5 ANÁLISE EM TERMOS DE MODELOS ENTRADA/SAÍDA DO TIPO FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Aproveitando as semelhanças de comportamento entre sistemas contínuos e discretos no tempo, inicialmente será realizada a análise para o caso dos sistemas contínuos. O comportamento dos sistemas discretos ou discretizados será analisado ao final do capítulo, marcando as principais diferenças como os sistemas contínuos.

5.1 Respostas a Perturbações Típicas dos Sistemas Contínuos

No processo de análise utilizamos sinais para perturbar o sistema a partir do estado estacionário e observamos as respostas correspondentes (perguntas e respostas...coisa típica de qualquer processo de análise!)

$$y(s) = G(s).u(s) = \frac{c_1}{s-s_1} + \ldots + \frac{c_n}{s-s_n} + \frac{c_{n+1}}{s-s_{n+1}} + \ldots$$

s_1, s_2, ...s_n são as raízes da equação característica; os pólos p_j.

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, e^{p_j t} + \text{ termos associados às raízes introduzidas por } u(s)$$

Indicando as raízes, que genericamente são complexas conjugadas, com a seguinte nomenclatura,

$$s_j = R_j + i \cdot I_j$$

a resposta temporal envolverá os seguintes tipos de termos

$$y(t) = \ldots + c_1 e^{R_1 \cdot t} + \ldots + \underbrace{c_m e^{(R_m + iI_m)t} + c_m^* e^{(R_m - iI_m)t}}_{2\rho_m e^{R_m \cdot t} \cos(I_m t + \phi_m)} + \ldots + \left(c_n + c_{n+1} t + \ldots + \frac{c_{n+r-1}}{(r-1)!} t^{r-1} \right) e^{R_n \cdot t} + \ldots$$

Impulso Unitário

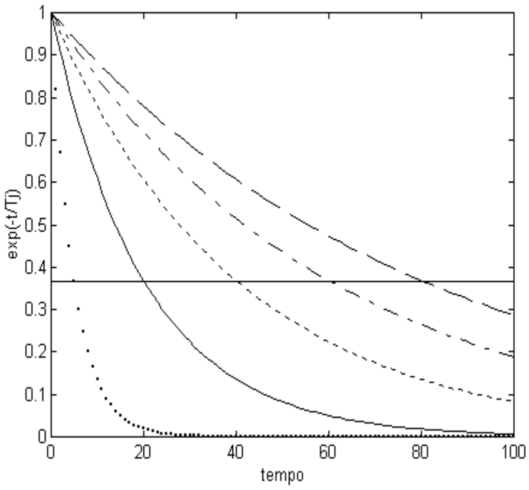
É um sinal ideal, cuja aproximação (o pulso) não altera significativamente o processo. Requer quantidades de matéria ou energia reduzidas para gerá-lo aproximadamente. O sistema volta ao seu estado inicial. A resposta contém toda a informação dinâmica necessária. A medida prática é difícil.

$$u(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad u(s) = 1$$

$$y(s) = G(s)$$

$$y(t) = g(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, e^{p_j t}$$

$$c_j = \lim_{s \to p_j} \left(s - p_j\right) \, G(s)$$



Fazendo

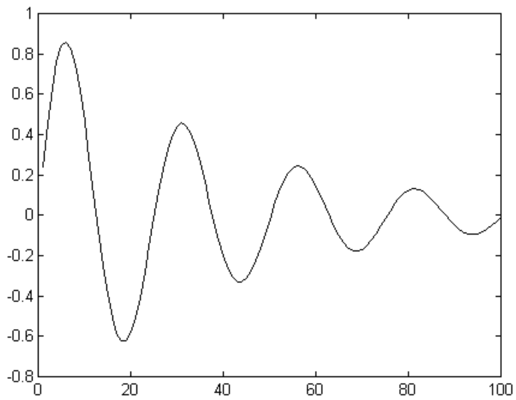
$$p_j = -\frac{1}{T_j} + i\,\omega_j$$

$$g(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, e^{\left(-\frac{1}{T_j} + i\omega_j\right)t}$$

Em geral ordena-se

$$\mathrm{Re}\left(p_1\right) \geq \mathrm{Re}\left(p_2\right) \geq \ \ldots$$

Para todas as raízes(pólos no caso) reais e negativas



$$g(t) = c_1 \, e^{\frac{-t}{T_1}} + c_2 \, e^{\frac{-t}{T_2}} + \ldots + c_n \, e^{\frac{-t}{T_n}}$$

Um par de raízes complexas conjugadas

$$p_j = \frac{-1}{T_j} + i\omega_j; \quad p_j^* = \frac{-1}{T_j} - i\omega_j$$

gera na resposta um termo da forma

$$2\rho_j \, e^{\frac{-t}{T_j}} \cos\left(\omega_j t + \phi_j\right)$$

ρ_j e ϕ_j estão associados aos coeficientes c_j e c_j^*

Degrau Unitário

É uma perturbação severa que tira o sistema do seu ponto de operação. A resposta inclui toda a informação dinâmica do sistema. Requer uma quantidade grande de massa ou energia.

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t < 0 \\ 1 \text{ para } t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s) = s(t) = G(s).\frac{1}{s} = \frac{\hat{c}_0}{s} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{c}_j}{s - p_j}$$

$$\hat{c}_0 = \lim_{s \to 0} \cancel{s} G(s) \frac{1}{\cancel{s}} = G(0)$$

$$\hat{c}_j = \lim_{s \to p_j} \left(s - p_j\right) \frac{G(s)}{s} = \frac{c_j}{p_j}$$

$$y(t) = s(t) = G(0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{p_j} e^{p_j t}$$

O primeiro termo é conseqüência do degrau introduzido. Os outros são próprios do sistema

Se todos os pólos, p_j, tem parte real negativa

$\lim_{t \to \infty} y(t) = G(0)$ **Ganho Estático**

O **ganho estático** mede a qualidade do sistema de aumentar ou diminuir o sinal de entrada, uma vez atingido o estado estacionário.

É razão entre o valor final atingido pela resposta e a amplitude do degrau introduzido (no caso, 1).

Observar que

$$\frac{ds(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{p_j} \frac{de^{p_j t}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_j \, e^{p_j t} = g(t)$$

Por outro lado, integrando este resultado entre "0" e "t", para $s(0) = 0$

$$s(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

Senoide

Mantém o valor valor médio do sinal de saída. É fácil de gerar. A resposta ao sinal só contém uma pequena parcela de informação relativa à dinâmica do sistema.

$$u(t) = \cos(\omega t + \phi_0) \begin{cases} \phi_0 = 0 & u(t) = \cos(\omega t) \\ \phi_0 = -\dfrac{\pi}{2} & u(t) = \text{sen}(\omega t) \end{cases}$$

$$u(s)=\frac{s\cos\phi_0-\omega\,\text{sen}\,\phi_0}{s^2+\omega^2}\begin{cases}\phi_0=0 & u(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\\[2ex] \phi_0=-\dfrac{\pi}{2} & u(t)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{cases}$$

$$y(s)=G(s)\,\frac{s\cos\phi_0-\omega\,\text{sen}\,\phi_0}{s^2+\omega^2}$$

$$y(s)=\frac{\tilde{c}_0}{s-i\omega}+\frac{\tilde{c}_0^*}{s+i\omega}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\tilde{c}_j}{s-p_j}$$

$$\tilde{c}_0=\lim_{s\to i\omega}(s-i\omega)G(s)\frac{s\cos\phi_0-\omega\,\text{sen}\,\phi_0}{(s-i\omega)(s+i\omega)}=G(i\omega)\frac{i\omega\cos\phi_0-\omega\,\text{sen}\,\phi_0}{2i\omega}=$$

$$=\frac{G(i\omega)}{2}\left(\cos\phi_0+i\,\text{sen}\,\phi_0\right)$$

$$\tilde{c}_0=\frac{G(i\omega)}{2}e^{i\phi_0}$$

$$\tilde{c}_0^*=\frac{G(-i\omega)}{2}e^{-i\phi_0}$$

$$\tilde{c}_j=\lim_{s\to p_j}(s-p_j)G(s)\frac{s\cos\phi_0-\omega\,\text{sen}\,\phi_0}{s^2+\omega^2}=c_j\left[\frac{p_j\cos\phi_0-\omega\,\text{sen}\,\phi_0}{p_j^2+\omega^2}\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\left[G(i\omega)\,e^{i\phi_0}\,e^{i\omega t}+G(-i\omega)\,e^{-i\phi_0-i\omega t}\right]+\sum_{j=1}^{n}c_j\left[\frac{p_j\cos\phi_0-\omega\,\text{sen}\,\phi_0}{p_j^2+\omega^2}\right]e^{p_jt}$$

Se os pólos têm parte real negativa o somatório some com o tempo.

Para $\quad G(i\omega)=\rho\,e^{i\phi}\quad$ vem

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\rho\cos\left(\omega t+\phi_0+\phi\right)$$

Que deve ser comparado com o sinal de entrada

$$u(t)=\cos\left(\omega t+\phi_0\right)$$

5.2 Sistemas Específicos

Sistemas de Primeira Ordem

Os **sistemas de primeira ordem só têm um pólo** e são tipicamente representados por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Considerando o caso de sistemas de primeira ordem puros, lineares, com coeficientes constantes e condição inicial nula, tem-se

$$a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) \qquad\qquad y(0) = 0$$

Usando a transformada de Laplace chega-se à função de transferência:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b_0}{a_1 \cdot s + a_0}$$

A função de transferência dos sistemas de primeira ordem tem uma **forma padrão** de ser escrita

$$G(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1}$$

onde "K" é o **ganho estático**, $K = G(0) = \frac{b_0}{a_0}$, e "T" é a **constante de tempo**, $T = \frac{a_1}{a_0}$.

Os sistemas de primeira ordem **só têm um pólo**,

$$p_1 = p = -\frac{1}{T} = -\frac{a_0}{a_1},$$

que, naturalmente, **só pode ser real** (lembrar nos sistemas reais os pólos complexos aparecem na forma de pares conjugados, isto é, só podem existir em sistemas de segunda ordem ou maior).

Um sistema é um **ganho puro** quando

$$G(s) = K$$

Isto é, quando

$$T = 0 \text{ ou } a_1 = 0$$

Um sistema é chamado um **integrador puro** quando,

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Isto é, quando

$$a_0 = 0$$

Um sistema de primeira ordem muito popular é o já descrito **tanque de nível**

$$A\frac{dh(t)}{dt} + c\sqrt{h(t)} = Fe(t)$$

Este sistema é não linear; linearizando e expressando em termos de variáveis desvio o modelo fica da forma anterior, com:

$$y(t) = h(t) - \bar{h}$$

$$u(t) = F_e(t) - \bar{F}$$

$$a_1 = 1 \;; \qquad a_0 = \frac{c}{2 \cdot A \cdot \sqrt{\bar{h}}} \qquad ; \qquad b_0 = \frac{1}{A}$$

Observar que se o tanque não tiver saída (o que pode ser indicado com um coeficiente de descarga nulo, c = 0) ele é um sistema integrador.

O ganho estático do tanque de nível é

$$K = \frac{b_0}{a_0} = \frac{1/A}{c/2 \cdot A \cdot \sqrt{\bar{h}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\bar{h}}}{c}$$

Ele pode ser modificado alterando o nível de estado estacionário ou o coeficiente de descarga.

A constante de tempo é

$$T = \frac{2 \cdot A \cdot \sqrt{\bar{h}}}{c}$$

Ela pode ser modificada alterando o nível de estado estacionário, a área ou o coeficiente de descarga.

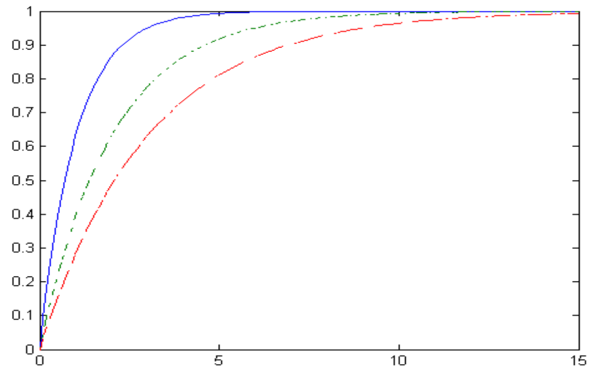
A resposta ao degrau unitário é calculada como já apresentado para o caso geral, resultando em:

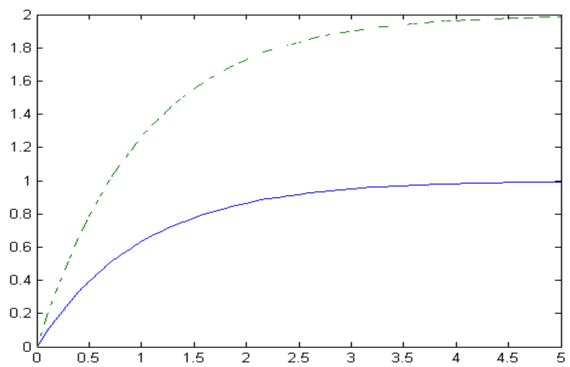
$$y(t) = K - K \cdot e^{-\frac{t}{T}} = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

O primeiro termo corresponde ao sinal degrau unitário introduzido, com o sistema respondendo através do seu ganho estático "K".

O segundo termo, também ponderado pelo ganho estático, corresponde ao pólo do sistema que, se for negativo - isto é, se "T" for uma constante positiva - desaparece com o tempo, com uma velocidade inversamente proporcional ao tamanho de "T". Uma grande constante de tempo faz com que o termo "transiente" perdure por um tempo significativo. Pode-se dizer, então, que grandes constantes de tempo caracterizam sistemas "lentos" (o conceito de lentidão só pode ser entendido em termos relativos).

A forma típica da resposta de um sistema de primeira ordem ao degrau unitário (ou ao degrau em geral, bastando multiplicar pela amplitude desse degrau) é mostrada nas seguintes figura, a primeira para três constantes de tempo diferentes (1, 2 e 3) e a segunda para dois ganhos estáticos diferentes (1 e 2).





Observa-se que a resposta é imediata, o que fica claro ao verificar que a inclinação na origem é **diferente de zero.**

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{K}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right|_{t=0} = \frac{K}{T}$$

Este resultado também é útil para calcular a constante de tempo de um sistema de primeira ordem, bastando traçar a tangente na origem à resposta a um degrau e verificar em que tempo esta reta corta a reta correspondente à resposta estabelecida (para tempo tendendo a infinito), que corresponde ao produto da magnitude do sinal pelo ganho estático do sistema. Esse tempo é "T".

Uma outra forma de determinar essa constante é calcular o tempo para o qual a resposta alcança 62.3% do seu valor final (resposta estabelecida).

$$y(T) = K\cdot\left(1 - e^{-\frac{T}{T}}\right) = K\cdot\left(1 - e^{-1}\right) = K\cdot 0.632$$

Isto pode ser facilmente comprovado nas figuras anteriores.

Observar, finalmente, que a resposta após 5 constantes de tempo pode ser considerada completamente estabelecida, o que é uma forma prática de inferir a constante de tempo dominante de um processo. Uma vez que se constata que a resposta se estabeleceu, divide-se o tempo correspondente por 5 e se obtém uma boa aproximação da constante de tempo que domina o processo.

$$y(5T) = K\cdot\left(1 - e^{-\frac{5T}{T}}\right) = K\cdot\left(1 - e^{-5}\right) = K\cdot 0.993$$

Isto também pode ser claramente observado nas figuras anteriores.

"Lead-Lag"

(Avanço-Atraso)

Este é um sistema muito popular na área de instrumentação e, apesar de ser ideal, na prática pode ser construído de forma aproximada (tanto quanto desejado). Sua função de transferência é

$$G(s) = K\frac{T_n\cdot s + 1}{T\cdot s + 1}$$

É um sistema de primeira ordem, porque tem um pólo, mas também tem um zero.

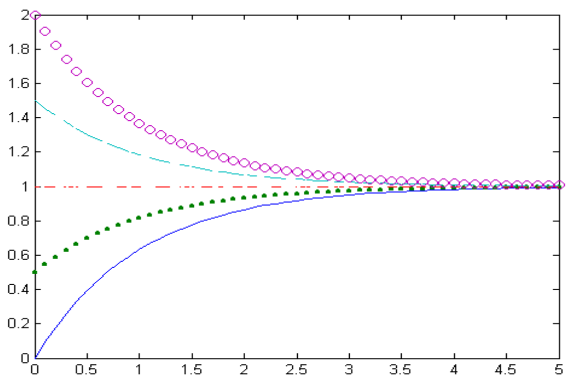
A presença de um pólo produz um **atraso** na resposta, como pode se inferir facilmente ao observar que si ele não existisse a resposta seria imediata (um ganho puro).

A presença de um zero produz um **avanço** do sinal. A resposta tende a ser mais rápida.

Para uma entrada degrau unitário,

$$y(t) = K \cdot \left[1 - \left(\frac{T - T_n}{T}\right) e^{-\frac{t}{T}}\right]$$

Para "T_n" positivo, o coeficiente do termo "transiente" diminui com seu aumento, até se transformar em negativo para $T_n > T$. Esta diminuição da influência do termo transiente, que está ligado ao pólo e, conseqüentemente, é sinônimo de "atraso" na resposta, corresponde a um "avanço" dessa resposta, se aproximando da "resposta instantânea" de um ganho puro. Este efeito pode ser observado na figura a seguir (com T_n = 0, 0.5, 1, 1.5 e 2), mas deve ser levado em consideração que as curvas indicadas são ideais, pois nenhum sistema real pode responder instantaneamente.



Sistemas de Segunda Ordem

Os **sistemas de segunda ordem têm dois pólos** e são tipicamente representados por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Considerando o caso de sistemas de segunda ordem puros, lineares, com coeficientes constantes e condições iniciais nulas, tem-se,

$$a_2 \cdot \frac{dy^2(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) \qquad y(0) = 0 \;\; ; \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Usando a transformada de Laplace chega-se à função de transferência:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}$$

A função de transferência dos sistemas de segunda ordem é escrita em uma **forma padrão**

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot s + 1}$$

onde:

- "K" é o **ganho estático**, $K = G(0) = \frac{b_0}{a_0}$,
- "τ" é a **constante de tempo aparente** ou **período natural de oscilação,** $\tau = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$, e
- "ξ" é o **coeficiente de amortecimento**, $\xi = \frac{a_1}{2 \cdot \sqrt{a_2 \cdot a_0}}$

Os sistemas de segunda ordem podem ser originados da combinação de sistemas de primeira ordem ou serem inerentemente de segunda ordem.

Combinação de sistemas de primeira ordem

Dois sistemas de primeira ordem combinados, mas **sem** interação, resultam na seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K_1}{T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2 \cdot s + 1} = \frac{K_1 \cdot K_2}{T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1}$$

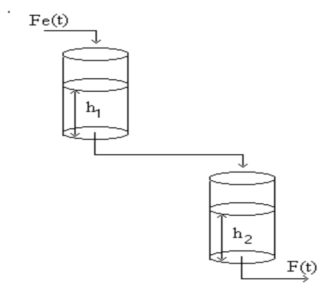
Comparando com a forma padrão

$$\tau = \sqrt{T_1 \cdot T_2}$$

$$\xi = \frac{T_1 + T_2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}$$

O primeiro fator é a **média aritmética** e o segundo a inversa da **média geométrica**. Como a média aritmética é **sempre maior o igual** que a geométrica, o coeficiente de amortecimento para este tipo de sistemas será **sempre maior ou igual a "1"**, o que é um indicativo de que **não haverá oscilação** (os pólos são $-1/T_1$ e $-1/T_2$, reais)

Um sistema deste tipo, por exemplo, é a combinação de dois tanques de nível, como mostrado na figura abaixo.



Dois sistemas de primeira ordem combinados, mas **com** interação, resultam na seguinte função de transferência:

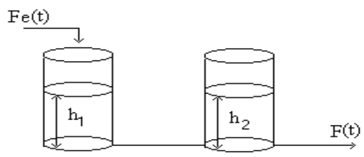
$$G(s) = \frac{K_1 \cdot K_2}{T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2 + K_2 \cdot T_1) \cdot s + 1}$$

Comparando com a forma padrão

$$\tau = \sqrt{T_1 \cdot T_2}$$

$$\xi = \frac{T_1 + T_2 + K_2 \cdot T_1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}$$

Novamente o coeficiente de amortecimento não pode ser menor do que "1" e este sistema também não apresenta oscilação.Um sistema deste tipo pode ser exemplificado pela combinação de dois tanques de nível como mostrado na figura abaixo.



Sistemas inerentemente de segunda ordem

Neste caso os pólos podem ser reais e distintos, reais e repetidos, complexos conjugados e imaginários conjugados. A forma dos pólos é

$$p = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

Para valores do coeficiente de amortecimento maiores que "1", os pólos são reais e distintos.

Para o valor "1" resultam dos pólos reais e repetidos.

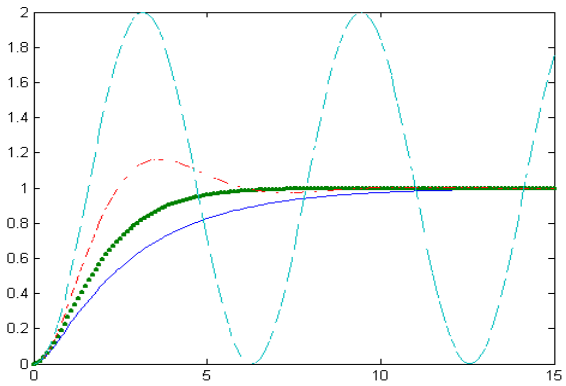
Para valores entre "0" e "1" os pólos são complexos conjugados com parte real negativa.

Para "0" os pólos são imaginários conjugados, da forma

$$p = \pm \frac{i}{\tau}$$

resultando numa oscilação permanente com período "τ"; esta é a origem do nome **período natural de oscilação.**

A resposta a um degrau unitário de um sistema de segunda ordem puro, com ganho estático unitário, com coeficiente de amortecimento maior ou igual a "0" é indicada na figura abaixo, para diversos valores do coeficiente (1.5, 1, 0.5, 0).



São duas as características principais do comportamento dinâmico dos sistemas de segunda ordem: respondem com **derivada inicial nula**, o que se traduz numa resposta mais lenta em relação à dos sistemas de primeira ordem, e **podem apresentar oscilação**.

Estas características se estendem aos sistemas de ordem maior do que dois, onde se observa uma resposta inicial mais demorada na medida em que aumenta a ordem do sistema (tempo morto aparente ou efetivo).

Efeito de um zero

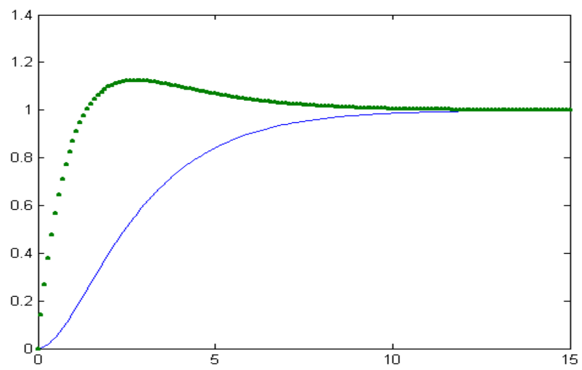
$$G(s) = \frac{K \cdot (T_n \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$$

$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{T_1 - T_n}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - T_n}{T_2 - T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

Comparando sua resposta a um degrau unitário com a resposta do sistema de segunda ordem puro

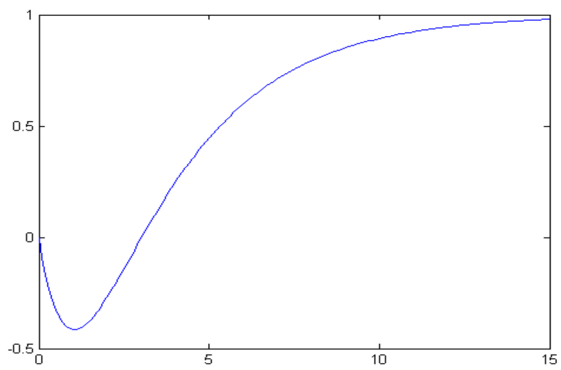
$$y(t) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

é possível inferir o efeito do zero, o que pode ser verificado na figura abaixo, onde na medida em que aumenta "T_n" o sistema fica mais rápido.



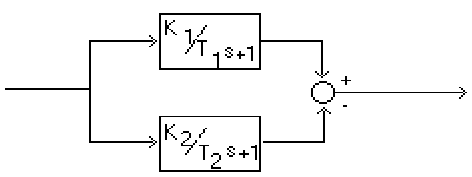
Resposta inversa

Chama-se sistema com resposta inversa àquele sistema em que a resposta a um sinal de entrada parte inicialmente no sentido contrário àquele em que finalmente vai se estabelecer



Este tipo de sistema é o resultado de uma determinada combinação de subsistemas envolvendo ganhos e constantes de tempo diferentes.

Vamos a exemplificar com o caso de um sistema resultante de dois sistemas de primeira ordem combinados, segundo mostra a figura, sujeito a uma perturbação degrau unitário.



Se o sistema "1" envolve um ganho estático maior que o sistema "2", mas inicialmente responde mais lentamente ($\frac{K_1}{T_1} < \frac{K_2}{T_2}$), observa-se a resposta inversa.

Analisando em termos de função de transferência, tem-se

$$G(s) = G_1(s) - G_2(s) = \frac{K_1}{T_1 \cdot s + 1} - \frac{K_2}{T_2 \cdot s + 1} = \frac{K_1 \cdot (T_2 \cdot s + 1) - K_2 \cdot (T_1 \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)} = \frac{K \cdot (T_n \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}$$

com

$$K = K_1 - K_2$$

e

$$T_n = \left(\frac{K_1}{T_1} - \frac{K_2}{T_2} \right) \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{(K_1 - K_2)}$$

Se K_1 e K_2 são positivos, $K_1 > K_2$ e $\frac{K_2}{T_2} > \frac{K_1}{T_1}$ o sistema responde inicialmente para baixo para finalmente sua resposta se estabelecer positiva.

Se K_1 e K_2 são negativos, $|K_1| > |K_2|$ e $\left|\frac{K_2}{T_2}\right| > \left|\frac{K_1}{T_1}\right|$ o sistema responde inicialmente para cima para finalmente sua resposta se estabelecer negativa.

Nos dois casos $T_n < 0$.

Este resultado se generaliza para: “os sistemas que apresentam um número impar de zeros positivos têm resposta inversa”.

O tempo morto

Esta característica dos sistemas, muito comum nos processos químicos, determina que a resposta a qualquer perturbação só se inicia a partir de um certo tempo chamado de **tempo morto** (*time delay, dead time, transport delay*). A sua função de transferência envolve uma função transcendental e não um cociente de polinômios, como até agora visto.

$$G(s) = e^{-t_d \cdot s}$$

Na prática se utiliza a aproximação de Padé, que gera o cociente de polinômios que "melhor" se aproxime ao desenvolvimento da exponencial em série de Taylor em torno do ponto "s = 0". O motivo de se usar um cociente é que dessa forma se consegue um menor número de termos. O desenvolvimento em série de Taylor é da forma,

$$e^{-t_d \cdot s} = 1 - t_d \cdot s + \frac{t^2{}_d}{2!} \cdot s^2 - \frac{t^3{}_d}{3!} \cdot s^3 + \cdots$$

Dependendo da ordem dos polinômios envolvidos há uma aproximação de Padé diferente.

Aproximação de primeira ordem

$$e^{-t_d \cdot s} = \frac{1 - \frac{t_d}{2} \cdot s}{1 + \frac{t_d}{2} \cdot s}$$

Aproximação de segunda ordem

$$e^{-t_d \cdot s} = \frac{1 - \frac{t_d}{2} \cdot s + \frac{t^2{}_d}{12} \cdot s^2}{1 + \frac{t_d}{2} \cdot s + \frac{t^2{}_d}{12} \cdot s^2}$$

Aproximação de terceira ordem

$$e^{-t_d \cdot s} = \frac{1 - \frac{t_d}{2} \cdot s + \frac{t^2{}_d}{10} \cdot s^2 - \frac{t^3{}_d}{120} \cdot s^3}{1 + \frac{t_d}{2} \cdot s + \frac{t^2{}_d}{10} \cdot s^2 + \frac{t^3{}_d}{120} \cdot s^3}$$

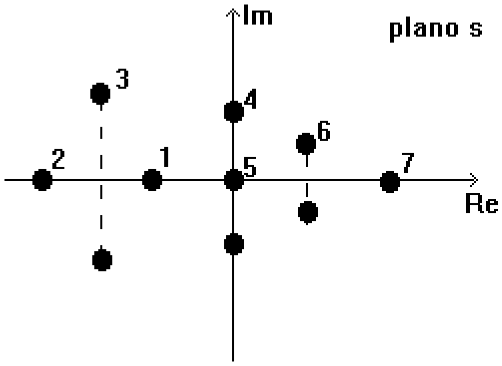
Para os processos químicos em geral é suficiente a aproximação de primeira ordem.

$$e^{-t_d \cdot s} = \frac{1 - \frac{t_d}{2} \cdot s}{1 + \frac{t_d}{2} \cdot s}$$

É importante sublinhar que o tempo morto pode ser **real** ou **efetivo** (**aparente**). Chama-se desta última forma ao período de tempo que demora em começar a responder um sistema de ordem elevada.

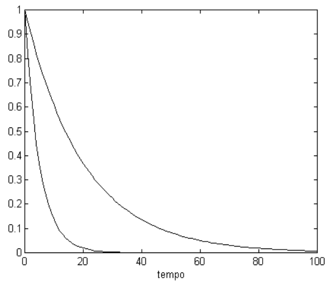
5.3 Efeito da Localização das Raízes no Plano Complexo

Domínio S

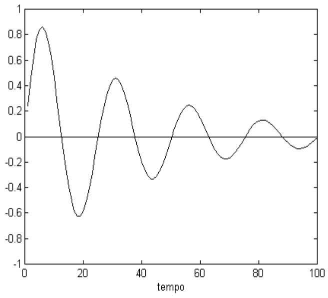


① s=-s_1 real negativa $(s_1 > 0) \Rightarrow e^{-s_1 t}$

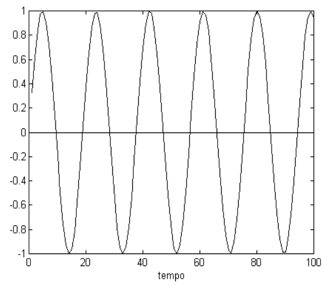
② s=-s_2 real negativa $(s_2 > 0)$ $(s_2 > s_1)$



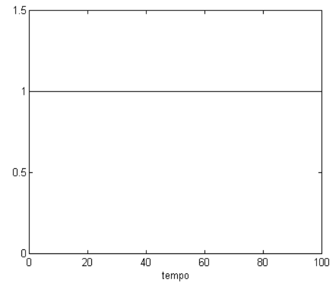
③ s=-s_3 complexa conjugada com parte real negativa $(s_3 > 0) \Rightarrow e^{-s_3 t} \cos(\omega_3 t + \phi_3)$



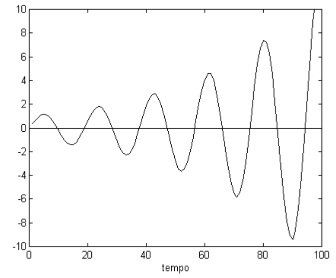
④ s=$\pm i\omega_4$ imaginárias conjugadas $\cos(\omega_4 t + \phi_4)$



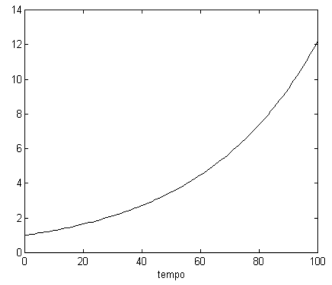
⑤ s=0



⑥ s=$s_6 \pm i\omega_6$ par complexo conjugado com parte real positiva $e^{s_6 t}\cos(\omega_6 t + \phi_6)$



⑦ s=s_7 real positiva $e^{s_7 t}$



Quando uma raiz real "s_r" é repetida “r” vezes, surge um termo da forma

$$\left(c_{r1} + c_{r2} t + \ldots + c_{rr} t^{r-1}\right) e^{s_r t}$$

5.4 O Comportamento dos Sistemas Discretos no Tempo

$$y(z) = G(z).u(z) = \frac{c_1}{1 - z_1 \cdot z^{-1}} + \ldots + \frac{c_n}{1 - z_n \cdot z^{-1}} + \frac{c_{n+1}}{1 - z_{n+1} \cdot z^{-1}} + \ldots$$

z_1, z_2, ...z_n são as raízes do denominador de y(z), que no caso específico da função de transferência são os chamados pólos, p_j.

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(p_j\right)^k + \text{ termos associados à raízes introduzidas por u(z)}$$

Indicando as raízes, que genericamente são complexas conjugadas, com a seguinte nomenclatura,

$$z_j = |z_j| e^{i \cdot \arg(z_j)}$$

a resposta temporal envolverá os seguintes tipos de termos

$$y(t) = \ldots + c_j \left(|z_j|\right)^k + \cdots + c_l \left(-|z_l|\right)^k + \ldots + \underbrace{c_m \cdot \left(|z_m| \cdot e^{i \arg(z_m)}\right)^k + c_m^* \cdot \left(|z_m| \cdot e^{-i \arg(z_m)}\right)^k}_{2\rho_m |z_m|^k \cos\left[\arg(z_m) \cdot k + \phi_m\right]} + \ldots$$

$$+ \left(c_n + c_{n+1} k + \ldots + \frac{c_{n+r-1}}{(r-1)!} k^{r-1}\right)\left(|z_n|\right)^k + \ldots + \left(c_p + c_{p+1} k + \ldots + \frac{c_{p+r-1}}{(r-1)!} k^{r-1}\right)\left(-|z_p|\right)^k + \cdots$$

Se as raízes são reais seu efeito será diferente, segundo que elas sejam positivas ou negativas, pois as potências resultarão em seqüências crescentes ou decrescentes (segundo seu módulo ou valor absoluto seja maior ou menor do que “1”), não oscilatórias ou oscilatórias (segundo seu sinal seja positivo ou negativo).

Impulso Unitário

O impulso unitário discreto é dado pelo “delta”de Kronecker e sua transformada z é “1”:

$$u(k) = \delta_0(k) \Rightarrow u(z) = 1$$

Assim, resulta

$$y(z) = G(z)$$

e

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot (p_j)^k$$

Os coeficientes da expansão são calculados segundo

$$c_j = \lim_{z \to p_j} \left(1 - p_j \cdot z^{-1}\right) \cdot G(z)$$

Fazendo

$$p_j = |p_j| \cdot e^{i \cdot \arg(p_j)}$$

vem

$$y(k) = h(k) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \left[|p_j| \cdot e^{i \cdot \arg(p_j)}\right]^k$$

Se todos os pólos são reais, eles estão localizados sobre o eixo real, podendo ser positivos ou negativos.

Sendo positivos, $\arg(p_j) = 0^o$. Assim

$$e^{i\cdot\arg(p_j)} = \cos 0^o - i\cdot \text{sen}\, 0^o = 1$$

e, então

$$y(k) = h(k) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \left[|p_j|\right]^k$$

Sendo negativos, $\arg(p_j) = 180^o$. Assim

$$e^{i\cdot\arg(p_j)} = \cos 180^o - i\cdot \text{sen}\, 180^o = -1$$

e, então

$$y(k) = h(k) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \left[|p_j| \cdot (-1)\right]^k$$

Um par de pólos complexos conjugados geram um termo oscilatório da forma

$$2\cdot \rho_j \cdot |p_j|^k \cdot \cos\left[\arg(p_j)\cdot k + \phi_j\right]$$

ρ_j e ϕ_j estão associados aos coeficientes c_j e c_j^* da expansão em frações parciais correspondente.

Degrau Unitário

$$u(k) = \begin{cases} 0 \text{ para } k < 0 \\ 1 \text{ para } k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Assim

$$y(z) = G(z).\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{\hat{c}_0}{1-z^{-1}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{c}_j}{1 - p_j \cdot z^{-1}}$$

$$\hat{c}_0 = \lim_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right)\cdot G(z)\frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)} = G(1)$$

$$\hat{c}_j = \lim_{z\to p_j} \left(1 - p_j \cdot z^{-1}\right)\frac{G(z)}{1 - z^{-1}} = \frac{c_j}{1 - p_j^{-1}}$$

$$y(k) = G(1) + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{1 - p_j^{-1}} \cdot (p_j)^k$$

Se todos os pólos apresentam módulo menor do que “1”, o somatório tende para “0” na medida em que o tempo avança, ficando, para tempo suficientemente grande

$y(k)\big|_{k\to\infty} = G(1)$ **Ganho Estático**

Senoide

Considerando a resposta ao sinal "coseno", para um sistema de dados amostrados, vem

$$u(k) = \cos(\omega \cdot k.T_a) \;\Rightarrow\; u(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos(\omega \cdot T_a)}{1 - 2\cdot z^{-1}\cos(\omega \cdot T_a) + z^{-2}}$$

Este sinal introduz um par de raízes complexas conjugadas da forma

$$z = \cos(\omega \cdot T_a) \pm i\,\mathrm{sen}(\omega \cdot T_a) = e^{\pm i\cdot\omega\cdot T_a}$$

Operando de forma semelhante ao caso dos sistemas contínuos no tempo e considerando que os pólos do sistema têm valor absoluto menor do que "1", chega-se à seguinte resposta quando o termo transiente desaparece,

$$y(k)\big|_{k\to\infty} = \left|G\left(e^{i\cdot\omega\cdot T_a}\right)\right| \cos\left\{\omega \cdot k.T_a + \arg\left[G\left(e^{i\cdot\omega\cdot T_a}\right)\right]\right\}$$

Trata-se de um sinal coseno, com a mesma freqüência do sinal de entrada, com amplitude e angulo de fase diferentes, que são dados pelo módulo e o argumento do complexo obtido substituindo, na função de transferência pulso a variável "z" pela raíz "$e^{i\cdot\omega\cdot T_a}$".

Em termos da **localização das raízes no plano complexo**, haverá um comportamento diferente devido ao "mapeamento" não linear que vincula as variáveis "s" e "z ".

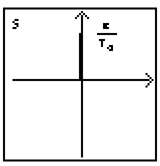
$$\left.\begin{array}{l} z = e^{T_a s} \\ s = a + i\omega \end{array}\right\} z = e^{aT_a}\, e^{i\omega Ta} = \rho_z e^{i\phi_z}$$

$$\rho_z = e^{aT_a}$$

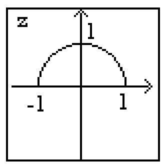
$$\phi_z = \omega T_a$$

Para:

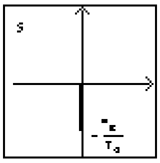
$a=0;\ 0 \le \omega \le \dfrac{\pi}{T_a}$



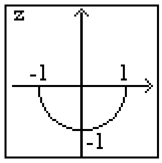
$\rho_z = 1;\ 0 \le \phi_z < \pi$



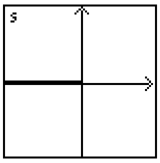
$a=0;\ -\frac{\pi}{T_a} \le \omega \le 0$



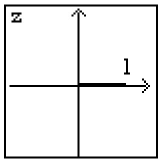
$\rho_z = 1;\ -\pi \le \phi_z \le 0$



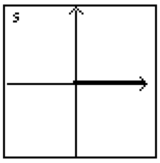
$-\infty < a \le 0;\ \omega=0$



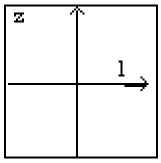
$0 < \rho_z \le 1;\ \phi_z = 0$



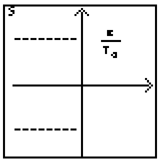
$0 \le a < \infty;\ \omega=0$



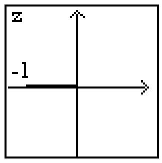
$1 \le \rho_z < \infty;\ \phi_z = 0$



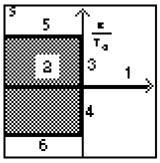
$-\infty < a \le 0;\ \omega = \pm\frac{\pi}{T_a}$

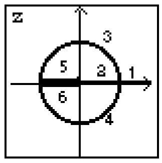


$0 < \rho_z \le 1;\ \phi_z = \pm\pi$



Então:



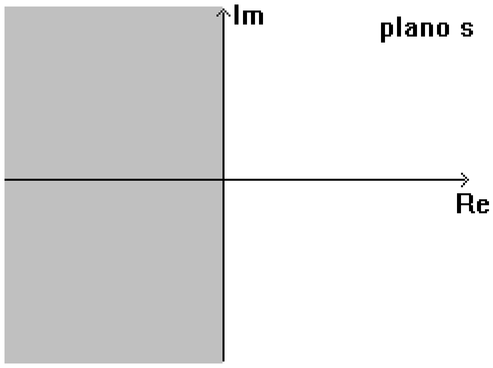


A faixa do semiplano esquerdo do "Plano s" compreendida em $\left(+\frac{\pi}{T_a},-\frac{\pi}{T_a}\right)$ é mapeada dentro do círculo unitário do "Plano z". O mesmo acontecerá com as infinitas faixas de tamanho $\frac{2\cdot\pi}{T_a}$ que se estendem para cima e para baixo da faixa mencionada. Isto é uma prova da perda de informação que existe na amostragem discreta de sistemas. Informação (pólos, por exemplo) localizada dentro do círculo unitário do "Plano z", pode ter múltiplas origens.

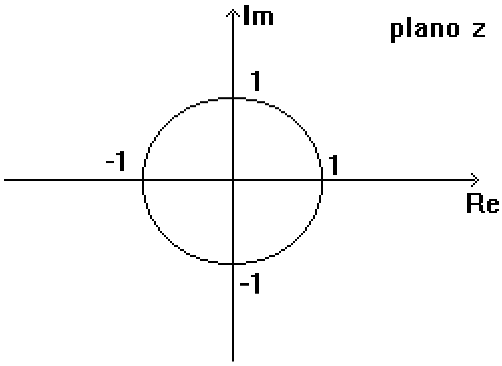
5.5 Estabilidade

A estabilidade é um conceito muito amplo, que aceita várias definições. Muita teoria tem-sido desenvolvida no intuito de avaliar a estabilidade de sistemas. No caso dos sistemas lineares, a **estabilidade linear** é definida como a propriedade daqueles sistemas que respondem com sinais limitados a sinais de entrada limitados.

Um sistema **contínuo linear** responde com sinais limitados a sinais limitados se **todos seus pólos têm parte real negativa**; isto é **estão no semi-plano esquerdo do plano complexo**



Em termos de **estabilidade** um sistema discreto linear é estável quando todos seus pólos estão contidos **dentro do círculo unitário**.



,