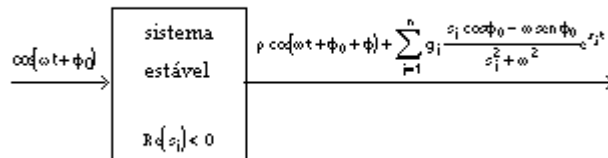


## 6 RESPOSTA DE FREQUÊNCIA

Observa-se que, para um **sistema estável**, a resposta de um sistema a um sinal senoidal é, após desaparecer o efeito dos termos exponenciais (transiente), um outro sinal senoidal com a mesma frequência de oscilação, porém amplitude e ângulo de fase diferentes



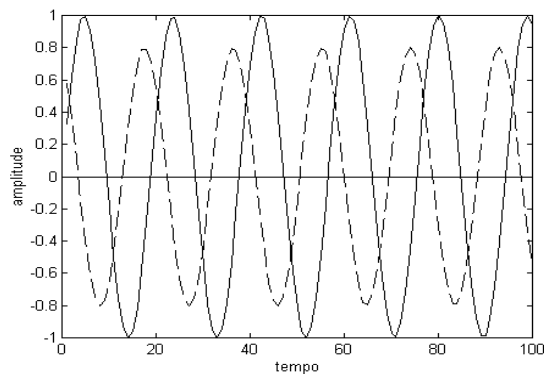
**Razão de amplitude** entre sinais de saída e entrada:  $\rho$

**Ângulo de fase** (defasagem) entre sinais:  $\phi$

onde

$$\rho = |G(i\omega)|$$

$$\phi = \angle G(\omega)$$



O comportamento de  $\rho(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  depende da frequência, é **característico do sistema** considerado e é conhecido como **resposta de frequência**.

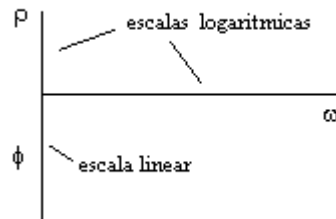
Conhecer a resposta de frequência total para o sistema ( $0 \leq \omega < \infty$ ) permite deduzir a função de transferência,  $G(s)$ .

Experimentalmente a resposta de frequência é determinada introduzindo sinais com frequências diferentes, dentro da faixa de interesse, e medindo as correspondentes **razão de amplitude e ângulo de fase**.

Graficamente existem duas formas principais de representar a **resposta de frequência**.

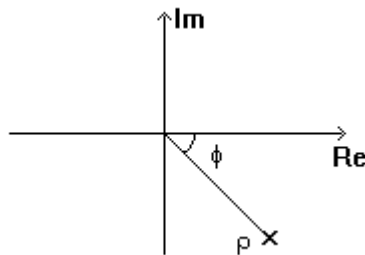
### Diagrama de Bode

Usa duas curvas diferentes:  $\log \rho$  vs.  $\log \omega$        $\phi$  vs.  $\log \omega$



### Diagrama de Nyquist

Representa o número complexo  $G(i\omega)$  em forma polar, numa única curva.



Neste caso a frequência aparece como parâmetro na curva.

O uso do **comportamento assintótico** para  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$  facilita a determinação da resposta de frequência no diagrama de Bode. Considerando a função de transferência  $G(s)$  como um cociente de polinômios

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\overbrace{b_m}^{c_0}}{a_n} \frac{1}{s^{n-m}} + c_1 \frac{1}{s^{n-m+1}} + c_2 \frac{1}{s^{n-m+2}} + \dots$$

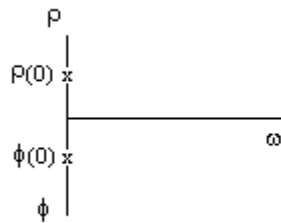
a resposta de frequência corresponde ao módulo " $\rho$ " e ao argumento " $\phi$ " do complexo  $G(i\omega)$ .

$$G(i\omega) = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b_m}{a_n} \frac{1}{(i\omega)^{n-m}} + \dots$$

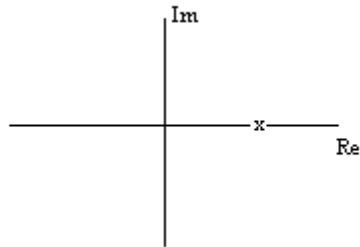
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(i\omega) = \frac{b_0}{a_0} = G(0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho(0) = |G(0)| \\ \phi(0) = 0 \end{cases} \quad \text{para } a_0 \neq 0$$

$G(0)$  corresponde ao estado estacionário atingido após a entrada de um degrau unitário; isto é, o **Ganho Estático**.

No Diagrama de Bode



No Diagrama de Nyquist



$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \frac{1}{(i\omega)^{n-m}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{1}{\omega^{n-m}} \right] \cdot (i)^{m-n}$$

Um número complexo  $z = x + iy$ , escrito na forma polar é  $z = \rho e^{i\phi}$ , com

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \phi = \text{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\text{Para } z = i = 0 + i1 \quad \Rightarrow \quad \rho = 1 \quad \phi = \text{arctg} \frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{e} \quad i^{m-n} = e^{i(m-n)\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{b_m}{a_n} \frac{1}{\omega^{n-m}} \right] e^{i(m-n)\frac{\pi}{2}}$$

Quando a frequência aumenta, o módulo tende para zero. No diagrama de Bode

$$\log \rho = \log \left[ \frac{b_m}{a_n} \frac{1}{\omega^{n-m}} \right] = \log \frac{b_m}{a_n} - (n-m) \log \omega$$

O módulo tende assintoticamente a zero, com uma inclinação de  $-(n-m)$ .

$$\text{A defasagem correspondente é } \phi = -(n-m) \frac{\pi}{2}.$$

Então, um sistema com  $n = 4$  e  $m = 2$  terá, para  $\omega \rightarrow \infty$ , uma assíntota de inclinação  $-2$  e uma defasagem de  $-\pi$ .

### Exemplo

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad y(0) = 0$$

$$(Ts + 1) \cdot y(s) = u(s) \Rightarrow \frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Então  $n = 1$  e  $m = 0$

A priori já se pode estabelecer que, para

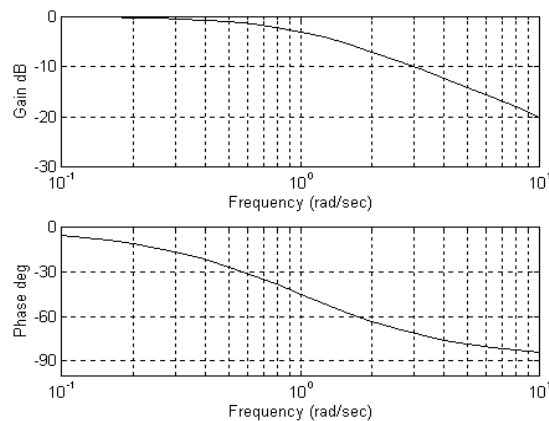
$$\omega = 0 \Rightarrow \rho = 1 \text{ e } \phi = 0$$

e para

$$\omega = \infty \Rightarrow \rho = 0 \text{ e } \phi = -\frac{\pi}{2}; \text{ isto é, a assíntota tem inclinação } -1$$

Substituindo  $s = i\omega$

$$G(i\omega) = \frac{1}{Ti\omega + 1} = \frac{1 - iT\omega}{1 + (T\omega)^2}; \rho = |G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}; \phi = \angle G(i\omega) = \text{arctg} \frac{-T\omega}{1}$$

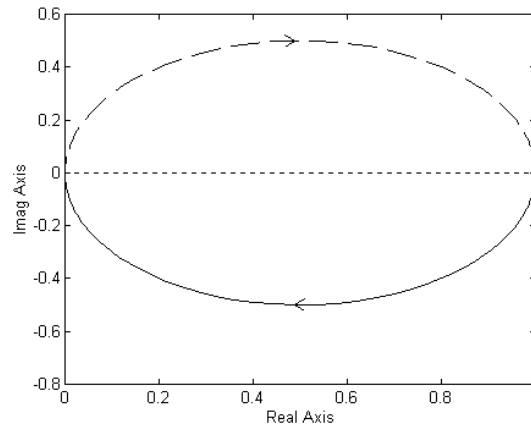


para  $\omega \rightarrow \infty$

$$\rho \rightarrow \frac{1}{T\omega} = (T\omega)^{-1}$$

$$\log \rho = -\log(T\omega)$$

As assíntotas de baixa e alta frequência **se cruzam** em  $T\omega = 1$  ou  $\omega = \frac{1}{T}$



### Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot s + 1}$$

$$m = 0, n = 2$$

A priori pode-se estabelecer que para

$$\omega = 0 \Rightarrow \rho = 1 \text{ e } \phi = 0$$

e para

$$\omega = \infty \Rightarrow \rho = 0 \text{ e } \phi = -\pi; \text{ isto é, a assíntota tem inclinação } -2$$

para  $s \rightarrow i\omega$

$$G(i\omega) = \frac{1}{\tau^2 (i\omega)^2 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot (i\omega) + 1} = \frac{1}{[1 - (\tau\omega)^2] + i2\xi\tau\omega} = \frac{[1 - (\tau\omega)^2] - i2\xi\tau\omega}{[1 - (\tau\omega)^2]^2 + [2\xi\tau\omega]^2}$$

$$\rho = |G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\tau\omega)^2]^2 + [2\xi\tau\omega]^2}}$$

$$\phi = \angle G(i\omega) = \arctg \frac{-2\xi\tau\omega}{1 - (\tau\omega)^2}$$

para  $\omega \rightarrow \infty$

$$\rho \rightarrow \frac{1}{(\tau\omega)^2} \Rightarrow \log \rho = \log 1 - 2 \cdot \log(\tau\omega)$$

As assíntotas de baixa e alta frequência se cruzam em  $\omega = \frac{1}{\tau}$ .

Se as raízes são reais e negativas  $p_1 = -\frac{1}{T_1}$      $p_2 = -\frac{1}{T_2}$

$$\tau = \sqrt{T_1 T_2}$$

$$\xi = \frac{T_1 + T_2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_1 + T_2}} = \frac{\text{média aritmética}}{\text{média geométrica}} > 1$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \Rightarrow [T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1]y(s) = u(s)$$

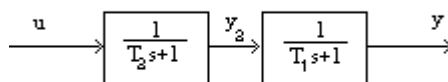
No domínio do tempo,

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

que é equivalente a

$$T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = y_2(t)$$

$$T_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = u(t)$$



Se as constantes de tempo são muito diferentes  $\xi \gg 1$  o comportamento de  $\rho$  e  $\phi$  se assemelha a um de primeira ordem, sob a influência da maior constante de tempo. Quando a frequência cresce começa a se sentir o efeito da segunda.

Quando as raízes são complexas conjugadas com parte real negativa

$$p_1 = -\frac{1}{T} + i\omega_n$$

$$p_2 = -\frac{1}{T} - i\omega_n$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + (T\omega_n)^2}} < 1$$

Quando  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$  ou  $T\omega_n > 1$  há um máximo na curva de " $\rho$ ", que aumenta com o aumento de  $T\omega_n$ .

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\tau\omega)^2]^2 + [2\xi\tau\omega]^2}}$$

$$\frac{d\rho}{d(\tau\omega)} = -\frac{1}{2} \left[ [1 - (\tau\omega)^2]^2 + (2\xi\tau\omega)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \left[ 2[1 - (\tau\omega)^2](-2\tau\omega) + 2(2\xi\tau\omega)2\xi \right] = 0$$

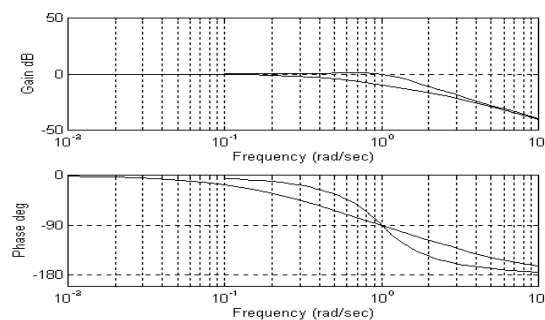
$$4\tau\omega[1 - (\tau\omega)^2] = 4(2\xi\tau\omega)\xi \qquad 1 - (\tau\omega)^2 = 2\xi^2$$

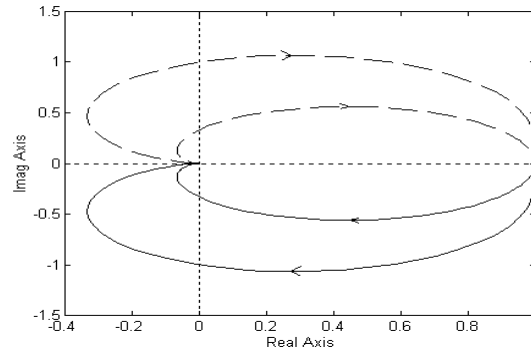
$$\tau\omega = \sqrt{1 - 2\xi^2} \qquad \text{real para } \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainda faltaria calcular a derivada segunda para verificar que nestas condições é  $< 0$ .

$$\rho_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Este valor cresce na medida que " $\xi$ " diminui.





**Características da resposta de frequência:**

1. Permite conhecer a dinâmica do processo;
2. É simples de determinar, ainda que para processos complicados;
3. Pode ser medida experimentalmente;
4. Sistemas compostos são tratados aditivamente no diagrama de Bode.

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

$$\rho e^{i\phi} = \rho_1 e^{i\phi_1} \cdot \rho_2 e^{i\phi_2} \cdot \rho_3 e^{i\phi_3} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 e^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}$$

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \quad \log \rho = \log \rho_1 + \log \rho_2 + \log \rho_3$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$