

4 REPRESENTAÇÃO E/S NO DOMÍNIO TRANSFORMADO

(funções de transferência)

4.1 Transformada de Laplace

É um operador linear, que opera sobre funções de variável contínua positiva, definido por:

$$L[f(t)] = f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Nota: $f(s)$ é uma função diferente de $f(t)$!!!!

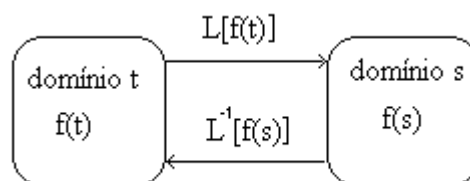
No nosso caso a variável contínua será o tempo.

A operação inversa é única e tem a forma

$$f(t) = L^{-1}[f(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{st} f(s) ds \quad i = \sqrt{-1}$$

Trata-se de uma integral de linha no plano complexo. Este tipo de integrais pode ser calculado usando resultados do **teorema dos resíduos**.

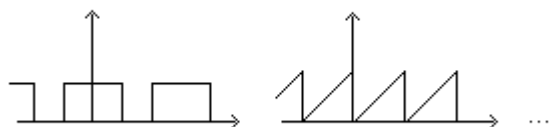
De formas esquemática a operação de transformação pode ser indicada da forma:



Relação com a transformada de Fourier

Estudamos a Transformada de Fourier para encontrar-mos uma interpretação física da transformada de Laplace.

Seja uma função periódica de período T:



$$f^p(t) = f^p(t + j \cdot T) \quad j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Ela pode ser desenvolvida em **série de Fourier**,

$$f^p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência (em radianos por unidade de tempo) com que se repete a forma básica da função.

Os coeficientes são calculados segundo

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^p(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^p(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^p(t) \sin(k\omega t) dt$$

Observar que estes coeficientes são funções de múltiplos da frequência básica:
 $a_k = a_k(k\omega)$; $b_k = b_k(k\omega)$.

Uma outra forma (a forma exponencial) pode ser obtida para a série de Fourier se senos e cosenos forem substituídos usando as **identidades de Euler** derivadas da **formula de Euler de análise complexa**:

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

$$f^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(i\omega_k) e^{i\omega_k t} \quad \omega_k = k \cdot \omega$$

Com os coeficientes, que são funções complexas de múltiplos da frequência básica, dados por:

$$f(i\omega_k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^p(t) e^{-i\omega_k t} dt$$

Dada uma função periódica $f^p(t)$, a função $f(i\omega_k)$ é sua **transformação** ao domínio da frequência discreta ω_k .

É interessante observar que a função transformada representa (no campo complexo) as amplitudes de termos oscilatórios de diferentes frequências.

Uma função **não periódica** é o limite de uma função periódica, com o período tendendo a infinito; $T \rightarrow \infty$.

Podemos escrever a função periódica assim:

$$f^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^p(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau \right] e^{i\omega_k t} * \frac{\Delta \omega_k}{\Delta \omega_k}$$

$$\text{onde } \Delta \omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = (k+1)\omega - k\omega = \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Assim

$$f^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^p(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau \right] e^{i\omega_k t} \frac{\Delta \omega_k}{\frac{2\pi}{T}}$$

Então

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f^p(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau e^{i\omega t} d\omega$$

ou

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

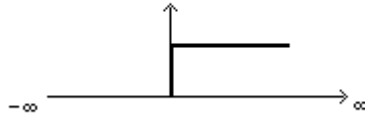
$$f(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Transformada de Fourier

A existência desta última integral está condicionada a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Esta condição não é satisfeita por muitas funções de interesse prático (por exemplo, o degrau).



Se as funções que não satisfazem a convergência exigida forem multiplicadas por uma exponencial negativa.

$$f(t) e^{-at}$$

a convergência estará satisfeita para algum valor do parâmetro “a” e, então, pode ser calculada a transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-at} e^{-i\omega t} dt$$

Considerando só tempo positivo e definindo a variável complexa $s=a+i\omega$, o resultado é a transformada de Laplace de $f(t)$:

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

O parâmetro “a” é chamado de **abscissa de convergência**.

Existem tabelas muito completas de transformada de Laplace. Os pares transformados de maior interesse, em termos da análise de processos, são:

função	f(t)	f(s)
impulso unitário	$\delta(t)$	1
degrau	A	$\frac{A}{s}$
rampa	rt	$\frac{r}{s^2}$
exponencial	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
	$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^k}$
seno	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$
tempo morto	$f(t - t_d)$	$e^{-t_d s} f(s)$

Algumas propriedades de interesse

- transformada de uma integral de convolução

$$L \left[\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right] = f(s) g(s)$$

- teorema do valor inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot f(s)$$

- teorema do valor final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot f(s)$$

- transformada da integral de uma função (entre 0 e t)

$$L \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} f(s)$$

- transformada da derivada de ordem n de uma função

$$L \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n f(s) - s^{n-1} f(t) \Big|_{t=0} - s^{n-2} \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0} - \dots - s \frac{d^{n-2} f(t)}{dt^{n-2}} \Big|_{t=0} - \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0}$$

Exemplo de solução de equações diferenciais

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) + y(t) = e^{-3t} \quad x(0) = 1$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + 4x(t) = 0 \quad y(0) = 0$$

Transformando com a transformada de Laplace:

$$s \cdot x(s) - x(0) + x(s) + y(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$s \cdot y(s) - y(0) + y(s) + 4 \cdot x(s) = 0$$

Nesta última equação, usando $y(0) = 0$,

$$(s+1) \cdot y(s) = -4 \cdot x(s) \Rightarrow y(s) = \frac{-4}{s+1} \cdot x(s)$$

Substituindo na anterior

$$s \cdot x(s) - 1 + x(s) - \frac{4}{s+1} \cdot x(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$x(s) = \frac{1 + \frac{1}{s+3}}{s+1 - \frac{4}{s+1}} = \frac{(s+4) \cdot (s+1)}{(s^2 + 2s - 3) \cdot (s+3)} = \frac{(s+4) \cdot (s+1)}{(s-1) \cdot (s+3)^2} = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^3 + 5s^2 + 3s - 9}$$

$$x(t) = L^{-1}[x(s)]$$

4.2 Transformada Z

É um operador linear, que opera sobre seqüências de variável discreta positiva, definido por

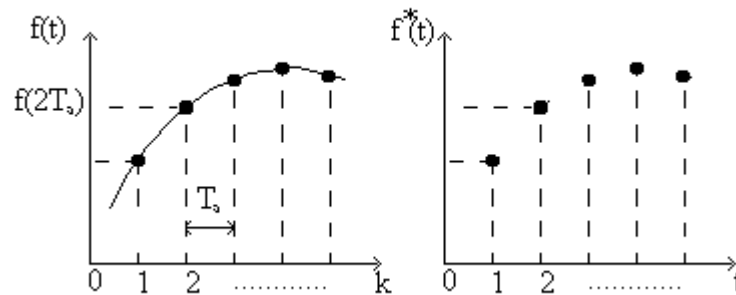
$$Z[f(k)] = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \quad \text{série de potências negativas de } z$$

A operação inversa é

$$f(k) = Z^{-1}[f(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) z^{k-1} dz$$

Relação com a transformada de Laplace

Seja uma função contínua no tempo, amostrada a cada T_a unidades de tempo (gera uma seqüência)



O processo de amostragem é, por conveniência, representado por uma operação envolvendo uma série de funções delta de Dirac ponderadas (uma idealização), seguida pelo tratamento desta série com uma função que mantém os valores da série constantes entre dois tempos de amostragem.

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_a) \delta(t - kT_a)$$

$$\int_{kT_a^-}^{kT_a^+} f^*(t) dt = f(kT_a) \quad \left(\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau) \cdot d\tau = 1 \right)$$

Transformando com a transformada de Laplace

$$f^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_a) e^{-kT_a s}$$

Fazendo $z = e^{-T_a s}$ e deixando implícito T_a

$$f^*(s) \Big|_{z=e^{-T_a s}} = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

A transformada z de uma seqüência é obtida amostrando a função contínua que gera a seqüência, transformando por Laplace e fazendo $\boxed{z = e^{-T_a s}}$.

Como $s = a + i\omega$ é uma variável complexa, z também é: $z = e^{-a T_a} e^{-i\omega T_a} = \rho e^{i\Phi}$

Existem extensas tabelas de pares transformados, sendo os principais:

função (seqüência)	f(k)	f(z)
impulso unitário	$\delta_0(k)$	1
degrau	A	$\frac{A}{1-z^{-1}}$
rampa	rkTa	$\frac{rTaz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
exponencial	e^{-aT_k}	$\frac{1}{1-e^{-aT_a}z^{-1}}$
potência	$(\gamma^{T_a})^k \quad [\gamma = e^{-a}]$	$\frac{1}{1-\gamma^{T_a}z^{-1}}$
	$e^{-akT_a} \cos(\omega kT_a)$	$\frac{1-e^{-aT_a}z^{-1}\cos(\omega T_a)}{1-2e^{-aT_a}z^{-1}\cos(\omega T_a)+e^{-2aT_a}z^{-2}}$

Algumas tabelas estão em potências positivas de z.

$$\frac{A \cdot z}{z-1} = \frac{A}{1-z^{-1}}$$

Algumas propriedades de interesse

- Teorema da translação real

$$Z[f(k-n)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n) \cdot z^{-k}$$

Substituindo (k-n) por m temos

$$k = n + m$$

se $k = 0$, então $m = -n$

se $k = \infty$ então $m = \infty$

Então

$$Z[f(k-n)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n) \cdot z^{-k} = \sum_{m=-n}^{\infty} f(m) \cdot z^{-(n+m)} = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} f(m) \cdot z^{-(m)} =$$

$$z^{-n} \left[\sum_{m=-n}^{-1} f(m) \cdot z^{-(m)} + \sum_{m=0}^{\infty} f(m) \cdot z^{-(m)} \right] = z^{-n} \left[\sum_{k=1}^n f(-k) \cdot z^k + f(z) \right]$$

No caso em que os valores de f(k) são zero para $k < 0$,

$$Z[f(k-n)] = z^{-n} \cdot f(z)$$

Por outro lado

$$Z[f(k+n)] = z^n \left[f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)z^{-k} \right]$$

- Teorema da translação complexa

$$Z[e^{\mp a.k.T_a} f(k)] = f(ze^{\pm a.T_a}) = f(z)_{z \equiv z \cdot e^{\pm a.T_a}}$$

- Teorema do valor inicial

$$f(k)_{k=0} = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$$

- Teorema do valor final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) f(z)$$

Exemplo de solução de equações de diferenças finitas

$$x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0 \quad x(0) = 0 \quad ; \quad x(1) = 1$$

Usando a transformada z

$$z^2 \left[x(z) - \underbrace{x(0)}_1 - \underbrace{x(1)}_1 z^{-1} \right] + 3z \cdot [x(z) - x(0)] + 2 \cdot x(z) = 0$$

$$x(z)(z^2 + 3z + 2) = z$$

$$x(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z+1) \cdot (z+2)} = \frac{z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1+z^{-1}) \cdot (1+2z^{-1})}$$

4.3 Inversão de Funções Transformadas

Transformada de Laplace Inversa

Para a transformada de Laplace, o método mais popular para se determinar a função inversa é o da **expansão em frações parciais**. Em geral, para os casos de interesse, as funções cujas transformadas inversas se desejam calcular se apresentam na forma de um cociente de polinômios

$$f(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Se as raízes de $D(s)=0$ forem $p_1, p_2, \dots, p_n$, o polinômio denominador pode ser escrito na forma fatorada:

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$$

Assim

$$f(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Esta equação pode ser escrita na forma de uma expansão em frações parciais que, no caso de raízes distintas é:

$$f(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

Os coeficientes c_i devem ser determinados de tal forma que os dois lados da equação sejam iguais. Usando a propriedade de linearidade da transformada de Laplace, a determinação da transformada inversa se reduz à soma das transformadas inversas de funções simples:

$$f(t) = L^{-1}[f(s)] = c_1 \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s - p_1}\right) + c_2 \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s - p_2}\right) + \dots + c_n \cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s - p_n}\right)$$

No caso

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s - p_i}\right) = e^{p_i t}$$

Determinação dos Coeficientes c_i

As "n" raízes de um polinômio de grau "n" com coeficientes reais podem ser todas distintas, reais ou complexas, ou repetidas. Toda vez que aparece uma raiz complexa, também aparece a correspondente conjugada. Os vários casos possíveis são introduzidos através de exemplos

Raízes reais e distintas

$$f(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^3 - 2s^2 - s + 2}$$

$$p_1 = 1 \quad p_2 = -1 \quad p_3 = 2$$

$$f(s) = \frac{s^2 - s - 6}{(s-1)(s+1)(s-2)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{s-2}$$

Para determinar c_1

$$(s-1)f(s) = (s-1) \frac{(s^2 - s - 6)}{(s-1)(s+1)(s-2)} = (s-1) \frac{c_1}{(s-1)} + (s-1) \frac{c_2}{(s+1)} + (s-1) \frac{c_3}{(s-2)}$$

Fazendo $s=1$

$$c_1 = \frac{1-1-6}{(1+1)(1-2)} = 3$$

Isto é, na determinação de c_1 foi feito

$$c_1 = (s-1)f(s)|_{s=1} \equiv \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)f(s) \equiv \lim_{s \rightarrow p_1} (s-p_1)f(s)$$

Para c_2 e c_3 o procedimento é o mesmo

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)f(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^2 - s - 6}{(s-1)(s-2)} = -\frac{2}{3}$$

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow 2} (s-2)f(s) = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - s - 6}{(s-1)(s+1)} = -\frac{4}{3}$$

Assim

$$f(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$f(t) = 3 \cdot e^t - \frac{2}{3} \cdot e^{-t} - \frac{4}{3} \cdot e^{2t}$$

Raízes complexas

$$f(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$\begin{aligned}p_1 &= 0 \\p_2 &= -1 + i \\p_3 &= -1 - i\end{aligned}$$

Observamos que a uma raiz complexa corresponde uma raiz conjugada.

$$f(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s - (-1 + i)} + \frac{c_3}{s - (-1 - i)}$$

Neste caso as raízes são distintas e é usada a mesma metodologia do caso anterior, para o cálculo dos c_i . Isto é:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) f(s)$$

Assim

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2 + 2s + 2} = 1$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow (-1+i)} [s - (-1+i)] \frac{2}{s[s - (-1+i)][s - (-1-i)]} = \frac{-1+i}{2}$$

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow (-1-i)} [s - (-1-i)] f(s) = \frac{-1-i}{2} = c_2^*$$

Na expansão em frações parciais, os coeficientes associados a pares de raízes complexas conjugadas são complexos conjugados (basta calcular um para conhecer o outro). Assim

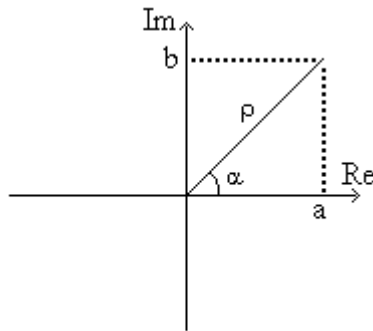
$$f(s) = \frac{1}{s} + \left(\frac{-1+i}{2} \right) \frac{1}{s - (-1+i)} + \left(\frac{-1-i}{2} \right) \frac{1}{s - (-1-i)}$$

$$f(t) = 1 + \frac{-1+i}{2} e^{(-1+i)t} + \frac{-1-i}{2} e^{(-1-i)t}$$

Isto não é real!

Vamos aproveitar este momento para relembrar alguns conceitos de variáveis complexas que, no caso, serão úteis para colocar a equação anterior em uma forma mais clara.

O número complexo $c = a + ib$, representa um ponto no plano complexo



Além das coordenadas cartesianas "a" e "b", podem ser usadas as coordenadas polares "ρ" e "α" para localizar o mesmo. Isto conduz à representação polar do número complexo.

$$c = a + ib = \rho e^{i\alpha}$$

com

$$\rho = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}$$

Assim, no exemplo considerado:

$$c_2 = \rho_2 e^{i\alpha_2}$$

$$c_3 = c_2^* = \rho_2 e^{-i\alpha_2}$$

com

$$\rho_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_2 = \arctg \frac{1/2}{-1/2} = \frac{3}{4}\pi$$

Então

$$f(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3}{4}\pi} e^{(-1+i)t} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3}{4}\pi} e^{(-1-i)t} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \left[e^{i\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)} + e^{-i\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)} \right]$$

Para continuar com a simplificação desta função vamos lembrar novos conceitos observando a figura anterior.

$$a = \rho \cos \alpha$$

$$b = \rho \sin \alpha$$

Então

$$c = a + ib = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \rho e^{i\alpha}$$

e

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \textbf{Fórmula de Euler}$$

porém

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

Somando, conclui-se que:

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Subtraindo, conclui-se que:

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Usando a primeira destas relações de Euler no nosso problema

$$f(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-t} \cos \left(t + \frac{3}{4} \pi \right)$$

É possível mostrar ainda, usando a relação trigonométrica

$$[\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B]$$

que

$$f(t) = 1 - e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

Através das operações realizadas chegamos a uma função real, o que não estava aparente na primeira $f(t)$ obtida. Como sempre estaremos trabalhando com sistemas reais, os sinais associados têm que ser reais.

Raízes múltiplas

$$f(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = p_3 = p_4 = -1$$

$$f(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{(s+1)^2} + \frac{c_4}{(s+1)^3}$$

Neste caso há funções a inverter é da forma $\frac{1}{(s-p_i)^n}$ e a inversa é

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-p_i)^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t}$$

Os coeficientes c_1 e c_4 são calculados como nos casos anteriores

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s) = 1$$

$$c_4 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^3 f(s) = -1$$

Entretanto

$$c_3 \neq \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 f(s)$$

Porém

$$\frac{d}{ds}[(s+1)^3 f(s)] = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{c_1}{s} + (s+1)^2 c_2 + (s+1) c_3 + c_4\right]$$

$$-\frac{1}{s^2} = \frac{3(s+1)^2 c_1 s - (s+1)^3 c_1}{s^2} + 2(s+1) c_2 + c_3$$

e, assim

$$\lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds}[(s+1)^3 f(s)] = c_3 = -1$$

Da mesma forma

$$\frac{d^2}{ds^2}[(s+1)^3 f(s)] = \frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{c_1}{s} + (s+1)^2 c_2 + (s+1) c_3 + c_4\right]$$

$$\frac{2}{s^3} = \frac{d}{ds} \left[\frac{3(s+1)^2 c_1 s - (s+1)^3 c_1}{s^2} \right] + 2 c_2$$

e, assim

$$\lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{d^2}{ds^2} (s+1)^3 f(s) \right] = 2 c_2 \Rightarrow c_2 = -1$$

A função no domínio do tempo é

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^3}\right)$$

$$f(t) = 1 - e^{-t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right)$$

O polinômio em t é consequência das raízes repetidas.

Transformada Z Inversa

Ao inverter a transformada z de uma dada função, f(z), é obtida uma seqüência de valores que nada diz respeito do intervalo de tempo que os separa (Ta)

$$Z^{-1}[f(z)] = \{f(0), f(1), f(2), \dots, f(k), \dots\}$$

Também nada diz respeito de uma eventual f(t) que possa ter gerado, por amostragem, essa seqüência. Pelos valores resultantes podem passar inúmeras funções contínuas.

Divisão direta

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{Nf(z)}{Df(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^{-k} \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} f(0) &= \gamma_0 \\ &\vdots \\ f(k) &= \gamma_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

É um método simples, que pode ser continuado indefinidamente. É indicado para determinar a transformada inversa nos primeiros intervalos de tempo.

Expansão em frações parciais

$$f(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{c_1}{r_1(z^{-1})} + \frac{c_2}{r_2(z^{-1})} + \dots + \frac{c_n}{r_n(z^{-1})}$$

$$Z^{-1}[f(z)] = c_1 Z^{-1}\left[\frac{1}{r_1(z^{-1})}\right] + c_2 Z^{-1}\left[\frac{1}{r_2(z^{-1})}\right] + \dots + c_n Z^{-1}\left[\frac{1}{r_n(z^{-1})}\right]$$

Raízes reais e distintas

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 3} = \frac{z^{-1}}{1 - 4z^{-1} + 3z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 3z^{-1})} = \frac{c_1}{1 - z^{-1}} + \frac{c_2}{1 - 3z^{-1}}$$

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 3z^{-1})} = -\frac{1}{2}$$

$$c_2 = \lim_{z \rightarrow 3} (1 - 3z^{-1}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 3z^{-1})} = \frac{1}{2}$$

$$f(z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - 3z^{-1}} \right)$$

Na tabela

$$Z^{-1}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) = 1$$

$$Z^{-1}\left(\frac{1}{1 - 3z^{-1}}\right) = 3^k$$

$$f(k) = Z^{-1}[f(z)] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} 3^k$$

k =	0	1	2	3	...
f(k) =	0	1	4	13	...

Raízes complexas conjugadas

$$f(z) = \frac{z^2 + 6 \cdot z}{(z^2 - 2z + 2) \cdot (z - 1)} = \frac{z^2 + 6 \cdot z}{[z - (1 + i)] \cdot [z - (1 - i)] \cdot (z - 1)} = c_1 \frac{z}{z - 1} + c_2 \frac{z}{z - (1 + i)} + c_2^* \frac{z}{z - (1 - i)}$$

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + 6z}{z^2 - 2z + 2} \cdot \frac{1}{z} = \boxed{7}$$

$$c_2 = \lim_{z \rightarrow (1+i)} \frac{z^2 + 6 \cdot z}{[z - (1 - i)] \cdot (z - 1)} \cdot \frac{1}{z} = \frac{(1+i)^2 + 6 \cdot (1+i)}{[(1+i) - (1-i)] \cdot (1+i-1) \cdot (1+i)} = \frac{(1+i) + 6}{2i \cdot i} = \boxed{\frac{7+i}{-2}}$$

$$c_2^* = \boxed{\frac{7-i}{-2}}$$

$$f(z) = 7 \cdot \frac{z}{z-1} + \left(\frac{7+i}{-2}\right) \cdot \frac{z}{z-(1+i)} + \left(\frac{7-i}{-2}\right) \cdot \frac{z}{z-(1-i)} =$$

$$7 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \left(\frac{7+i}{-2}\right) \cdot \frac{1}{1-(1+i) \cdot z^{-1}} + \left(\frac{7-i}{-2}\right) \cdot \frac{1}{1-(1-i) \cdot z^{-1}}$$

Lembrando $Z^{-1} \left(\frac{1}{1 - \gamma^{\text{Ta}} Z^{-1}} \right) = (\gamma^{\text{Ta}})^k$, vem

$$f(k) = 7 + \left(\frac{7+i}{-2}\right)(1+i)^k + \left(\frac{7-i}{-2}\right)(1-i)^k$$

Porém

$$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$$

$$1-i = \sqrt{2} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{7+i}{-2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot e^{i \cdot \arctg\left(\frac{-1}{-7}\right)}$$

$$\frac{7-i}{-2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot e^{-i \arctg\left(\frac{-1}{-7}\right)}$$

Substituindo e operando

$$f(k) = 7 + \sqrt{50} \cdot (\sqrt{2})^k \cdot \cos\left[k \cdot \frac{\pi}{4} + \arctg\left(\frac{-1}{-7}\right)\right]$$

Raízes múltiplas

$$f(z) = \frac{11z^2 - 15z + 6}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = \frac{11z^2 - 15z + 6}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{c_1}{(z-1)^2} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z-2} \equiv \frac{c_1 z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{c_2 z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{c_3 z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{11z^2 - 15z + 6}{z-2} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[c_1 + (z-1)c_2 + \frac{(z-1)^2}{z-2} c_3 \right]$$

$$c_1 = -2$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(22z-15)(z-2) - (11z^2 - 15z + 6)}{(z-2)^2} = -9$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[c_1 + (z-1)c_2 + \frac{(z-1)^2}{z-2} c_3 \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[0 + c_2 + \frac{2(z-1)(z-2) - (z-1)^2}{(z-2)^2} c_3 \right] = c_2$$

$$c_2 = -9$$

$$c_3 = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) f(z) = 20$$

$$f(z) = \left[\frac{-2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{9}{1-z^{-1}} + \frac{20}{1-2z^{-1}} \right] z^{-1}$$

$$f(k) = u(k-1) \cdot [-9 - 2(k-1)] \cdot 1^{k-1} + 20 \cdot 2^{k-1}$$

$$f(k+1) = (-9 - 2 \cdot k) \cdot 1^k + 20 \cdot 2^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

4.4 Função de Transferência

A integral de convolução é dada pela equação

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

Transformando por Laplace

$$y(s) = G(s) u(s)$$

onde

$$G(s) = L[g(t)]$$

é a **função de transferência**.

Pode, também, ser definida como o cociente entre as transformadas de Laplace dos sinais de saída e entrada.

A dinâmica de um sistema monovariável (SISO), linear e invariante é, genericamente, modelada por:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Em termos de variáveis desvio, com o sistema inicialmente no estado estacionário (condições iniciais nulas), transformando por Laplace

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Para que corresponda à função de transferência de um sistema real é necessário que

$$n > m$$

Considerando um exemplo em que $n < m$

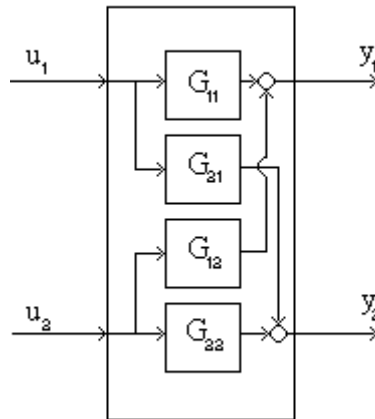
$$a_0 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

esta equação implicaria que para um degrau unitário o sistema responderia com um impulso unitário, $\delta(t)$; **isto é uma idealidade**.

A natureza não deriva, só integra!!!

Para um sistema multivariável (MIMO) haverá tantas funções de transferência como indicado pelo produto do número de variáveis de entrada pelo número de variáveis de saída.

Num caso 2x2.



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{y} = \underline{G} \underline{u}$$

$\underline{G}(s)$ é a **matriz de funções de transferência** ou **matriz de transferência**.

É claro que **não haverá interação** das variáveis de entrada se G_{12} e G_{21} forem nulas.

Um exemplo deste caso 2x2 (que poderia corresponder ao cstr, uma vez linearizado, expresso em termo de variáveis desvio e com a nomenclatura redefinida) é o seguinte:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + b_{11} u_1 + b_{12} u_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + b_{21} u_1 + b_{22} u_2$$

Transformando por Laplace e resolvendo o sistema de equações algébricas resultante vem

$$y_1(s) = \frac{b_{11} s + (a_{12} b_{21} - a_{22} b_{11})}{P(s)} u_1(s) + \frac{b_{12} s + (a_{12} b_{22} - a_{22} b_{12})}{P(s)} u_2(s)$$

$$y_2(s) = \frac{b_{21} s + (a_{21} b_{11} - a_{11} b_{21})}{P(s)} u_1(s) + \frac{b_{22} s + (a_{12} b_{22} - a_{11} b_{22})}{P(s)} u_2(s)$$

$$P(s) = s^2 - (a_{11} + a_{22})s - (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22})$$

O denominador de todas as funções de transferência de um mesmo sistema é o mesmo.

$P(s)=0$ é a **equação característica** e suas raízes são os **pólos** do modelo (sistema).

O numerador da função de transferência é um polinômio que quando igualado a zero tem como raízes os **zeros**.

Os **pólos** da **matriz de transferência** são a soma de todos os pólos das funções de transferência que a compõem.

Para matrizes quadradas, os **zeros** de $\underline{\underline{G}}(s)$ são os zeros de $|\underline{\underline{G}}(s)|$. Em geral, para matrizes transferência de qualquer forma, os zeros são os valores de "s" para os quais é reduzido o "posto" da matriz.

4.5 Função de Transferência de Pulsos

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) u(k-j)$$

Aplicando a transformada z

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} h(j) u(\underbrace{k-j}_l) \right] z^{-k}$$

Para

$$k-j=l \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow l=-j \\ k=\infty \Rightarrow l=\infty \end{cases}; k=l+j$$

$$y(z) = \sum_{l=-j}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h(j) u(l) z^{-(l+j)}$$

Quando $u(l) = 0 \quad \forall \quad l < 0$, então,

$$y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) z^{-j} \sum_{l=0}^{\infty} u(l) z^{-l}$$

$$y(z) = G(z) u(z)$$

com

$$G(z) = Z[h(k)]$$

A função de **transferência de pulsos** (ou simplesmente **pulso**) é a transformada z da **resposta pulso** ou **seqüência ponderada**. Relaciona entrada discreta e saída discreta. Também pode ser definida como

$$G(z) \triangleq \frac{y(z)}{u(z)}$$

Para sistemas contínuos observados discretamente (como faz o computador)

$$y(kT_a) = \sum_{j=0}^{\infty} g(jT_a) u[(k-j)T_a]$$

$g(jT_a)$: Seqüência de valores da resposta impulsional

$$G(z) = Z[g(kT_a)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT_a) z^{-k}$$

Consideremos o sistema discreto (ou discretizado) caracterizado por uma equação de diferenças finitas

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) =$$

$$b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \dots + b_{m-1} u(k+n-m+1) + b_m u(k+n-m)$$

ou, para coeficientes constantes (invariância no tempo),

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n-1} y(k-n+1) + a_n y(k-n) =$$

$$b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{m-1} u(k-m+1) + b_m u(k-m)$$

Usando a transformada z, para condições iniciais nulas:

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n) y(z) = (b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{m-1} z^{n-m+1} + b_m z^{n-m}) u(z)$$

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{m-1} z^{n-m+1} + b_m z^{n-m}}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

ou

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{m-1} z^{-m+1} + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}}$$

Neste caso, para que a função de transferência de pulsos represente um sistema real:

$$\text{se } a_0 = 0 \text{ então } b_0 = 0; \quad \text{se } a_0 = a_1 = 0 \text{ então } b_0 = b_1 = 0$$

Exemplo:

$$a_0 = 0, \quad b_0 \neq 0$$

$$a_1 y(k+n-1) + \dots = b_0 u(k+n) + \dots$$

ou

$$a_1 y(k-1) + \dots = b_0 u(k) + \dots$$

Não Pode!!!

Porém, se:

$$G(z) = \frac{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 z + \dots + \hat{b}_m z^m}{\hat{a}_0 + \hat{a}_1 z + \dots + \hat{a}_n z^n}$$

Para representar um sistema real

$$\boxed{n > m}$$