0 \text{ para } k \neq i \end{cases}$$

Considerando o sistema linear e usando o princípio da superposição

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} H\left[\delta_i(k)\right] u(i)$$

$H\left[\delta_i(k)\right]$ representa a resposta do sistema, no tempo k, ao impulso de Kronecher que entra no tempo i, normalmente indicada como h(k-i). Assim, para **sistema causal** (ou fisicamente realizável, onde a saída é função apenas de entradas presente e passadas), respondendo a sinal a partir de k=0

$$\boxed{y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(k-i)\,u(i)}$$

$h_i(k)$: resposta pulso ou sequência ponderada

Outras formas

$$\boxed{y(k) = \sum_{j=0}^{k} h(j)\,u(k-j)} \quad \text{ou} \quad \boxed{y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)\,u(k-j)}$$

Esta última forma leva em conta que se as entradas são nulas para tempo negativo, não faz diferença o limite ∞.

Para um sistema contínuo no tempo, **amostrado** com intervalo de amostragem Ta:

$$\boxed{y(kT_a) = \sum_{j=0}^{k} g(jT_a)\,u\left[(k-j)T_a\right]} \quad \text{ou} \quad \boxed{y(kT_a) = \sum_{j=0}^{\infty} g(jT_a)\,u\left[(k-j)T_a\right]}$$