8. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

8.1 Conceito de estado

(A apresentação será feita no domínio do tempo contínuo; as diferenças com o caso discreto são pequenas e serão apresentadas posteriormente).

A representação entrada/saída de um sistema linear só é válida quando, no tempo inicial, o sistema está no estado estacionário. Assim é válida a seguinte relação:

$y = H\, u$

que indica que, através do operador H, pode-se determinar y(t) para qualquer u(t).

Quando o sistema não está inicialmente em estado estacionário é necessário conhecer as condições iniciais para poder determinar o comportamento frente a uma entrada u:

O conjunto de condições iniciais que é necessário conhecer para poder determinar y(t) univocamente em $t \in [t_0, \infty)$ constitui o **estado inicial do sistema**.

Ao aplicar uma força externa (entrada u(t), $t \in [t_0, \infty)$) a uma partícula (sistema) no tempo t_0, o seu movimento (saída y(t)) para $t \geq t_0$, não estará univocamente determinado enquanto não forem conhecidas, também, a posição e a velocidade dessa partícula no tempo t_0. Estas duas informações constituem o **estado** do sistema no tempo t_0.

“O estado de um sistema no tempo t_0 é o conjunto de informações em t_0 que, junto com a entrada u(t), $t \in [t_0, \infty)$, determina univocamente o comportamento do sistema para $t \geq t_0$”.

- A escolha do estado não é **única.**
- O estado é uma **quantidade auxiliar** que pode **não ser facilmente identificável em termos físicos.**
- O estado pode estar constituído por um **conjunto finito** ou **infinito** de valores.

Considerando só o caso de estados descritos por um número finito de variáveis, eles serão representados por vetores $\underline{x}(t)$, chamados **vetores de estado**.

Cada elemento do vetor é uma **variável de estado**. O espaço de dimensão “n” em que $\underline{x}(t)$ pode variar é o **espaço de estados**.

8.2 Equações dinâmicas

Equações dinâmicas formam um conjunto de equações que descrevem univocamente as relações entre as **variáveis de entrada**, de **saída** e de **estado**.

$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}[\underline{x}(t),\ \underline{u}(t),\ t]$ **equação de estado**

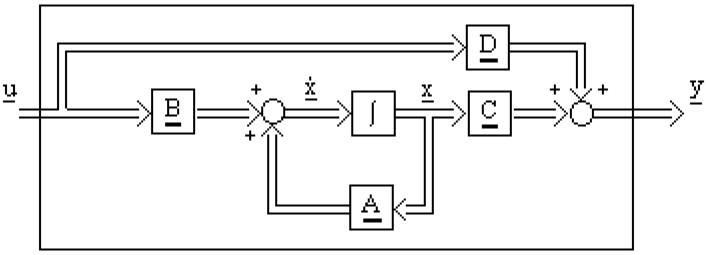
$\underline{y}(t) = \underline{g}[\underline{x}(t), \underline{u}(t), t]$ **equação das saídas**

No caso de sistemas lineares

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t)\ \underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\ \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}(t)\ \underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}(t)\ \underline{u}(t)$$

que, na forma de diagrama de blocos, fica:



Se o sistema for invariante no tempo:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\ \underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\ \underline{u}(t)$$

Solução da equação dinâmica linear homogênea com coeficientes variáveis

Para simplificar a apresentação e facilitar o entendimento, estudaremos o caso homogêneo.

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\ \underline{x}(t)$$

Vamos considerar que a matriz quadrada $\underline{\underline{\Phi}}(t;\ t_o)$ satisfaz

$$\frac{d\underline{\underline{\Phi}}(t;\ t_0)}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\ \underline{\underline{\Phi}}(t;\ t_0)$$

$$\underline{\underline{\Phi}}(t_0;\ t_0) = \underline{\underline{I}}$$

Nesse caso, a solução da equação homogênea é:

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t; t_0)\,\underline{x}(t_0)$$

e $\underline{\underline{\Phi}}$ descreve a transição do estado de $t_0 \rightarrow t$.

$\underline{\underline{\Phi}}(t;\; t_0)$: **matriz de transição de estado**

A solução pode ser verificada por substituição direta:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\underline{\underline{\Phi}}(t;\; t_0)\underline{x}(t_0)\right] = \frac{d}{dt}\left[\underline{\underline{\Phi}}(t;\; t_0)\right]\; \underline{x}(t_0) = \underline{\underline{A}}(t)\; \underbrace{\underline{\underline{\Phi}}(t;\; t_0)\underline{x}(t_0)}_{\underline{x}(t)} = \underline{\underline{A}}(t)\; \underline{x}(t)$$

E a condição inicial: $\underline{x}(t_0) = \underline{\underline{\Phi}}(t_0;\; t_0)\; \underline{x}(t_0)$, pois $\underline{\underline{\Phi}}(t_0;\; t_0) = \underline{\underline{I}}$.

A forma matemática de $\underline{\underline{\Phi}}(t;\; t_0)$ pode ser obtida integrando sucessivamente a equação homogênea:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\; \underline{x}(t)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(t_o) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau)\; \underline{x}(\tau)\; d\tau$$

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\left[\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau)\underline{x}(\tau)d\tau\right]$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)\left[\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_2)\underline{x}(\tau_2)d\tau_2\right]d\tau_1$$

$$\underline{x}(t) = \left[\underline{\underline{I}} + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)d\tau_1\right]\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} \underline{\underline{A}}(\tau_2)\underline{x}(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1$$

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\left\{\left[\underline{\underline{I}} + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)d\tau_1\right]\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} \underline{\underline{A}}(\tau_2)\underline{x}(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\right\}$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)\left\{\left[I + \int_{t_0}^{\tau_1} \underline{\underline{A}}(\tau_2)d\tau_2\right]\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_1} \underline{\underline{A}}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2} (\tau_3)\underline{x}(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2\right\}$$

$$\underline{x}(t) = \left[\underline{\underline{I}} + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} \underline{\underline{A}}(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\right]\underline{x}(t_0) + \ldots$$

Após infinitas integrações chega-se a:

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t;t_0)\underline{x}(t_0) =$$

$$= \left[\underline{\underline{I}} + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} \underline{\underline{A}}(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} \underline{\underline{A}}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2} \underline{\underline{A}}(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \ldots \right] \underline{x}(t_0)$$

Então

$$\underline{\underline{\Phi}}(t;t_0) = \left[\underline{\underline{I}} + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} \underline{\underline{A}}(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{A}}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} \underline{\underline{A}}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2} \underline{\underline{A}}(\tau_3)d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \ldots \right]$$

A série que define a matriz de transição chama-se **matrizante** e converge quando os elementos da matriz $\underline{\underline{A}}$ são limitados no intervalo (t_0, t).

Solução da equação dinâmica linear homogênea com coeficientes constantes

Os coeficientes constantes indicam sistema invariante no tempo. Assim a análise pode ser feita para qualquer t_0, em particular $t_0 = 0$.

Neste caso

$$\underline{\underline{\Phi}}(t;0) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}}\, t + \underline{\underline{A}}^2 \frac{t^2}{2!} + \underline{\underline{A}}^3 \frac{t^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{\underline{A}}^i \frac{t^i}{i!} = e^{\underline{\underline{A}}\, t}$$

A função **matriz exponencial** é definida desta forma ao comparar o somatório anterior com o desenvolvimento em série de Taylor da função **escalar** exponencial, e^{at}, em torno do pondo t = 0:

$$e^{at} = 1 + a \cdot t + \frac{a^2}{2!} \cdot t^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \cdot t^i$$

Então a solução de

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}(t) \qquad\qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

é

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}\, t}\, \underline{x}_0$$

Para um tempo inicial arbitrário t_0

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)}\, \underline{x}(t_0) \qquad\qquad \underline{\underline{\Phi}}(t - t_0) = e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)}$$

Cálculo da matriz de transição de um sistema invariante no tempo

Há diversas formas de se calcular a matriz de transição de estado de um sistema invariante no tempo (transformada inversa de Laplace, decomposição matricial, série de Taylor, teorema de Cayley-Hamilton, etc.). Uma delas, válida para valores característicos de $\underline{\underline{A}}$ diferentes, é usando o Teorema de Sylvester que, para qualquer função polinomial da matriz quadrada $\underline{\underline{A}}$, estabelece

$$f\left(\underline{\underline{A}}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\lambda_i\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_j \underline{\underline{I}}}{\lambda_i - \lambda_j} \qquad \rightarrow \qquad e^{\underline{\underline{A}}t} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_j \underline{\underline{I}}}{\lambda_i - \lambda_j}$$

onde

λ_i: valores característicos de $\underline{\underline{A}}$, raízes de $\left|\underline{\underline{A}} - \lambda\, \underline{\underline{I}}\right| = 0$. Para valores característicos iguais aplica-se a regra de L'Hopital para resolver a indeterminação.

Solução da equação dinâmica linear heterogênea com coeficientes constantes

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(t)$$

Introduzindo uma mudança de variáveis

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}\left(t - t_0\right)\underline{z}(t) \qquad \qquad \underline{z}(t) = \underline{\underline{\Phi}}^{-1}\left(t - t_0\right)\underline{x}(t)$$

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \frac{d\underline{\underline{\Phi}}}{dt}\underline{z}(t) + \underline{\underline{\Phi}}\frac{d\underline{z}(t)}{dt} = (\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{\Phi}})\underline{z}(t) + \underline{\underline{\Phi}}\ \frac{d\underline{z}}{dt} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t) + \underline{\underline{\Phi}}\ \frac{d\underline{z}}{dt}$$

Então

$$\underline{\underline{\Phi}}\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d\underline{x}}{dt} - \underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{\underline{B}}\ \underline{u}$$

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \underline{\underline{\Phi}}^{-1}\underline{\underline{B}}\ \underline{u} \quad \Rightarrow \quad \underline{z}(t) = \underline{z}\left(t_0\right) + \int_{t_o}^{t} \underline{\underline{\Phi}}^{-1}\left(\tau - t_0\right)\underline{\underline{B}}\ \underline{u}(\tau)\ d\tau$$

Multiplicando à esquerda por $\underline{\underline{\Phi}}\left(t - t_0\right)$

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}\left(t - t_0\right)\underline{z}\left(t_0\right) + \underline{\underline{\Phi}}\left(t - t_0\right)\int_{t_0}^{t} \underline{\underline{\Phi}}^{-1}\left(\tau - t_0\right)\underline{\underline{B}}\ \underline{u}(\tau)\ d\tau$$

Como $\underline{\underline{\Phi}}\left(t-t_0\right)=e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)}$, então

$$\underline{\underline{\Phi}}^{-1}\left(\tau-t_0\right)=e^{-\underline{\underline{A}}\,(\tau-t_0)}=e^{\underline{\underline{A}}(t_0-\tau)}=\underline{\underline{\Phi}}\left(t_0-\tau\right)$$

e

$$\underline{\underline{\Phi}}\left(t-t_0\right)\cdot\underline{\underline{\Phi}}\left(t_0-\tau\right)=e^{\underline{\underline{A}}\,(t-t_0)}\cdot e^{\underline{\underline{A}}\,(t_0-\tau)}=e^{\underline{\underline{A}}\,(t-\tau)}=\underline{\underline{\Phi}}\left(t-\tau\right)$$

Assim

$$\underline{x}(t)=\underline{\underline{\Phi}}\left(t-t_0\right)\underline{z}\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t}\underline{\underline{\Phi}}(t-\tau)\;\underline{\underline{B}}\;\underline{u}(\tau)\;d\tau$$

$$\underline{z}\left(t_0\right)=\underline{\underline{\Phi}}^{-1}\left(t_0-t_0\right)\underline{x}\left(t_0\right)=\underline{x}\left(t_0\right)$$

Então

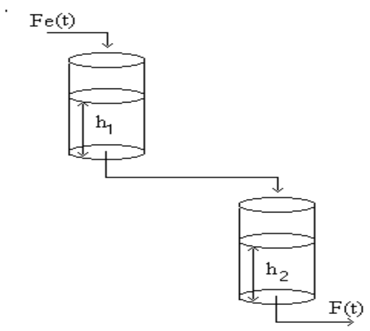
$$\underline{x}\left(t\right)=\underline{\underline{\Phi}}\left(t-t_0\right)\underline{x}\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t}\underline{\underline{\Phi}}\left(t-\tau\right)\underline{\underline{B}}\,\underline{u}\left(\tau\right)d\tau$$

$$\underline{x}\left(t\right)=\underbrace{e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)}\underline{x}\left(t_0\right)}_{(1)}+\underbrace{\int_{t_0}^{t}e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\;\underline{\underline{B}}\;\underline{u}\left(\tau\right)\;d\tau}_{(2)}$$

(1) é a resposta à entrada nula e (2) é a resposta ao estado nulo.

Exemplo:

Para exemplificar os conceitos até agora introduzidos vamos considerar o seguinte sistema multivariável:



O modelo fenomenológico deste sistema é formado pelo seguinte sistema de equações diferenciais não-lineares:

$$A_1\frac{dh_1(t)}{dt}=Fe\left(t\right)-k_1\sqrt{h_1(t)}$$

$$A_2\frac{dh_2(t)}{dt}=k_1\sqrt{h_1(t)}-k_2\sqrt{h_2(t)}$$

Linearizando em torno do estado estacionário é obtido o seguinte modelo linear:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11} \cdot x_1(t) + b_1 \cdot u(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t)$$

com

$$x_1(t) = h_1(t) - \bar{h}_1 \qquad x_2(t) = h_2(t) - \bar{h}_2 \qquad u(t) = F_e(t) - \bar{F}_e$$

$$a_{11} = \frac{-k_1}{2\sqrt{\bar{h}_1}} \cdot \frac{1}{A_1} \qquad b_1 = \frac{1}{A_1}$$

$$a_{21} = \frac{k_1}{2\sqrt{\bar{h}_1}} \cdot \frac{1}{A_2} \qquad a_{22} = \frac{-k_2}{2\sqrt{\bar{h}_2}} \cdot \frac{1}{A_2}$$

Se a variável medida na saída é o nível do segundo tanque:

$$y(t) = h_2(t) - \bar{h}_2$$

Então o modelo pode ser escrito:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \cdot \underline{x}(t)$$

com

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escolhemos valores numéricos para os diferentes parâmetros:

$$A_1 = A_2 = 1$$

$$k_1 = 2 \qquad k_2 = \sqrt{2}$$

$$F = 1 \qquad \bar{h}_1 = 1/4 \qquad \bar{h}_2 = 1/2$$

Resultando em:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para achar a solução geral deste sistema é necessário conhecer a matriz de transição de estados. Utilizando o teorema de Sylvester, primeiramente devemos calcular os valores característicos da matriz $\underline{\underline{A}}$.

$$\left|\underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{I}}\right| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\cdot\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Usando o teorema:

$$e^{\underline{\underline{A}}\cdot(t-t_0)} = e^{-(t-t_0)} \frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{-1-(-2)} + e^{-2(t-t_0)} \frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-2-(-1)} = \begin{pmatrix} e^{-2(t-t_0)} & 0 \\ 2e^{-(t-t_0)} - 2e^{-2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

Assim, a solução geral para a evolução temporal do vetor de estado é

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2(t-t_0)} \cdot x_1(t_0) \\ e^{-(t-t_0)}\left[2\cdot x_1(t_0) + x_2(t_0)\right] - 2\cdot e^{-2(t-t_0)} \cdot x_1(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} e^{-2(t-\tau)} \cdot u(\tau)d\tau \\ \int_{t_0}^{t} \left[2\cdot e^{-(t-\tau)} - 2\cdot e^{-2(t-\tau)}\right]\cdot u(\tau)d\tau \end{pmatrix}$$

e para a evolução temporal da variável de saída é

$$y(t) = e^{-(t-t_0)}\left[2\cdot x_1(t_0) + x_2(t_0)\right] - 2\cdot e^{-2(t-t_0)} \cdot x_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} 2\cdot e^{-(t-\tau)} \cdot u(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} 2\cdot e^{-2(t-\tau)} \cdot u(\tau)d\tau$$

Observa-se que o conhecimento do **estado inicial**, $\underline{x}(t_0)$, permite determinar a saída futura, $y(t)$, para qualquer entrada, $u(t)$, para $t \geq t_0$.

8.3 Representação de estado para sistemas discretos

Os sistemas discretos estão caracterizados por vetores de estado em função do tempo discreto

$$\underline{x}(k) = \left[\underline{x}_1(k) \cdots \underline{x}_n(k)\right]^T$$

As equações dinâmicas têm, em geral, a forma:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}\left[\underline{x}(k), \underline{u}(k), k\right]$$

$$\underline{y}(k) = \underline{g}\left[\underline{x}(k), \underline{u}(k)\right]$$

Para sistemas lineares

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\underline{A}}(k)\ \underline{x}(k) + \underline{\underline{B}}(k)\ \underline{u}(k)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{\underline{C}}(k)\ \underline{x}(k) + \underline{\underline{D}}(k)\ \underline{u}(k)$$

No caso de sistemas invariantes no tempo

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(k) + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(k)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{\underline{C}}\ \underline{x}(k) + \underline{\underline{D}}\ \underline{u}(k)$$

A solução no caso homogêneo, linear e autônomo é obtida por um processo iterativo:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(k) \qquad\qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$\underline{x}(1) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}_0$$

$$\underline{x}(2) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(1) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}\ \underline{x}_0 = \underline{\underline{A}}^2\ \underline{x}_0$$

$$\vdots$$

$$\underline{x}(k) = \underline{\underline{A}}^k\ \underline{x}_0$$

$\underline{\underline{A}}^k$ é a matriz de transição de estado.

Também pode ser calculada usando o teorema de Sylvester

$$\underline{\underline{A}}^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_j\ \underline{\underline{I}}}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$$

A estabilidade deste sistema está garantida se todos os valores característicos de $\underline{\underline{A}}$ estão dentro do círculo de raio unitário, pois para o sistema estável $\lim_{k \to \infty} \underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{0}} = \lim_{k \to \infty} \underline{\underline{P}}\ \underline{\underline{\Lambda}}^k\ \underline{\underline{P}}^{-1}$ e, portanto, $\lim_{k\to\infty} \underline{\underline{\Lambda}}^k = \underline{\underline{0}}$ que ocorre quando $|\lambda_i| < 1$.

A solução no caso heterogêneo é obtida segundo:

$$\underline{x}(1) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}_0 + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(0)$$

$$\underline{x}(2) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(1) + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(1) = \underline{\underline{A}}\left[\underline{\underline{A}}\ \underline{x}_0 + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(0)\right] + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(1) = \underline{\underline{A}}^2\ \underline{x}_0 + \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(0) + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(1)$$

$$\vdots$$

$$\underline{x}(k) = \underline{\underline{A}}^k\ \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{A}}^{k-i-1}\ \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(i)$$

8.4 Sistemas de dados amostrados

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\ \underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\ \underline{u}(t)$$

Considerando

$$u(t) = u(k) \qquad\qquad k < t \leq k+1$$

onde k deve ser lido como k T_a, sendo T_a o tempo de amostragem e k + 1é (k+1) T_a, vem

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}(t-k)} x(k) + \left[\int_k^t e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\ \underline{\underline{B}}\ d\tau\right] \underline{u}(k)$$

Definindo

$$\underline{\underline{\Gamma}}(t-k) = \int_k^t e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\, \underline{\underline{B}}\, d\tau$$

Resulta

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t-k)\ \underline{x}(k) + \underline{\underline{\Gamma}}(t-k)\ u(k) \qquad\qquad k < t \leq k+1$$

Para t= k+1

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\underline{\Phi}}(T_a)\, \underline{x}(k) + \underline{\underline{\Gamma}}(T_a)\, u(k)$$

onde

$$\underline{\underline{\Phi}}(T_a) = e^{\underline{\underline{A}}\, T_a}$$

$$\underline{\underline{\Gamma}}(T_a) = \int_{kT_a}^{(k+1)T_a} e^{\underline{\underline{A}}[(k+1)T_a - \tau]}\, \underline{\underline{B}}\, d\tau$$

Fazendo

$$(k+1)T_a - \tau = \mu$$

obtém-se

$$\underline{\underline{\Gamma}}(T_a) = \int_0^{T_a} e^{\underline{\underline{A}}\, \mu}\, \underline{\underline{B}}\, d\mu$$

A equação de estados ficou da forma discreta, com coeficientes que dependem do tempo de amostragem, T_a. A solução é

$$\underline{x}(k) = \underline{\underline{\Phi}}(T_a)^k\ \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{\Phi}}(T_a)^{k-i-1}\ \underline{\underline{\Gamma}}(T_a)\ \underline{u}(i)$$

Entretanto

$$\underline{\underline{\Phi}}(T_a)^k = \left(e^{\underline{\underline{A}}T_a}\right)^k = e^{\underline{\underline{A}}\ k\ T_a} = \underline{\underline{\Phi}}(kT_a)$$

Então a solução é da forma

$$\underline{x}(k) = \underline{\underline{\Phi}}(kT_a)\ \underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{\Phi}}\left[(k-i-1)T_a\right]\ \underline{\underline{\Gamma}}(T_a)\ \underline{u}(i)$$

8.5 Diagonalização

As equações de estado

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \underline{x} + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}$$

estão totalmente acopladas através da forma “cheia” da matriz $\underline{\underline{A}}$.

A solução e visualização das respostas ficariam mais simples e claras se a matriz $\underline{\underline{A}}$ fosse diagonal. Desta forma as equações ficariam totalmente desacopladas.

O vetor de estados pertence a um espaço vetorial, o espaço de estados, no qual, através de uma transformação linear podemos mudar a base e, conseqüentemente, a sua representação. Vamos considerar, só por simplicidade de apresentação, o sistema na sua forma homogênea.

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}$$

Através de uma transformação linear, definimos novas variáveis de estado:

$$\underline{x} = \underline{\underline{P}}\ \underline{x}^*$$

e assim,

$$\frac{d\left(\underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}^*\right)}{dt} = \underline{\underline{P}} \cdot \frac{d\left(\underline{x}^*\right)}{dt} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} \cdot \underline{x}^* \Rightarrow \frac{d\underline{x}^*}{dt} = \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{P}}\ \underline{x}^* = \underline{\underline{\Lambda}}\ \underline{x}^*$$

com $\underline{\underline{\Lambda}}$ diagonal.

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Desta forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1{}^*}{dt} &= \lambda_1 x_1{}^* \\ \frac{dx_2{}^*}{dt} &= \lambda_2 x_2{}^* \\ &\vdots \\ \frac{dx_n{}^*}{dt} &= \lambda_n x_n{}^* \end{aligned}\right\} x_i{}^* = e^{\lambda_i (t-t_0)} x_i{}^* (t_0)$$

Isto é

$$\underline{x}^*(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 (t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 (t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n (t-t_0)} \end{bmatrix} \underline{x}^*(t_0) = e^{\underline{\underline{\Lambda}}(t-t_0)} \underline{x}^*(t_0)$$

Voltando às variáveis originais pode-se mostrar outra forma de calcular a matriz de transição de estado.

$$\underline{x} = \underline{\underline{P}}\ \underline{x}^*$$

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{P}}\ e^{\underline{\underline{\Lambda}}\ (t-t_0)} \underline{x}^*(t_0)$$

$$\underline{x}^*(t) = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{x}(t)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{P}}\ e^{\underline{\underline{\Lambda}}(t-t_0)} \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{x}(t_0) = e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)} \underline{x}(t_0)$$

Isto é, a matriz de transição de estado pode ser calculada também segundo:

$$e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)} = \underline{\underline{P}}\, e^{\underline{\underline{\Lambda}}(t-t_0)}\, \underline{\underline{P}}^{-1}$$

Vamos ver como é constituída a matriz $\underline{\underline{P}}$ e o que são os λ.

$$\underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\Lambda}} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}\ \underline{\underline{\Lambda}} \\ \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\Lambda}}\ \underline{\underline{P}}^{-1} \end{cases}$$

Escrevendo $\underline{\underline{P}}$ em termos de vetores coluna

$\underline{\underline{P}} = \left[\underline{v}_{d1} \vdots \underline{v}_{d2} \vdots \cdots \vdots \underline{v}_{dn}\right] \equiv \left[\underline{v}_{d1}\ \underline{v}_{d2} \cdots \underline{v}_{dn}\right]$ (isto quer dizer que na partição da matriz, as linhas pontilhadas vão ficar implícitas)

temos, para o primeiro caso:

$$\underline{\underline{A}}\left[\underline{v}_{d1} \cdots \underline{v}_{dn}\right] = \left[\underline{v}_{d1} \cdots \underline{v}_{dn}\right]\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\left(\underline{\underline{A}}\ \underline{v}_{d1} \cdots \underline{\underline{A}}\ \underline{v}_{dn}\right) = \left(\lambda_1\ \underline{v}_{d1} \cdots \lambda_n\ \underline{v}_{dn}\right)$$

Igualando as colunas destas matrizes, a relação geral é:

$$\underline{\underline{A}}\ \underline{v}_{dj} = \lambda_j\ \underline{v}_{dj} \qquad j = 1,\ \ldots,\ n$$

ou

$$\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_j \underline{\underline{I}}\right)\underline{v}_{dj} = \underline{0}$$

Este sistema de equações algébricas homogêneo tem solução não trivial para

$$\left|\underline{\underline{A}} - \lambda_j \underline{\underline{I}}\right| = 0$$

denominado **polinômio (equação) característico(a)** da matriz $\underline{\underline{A}}$.

Isto é, os λ_j são os valores característicos da matriz $\underline{\underline{A}}$.

Os $\underline{v}_{dj}$ são os vetores característicos à direita da matriz $\underline{\underline{A}}$.

Escrevendo $\underline{\underline{P}}^{-1}$ em termos de seus vetores linha temos, para o segundo caso:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_{e1}^T \\ \underline{v}_{e2}^T \\ \vdots \\ \underline{v}_{en}^T \end{bmatrix}\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \underline{v}_{e1}^T \\ \underline{v}_{e2}^T \\ \vdots \\ \underline{v}_{en}^T \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_{e1}^T\ \underline{\underline{A}} \\ \underline{v}_{e2}^T\ \underline{\underline{A}} \\ \vdots \\ \underline{v}_{en}^T\ \underline{\underline{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \underline{v}_{e1}^T \\ \lambda_2 \underline{v}_{e2}^T \\ \vdots \\ \lambda_n \underline{v}_{en}^T \end{bmatrix}$$

Igualando as linhas destas matrizes

$$\underline{v}_{ej}^{T}\ \underline{\underline{A}} = \lambda_j\ \underline{v}_{ej}^{T} \qquad\qquad j = 1,...,n$$

ou

$$\underline{v}_{ej}^{T}\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_j\ \underline{\underline{I}}\right) = \underline{0}$$

Os $\underline{v}_{ej}^{T}$ são os vetores característicos à esquerda da matriz $\underline{\underline{A}}$.

No caso de valores característicos repetidos a diagonalização não é completa. O resultado é uma matriz bloco-diagonal, onde cada bloco tem as dimensões da multiplicidade do valor característico correspondente. A diagonal principal desses blocos é formada pelo valor característico repetido. A primeira sub-diagonal superior é formada por 1's:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

8.6 Solução Geral no Domínio do Tempo

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(t)$$

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{A}}(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\underline{\underline{A}}(t-\tau)}\ \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(\tau)\ d\tau$$

Substituindo a matriz de transição de estado

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{P}}\ e^{\underline{\underline{\Lambda}}(t-t_0)}\ \underline{\underline{P}}^{-1}\ \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{P}}\ e^{\underline{\underline{\Lambda}}(t-\tau)}\ \underline{\underline{P}}^{-1}\ \underline{\underline{B}}\ \underline{u}(\tau) d\tau$$

Usando a forma definida para as matrizes $\underline{\underline{P}}$ e $\underline{\underline{P}}^{-1}$, abrimos a expressão anterior

$$\underline{x}(t) = \left[\underline{v}_{d1} \ldots \underline{v}_{dn}\right] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{e1}^{T} \\ \underline{v}_{e2}^{T} \\ \vdots \\ \underline{v}_{en}^{T} \end{bmatrix} \underline{x}(t_0) +$$

$$+\int_{t_o}^{t}\left[\underline{v}_{d1}\cdots\underline{v}_{dn}\right]\begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-\tau)} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n(t-\tau)}\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{v}_{e1}^{T}\\ \underline{v}_{e2}^{T}\\ \vdots\\ \underline{v}_{en}^{T}\end{bmatrix}\underline{\underline{B}}\,\underline{u}(\tau)d\tau$$

$$\underline{x}(t)=\left(\underline{v}_{d1}e^{\lambda_1(t-t_0)}\ldots\underline{v}_{dn}e^{\lambda_n(t-t_0)}\right)\begin{pmatrix}v_{e1}^{T}\underline{x}(t_0)\\ \\ v_{en}^{T}\underline{x}(t_0)\end{pmatrix}+\int_{t_o}^{t}\left(\underline{v}_{d1}e^{\lambda_1(t-\tau)}\ldots\underline{v}_{dn}e^{\lambda_n(t-\tau)}\right)\begin{pmatrix}v_{e1}^{T}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{u}(\tau)\\ \\ v_{en}^{T}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{u}(\tau)\end{pmatrix}d\tau$$

Então

$$\underline{x}(t)=\sum_{j=1}^{n}\underline{v}_{dj}\,e^{\lambda_j(t-t_0)}\,\underline{v}_{ej}^{T}\,\underline{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\underline{v}_{dj}e^{\lambda_j(t-\tau)}\,\underline{v}_{ej}^{T}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

Observamos que os dois termos da resposta geral têm a mesma forma: um somatório de termos exponenciais ponderados.

Para facilitar a análise vamos considerar $\underline{u}(t)=\underline{0}$.

$$\underline{x}(t)=\sum_{j=1}^{n}\underline{v}_{dj}\,e^{\lambda_j(t-t_0)}\,\underline{v}_{ej}^{T}\,\underline{x}(t_0)$$

$$\underline{x}(t)=\underline{v}_{d1}\,e^{\lambda_1(t-t_0)}\,\underline{v}_{e1}^{T}\,\underline{x}(t_0)+\ldots+\underline{v}_{dn}\,e^{\lambda_n(t-t_0)}\,\underline{v}_{en}^{T}\,\underline{x}(t_0)$$

Cada termo está associado a um exponencial que é conhecido como **modo** da resposta

Analisando o termo correspondente a cada modo j:

$$\underline{v}_{dj}\,e^{\lambda_j(t-t_0)}\,\underline{v}_{e_j}^{T}\,\underline{x}(t_0)=\begin{pmatrix}v_{dj}^{1}\\ v_{dj}^{2}\\ \vdots\\ v_{dj}^{n}\end{pmatrix}e^{\lambda_j(t-t_0)}\left(v_{ej}^{1}\;v_{ej}^{2}\;\ldots\;v_{ej}^{n}\right)\begin{pmatrix}x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\\ \vdots\\ x_n(t_0)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}v_{dj}^{1}e^{\lambda_j(t-t_o)}\left[v_{ej}^{1}x_1(t_0)+v_{ej}^{2}x_2(t_0)+\ldots+v_{ej}^{n}x_n(t_0)\right]\\ v_{dj}^{2}e^{\lambda_j(t-t_o)}\left[v_{ej}^{1}x_1(t_0)+v_{ej}^{2}x_2(t_0)+\ldots+v_{ej}^{n}x_n(t_0)\right]\\ \vdots\\ v_{dj}^{n}e^{\lambda_j(t-t_o)}\left[v_{ej}^{1}x_1(t_0)+v_{ej}^{2}x_2(t_0)+\ldots+v_{ej}^{n}x_n(t_0)\right]\end{bmatrix}$$

onde

$$\underline{v}_{dj}=\begin{bmatrix}v_{dj}^{1}\\ \vdots\\ v_{dj}^{n}\end{bmatrix}\qquad\qquad \underline{v}_{ej}^{T}=\left[v_{ej}^{1}\ldots v_{ej}^{n}\right]$$

Observamos que o modo vinculado a λ_j contribui de forma diferente para cada variável de estado.

Para $x_i(t)$ a contribuição é:

$v_{dj}^{i} e^{\lambda_j(t-t_o)}\left[v_{ej}^{1}x_1(t_0)+v_{ej}^{2}x_2(t_0)+\ldots+v_{ej}^{n}x_n(t_0)\right]$

$\underline{v}_{dj}$: é a **composição** do modo j e indica de que forma ele contribui para a resposta temporal de cada variável de estado.

Como indicado acima, o componente v_{dj}^{i}, do vetor $\underline{v}_{dj}$ pondera a contribuição do modo j à variável de estado $x_i(t)$.

$\underline{v}_{ej}^{T}\, x(t_0)$: é a **ativação** do modo.

A ativação é única para cada modo j, sendo a mesma para todas as variáveis de estado.

Para o sistema diagonalizado

$$\underline{x}^*(t) = e^{\underline{\underline{\Lambda}}(t-t_o)}\,\underline{x}^*(t_0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)}x_1^*(t_0) \\ e^{\lambda_2(t-t_0)}x_2^*(t_0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n(t-t_0)}x_n^*(t_0) \end{bmatrix}$$

cada modo contribui, com peso unitário (1) para uma única variável de estado. A ativação do modo correspondente vem dada diretamente pela condição inicial dessa variável de estado.

Comparar esta análise do comportamento dinâmico com a análise do comportamento estático baseada nos valores singulares da matriz de ganhos estáticos.

Nota: todo o desenvolvimento baseou-se em valores característicos diferentes. Como já foi indicado, quando há multiplicidade não é possível obter a diagonalização completa; só consegue-se uma diagonalização aproximada na forma chamada de Jordan. Mais adiante vamos tratar o problema geral da obtenção de diferentes representações de estado através de transformações lineares.

8.7 Controlabilidade e observabilidade

Estes conceitos, aplicáveis tanto a sistemas lineares como não-lineares, são semelhantes para os casos contínuo e discreto no tempo. Vamos estudar o caso contínuo.

Para analisar quais as possibilidades de controlar um sistema linear manipulando variáveis $\underline{u}(t)$, observamos a forma geral da resposta temporal

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \underline{v}_{d\,j}\, e^{\lambda_j (t-t_0)}\, \underline{v}_{ej}^T\, \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \underline{v}_{d\,j}\, e^{\lambda_j (t-\tau)}\, \underline{v}_{ej}^T\, \underline{\underline{B}}\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$$

É claro que $\underline{u}(t)$ só afeta o segundo termo, e nele vamos concentrar a nossa análise.

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \underline{v}_{d\,j}\, e^{\lambda_j (t-\tau)}\, \underline{v}_{ej}^T\, \underline{\underline{B}}\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$$

Escrevendo $\underline{\underline{B}} = [\underline{b}_1\ \underline{b}_2 \cdots \underline{b}_n]$ vem

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \underline{v}_{d\,j}\, e^{\lambda_j (t-\tau)}\, \underline{v}_{ej}^T \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \cdots & \underline{b}_m \end{pmatrix} \underline{u}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \cdots + \int_{t_0}^{t} \underline{v}_{d\,j}\, e^{\lambda_j (t-\tau)}\, \underline{v}_{ej}^T \begin{pmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \cdots & \underline{b}_m \end{pmatrix} \underline{u}(\tau)\, d\tau + \cdots$$

Se

$$\underline{v}_{ej}^T \begin{pmatrix} \underline{b}_1\ \underline{b}_2\ \cdots\ \underline{b}_m \end{pmatrix} = \underline{v}_{ej}^T\, \underline{\underline{B}} = \underline{0}^T$$

as variáveis de entrada $\underline{u}(\tau)$ não influenciam o modo j: **este modo não é controlável**.

Seja quais forem os sinais de entrada há uma característica estrutural do sistema, refletida no fato de que $\underline{v}_{ej}^T\, \underline{\underline{B}} = \underline{0}^T$, que determina a não controlabilidade do modo (e, conseqüentemente, do sistema).

Na forma canônica diagonal, onde cada variável de estado está associada a um único modo, a variável x_j^* não é acessível via $\underline{u}(t)$.

$$\frac{d\underline{x}^*}{dt} = \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{x}^* + \underline{\underline{P}}^{-1}\, \underline{\underline{B}}\, \underline{u}$$

$$\frac{dx_j^*}{dt} = \lambda_j\, x_j^* + \underline{v}_{ej}^T\, \underline{\underline{B}}\, \underline{u} = \lambda_j\, x_j^* + \underline{0}^T\, \underline{u} = \lambda_j\, x_j^*$$

Uma forma prática de se determinar a controlabilidade de um sistema linear é verificando o **posto** da sua **matriz de controlabilidade**

$$\underline{\underline{K}} \stackrel{\Delta}{=} \left[\underline{\underline{B}}\ \ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\ \ \underline{\underline{A}}^2\, \underline{\underline{B}} \cdots \underline{\underline{A}}^{n-1}\, \underline{\underline{B}}\right]$$

O sistema é controlável se

posto $\underline{\underline{K}} = n$

É interessante mostrar uma justificativa geométrica para este resultado. Considerando um sistema de segunda ordem, inicialmente no ponto $\underline{0}$ e com uma única entrada manipulada.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x} + \underline{b}\ u$$

Durante um intervalo de tempo muito pequeno, Δt, aplica-se o controle u_I, que determina um deslocamento $\Delta \underline{\underline{x}}_I$ no vetor de estados.

$$\Delta \underline{x}_I \approx \underline{b}\ u_I\ \Delta t$$

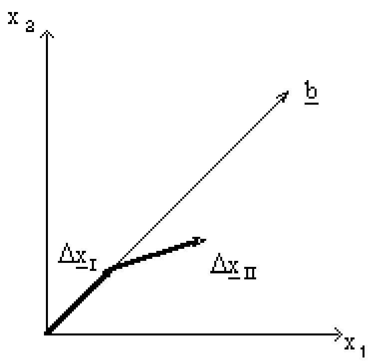
Durante o próximo Δt, aplica-se u_{II}, que determina, a partir da nova posição, o deslocamento $\Delta \underline{\underline{x}}_{II}$.

$$\Delta \underline{x}_{II} \approx \underline{\underline{A}}\ \Delta \underline{x}_I \Delta t + \underline{b}\ u_{II}\ \Delta t = \underline{\underline{A}}\ \ \underline{b}\ u_I\ (\Delta t)^2 + \underline{b}\ u_{II}\ \Delta t$$

Para poder alcançar qualquer ponto do plano x_1, x_2 é necessário que os vetores $\Delta \underline{x}_I$ e $\Delta \underline{x}_{II}$ não tenham a mesma direção; isto é, que sejam linearmente independentes. Para isso, a matriz

$$\left\lfloor \underline{b} \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} \right\rfloor$$

tem que ter as suas duas colunas independentes ou, o que é a mesma coisa, seu posto tem que ser 2.



Em termos da possibilidade de **observar** um sistema linear através de $\underline{y}(t)$, lembramos que, considerando $\underline{u}(t) = \underline{0}$:

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\ \underline{x}(t) = \underline{\underline{C}}\ \underline{\underline{P}}\ \underline{x}^*(t) = \underline{\underline{C}}\left[\underline{v}_{d1}\ \underline{v}_{d2} \cdots \underline{v}_{dn}\right]\begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ \vdots \\ x_n^*(t) \end{bmatrix} = \left[\underline{\underline{C}}\underline{v}_{d1}\ \underline{\underline{C}}\underline{v}_{d2} \cdots \underline{\underline{C}}\underline{v}_{dn}\right]\begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} x_1^*(t_0) \\ e^{\lambda_2(t-t_0)} x_2^*(t_0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n(t-t_0)} x_n^*(t_0) \end{bmatrix}$$

Se a matriz $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{P}}$ tem a j-ésima coluna nula, $\underline{\underline{C}}\,\underline{v}_{dj} = \underline{0}$, o modo j não influência a saída $\underline{y}(t)$ e, conseqüentemente, não pode ser observado. O sistema **não é observável**.

Uma forma prática de se determinar a observabilidade de um sistema linear é verificando o posto da sua **matriz de observabilidade**.

$$\underline{\underline{L}} \stackrel{\Delta}{=} \left[\underline{\underline{C}}^T \quad \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{C}}^T \quad \left(\underline{\underline{A}}^2\right)^T \underline{\underline{C}}^T \quad \cdots \quad \left(\underline{\underline{A}}^{n-1}\right)^T \underline{\underline{C}}^T \right]$$

O sistema é **observável** se

posto $\underline{\underline{L}} = n$

A definição de controlabilidade é:

"Um sistema é controlável se e só se, para todo estado inicial, $\underline{x}(t_0)$, existe uma entrada contínua por partes, $\underline{u}(t_0, t_1]$ tal que $\underline{x}(t_1) = \underline{0}$ para algum t_1 finito".

A definição de observabilidade é:

"Um sistema é observável se e só se, para todo $t_1 \geq t_0$, a observação de $\underline{y}(t_0, t_1]$, para qualquer $\underline{u}(t_0, t_1]$ conhecido, permite calcular $\underline{x}(t_0)$".

Quando o sistema está representado na forma diagonal, cada variável de estado está vinculada a um único modo. Então, com essas variáveis podem acontecer 4 situações diferentes.

1) O modo é controlável é observável

$$\frac{dx_j^*}{dt} = \lambda_j x_j + \underline{v}_{ej}^T \underline{\underline{B}}\, \underline{u}$$

$$\underline{y}(t) = \left[\cdots \ \underline{\underline{C}}\,\underline{v}_{dj} \cdots \right] \begin{bmatrix} \vdots \\ e^{\lambda_j (t-t_0)} x_j^*(t_0) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2) O modo é controlável e não observável

$$\frac{dx_j^*}{dt} = \lambda_j x_j + \underline{v}_{ej}^T \underline{\underline{B}}\, \underline{u}$$

$$\underline{y}(t) = \left[\cdots \ \underline{0} \cdots \right] \begin{bmatrix} \vdots \\ e^{\lambda_j (t-t_0)} x_j^*(t_0) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

3) O modo é não controlável e observável

$$\frac{dx_j^*}{dt} = \lambda_j x_j + \underline{0}^T \ \underline{u}$$

$$\underline{y}(t) = \left[\cdots \ \underline{\underline{C}}\,\underline{v}_{dj} \cdots \right] \begin{bmatrix} \vdots \\ e^{\lambda_j (t-t_0)} x_j^*(t_0) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

4) O modo não é nem controlável nem observável

$$\frac{dx_j^*}{dt} = \lambda_j \, x_j + \underline{0}^T \, \underline{u}$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \cdots & \underline{0} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ e^{\lambda_j (t - t_0)} x_j^*(t_0) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Se fizermos a partição do vetor de estados nas quatro categorias possíveis obtemos:

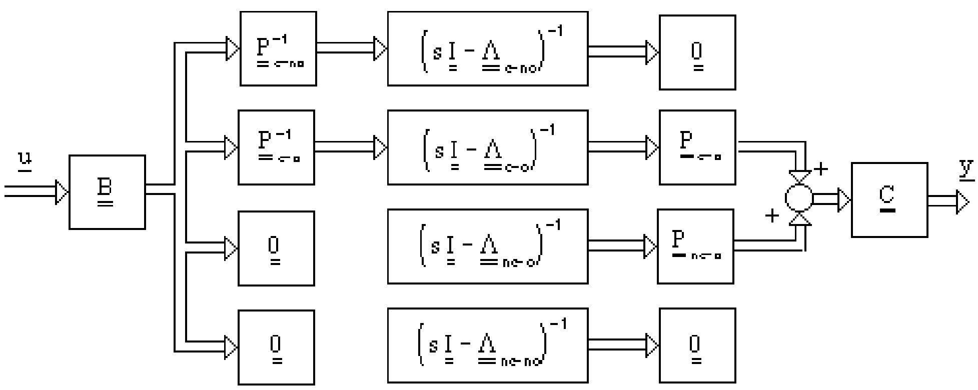
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \underline{x}^*_{c-o} \\ \underline{x}^*_{c-no} \\ \underline{x}^*_{nc-o} \\ \underline{x}^*_{nc-no} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Lambda}}_{c-o} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\Lambda}}_{c-no} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\Lambda}}_{nc-o} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\Lambda}}_{nc-no} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^*_{c-o} \\ \underline{x}^*_{c-no} \\ \underline{x}^*_{nc-o} \\ \underline{x}^*_{nc-no} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}^{-1}_{c-o} \\ \underline{\underline{P}}^{-1}_{c-no} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \underline{\underline{B}} \, \underline{u}$$

$$\underline{y} = \underline{\underline{C}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_{c-o} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{P}}_{nc-o} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^*_{c-o} \\ \underline{x}^*_{c-no} \\ \underline{x}^*_{nc-o} \\ \underline{x}^*_{nc-no} \end{bmatrix}$$

Transformando por Laplace

$$\begin{aligned} \underline{x}^*_{c-o} &= \left(s\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Lambda}}_{c-o}\right)^{-1} \underline{\underline{P}}^{-1}_{c-o} \, \underline{\underline{B}} \, \underline{u} \\ \underline{x}^*_{c-no} &= \left(s\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Lambda}}_{c-no}\right)^{-1} \underline{\underline{P}}^{-1}_{c-no} \, \underline{\underline{B}} \, \underline{u} \\ \underline{x}^*_{nc-o} &= \left(s\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Lambda}}_{nc-o}\right)^{-1} \underline{\underline{0}} \, \underline{\underline{B}} \, \underline{u} \\ \underline{x}^*_{nc-no} &= \left(s\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Lambda}}_{nc-no}\right)^{-1} \underline{\underline{0}} \, \underline{\underline{B}} \, \underline{u} \end{aligned}$$

Estas relações podem ser colocadas na forma de diagrama de blocos



O único caminho entre a entrada e a saída fornece

$$\underline{y}(s) = \left[\underline{\underline{C}}\ \underline{\underline{P}}_{c-o} \left(s\ \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Lambda}}_{c-o} \right)^{-1} \underline{\underline{P}}_{c-o}^{-1}\ \underline{\underline{B}} \right] \underline{u}(s)$$

Isto é:

A representação entrada/saída só leva em conta a parte controlável e observável do sistema.

Existem outros conceitos semelhantes com os de controlabilidade e observabilidade, que normalmente são menos exigentes:

- alcançabilidade (*reachability*): o sistema é alcançável se um estado arbitrário pode ser alcançado, através de uma ação de controle conveniente, a partir de qualquer estado inicial.
- estabilizabilidade(*stabilizability*): o sistema é estabilizável se existe uma ação de controle capaz de estabilizar todos os modos instáveis.
- detectabilidade(*detectability*): o sistema é detectável se podem ser observados todos os modos instáveis.

8.8 Realizações

Dado o modelo de um sistema na forma de uma representação entrada/saída é possível gerar um número muito grande (teoricamente infinito) de representações de estado (realizações). A teoria das realizações procura as representações de estado que apresentem características favoráveis em algum sentido. A principal característica desejável é que a dimensão do estado seja mínima: **realização mínima**. Não existe uma realização mínima única. Outras características podem ser associadas, como, por exemplo, a forma diagonal da matriz $\underline{\underline{A}}$.

Outras **formas canônicas** de interesse além da forma **diagonal** (ou modal) são, por exemplo, as formas **controlável** e **observável**.

Vamos considerar um sistema monovariável (só para simplificar a apresentação)

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0\ s^n + b_1\ s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\ s + b_n}{s^n + a_1\ s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\ s + a_n}$$

Forma canônica controlável

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 ; b_{n-1} - a_{n-1} b_0 ; \cdots ; b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \underline{x} + b_0 \, u$$

Forma canônica observável

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + b_0 \, u$$

8.9 Transformações no espaço de estados

Técnicas para passar de um tipo de representação de estados a outro.

Seja o sistema

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}} \, \underline{x} + \underline{b} \, u$$

$$y = \underline{c}^T \, \underline{x}$$

Se o sistema é controlável, a sua matriz de controlabilidade $\underline{\underline{K}}$ tem posto "n".

Se é observável a sua matriz de observabilidade $\underline{\underline{L}}$ tem posto "n".

A equação característica deste sistema é:

$$\left| s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}} \right| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

A partir dos coeficientes desta equação pode-se construir a seguinte matriz:

$$\underline{\underline{W}} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prova-se que a forma canônica controlável é obtida através da seguinte transformação de variáveis:

$\underline{x} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\hat{x}}$ onde $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{W}}$

A forma canônica observável é obtida com a seguinte transformação de variáveis:

$\underline{x} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\hat{x}}$ onde $\underline{\underline{Q}} = \left(\underline{\underline{W}}\,\underline{\underline{L}}^T\right)^{-1}$.