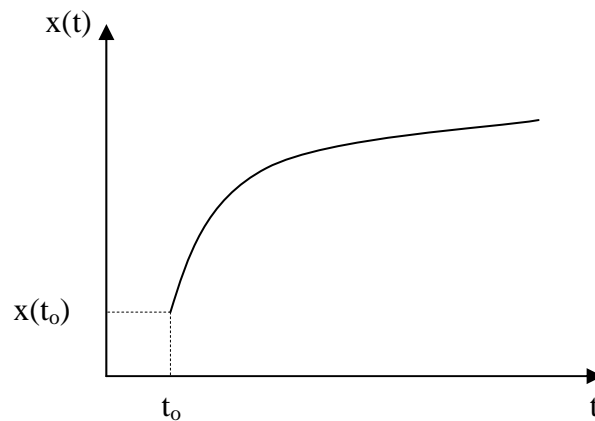


9. COMPORTAMENTO DINÂMICO COMPLEXO

9.1 Movimento no Espaço de Estado

A resposta de um sistema começando em um estado inicial $\underline{x} = \underline{x}(t_0)$, acompanha uma curva num espaço de $(n+1)$ dimensões. Estamos bem acostumados ao tipo de representação: $x = x(t)$



Esta representação utiliza um espaço de duas dimensões. A projeção desta curva no espaço de n dimensões, com coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n , não inclui o tempo explicitamente mais é de grande utilidade na análise de sistemas.

Esta curva é chamada de **trajetória**.

O espaço é o **espaço de estados**.

Naturalmente que uma representação geométrica deste espaço não poderá ser feita para $n > 3$.

Em particular, para fins didáticos, interessa o **plano** de estados, ou **plano de fases**.

Exemplo 1:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A} \underline{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \underline{x} \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A resposta temporal é

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \underline{x}_0$$

Para a matriz \underline{A} , os valores característicos são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Usando o teorema de Sylvester:

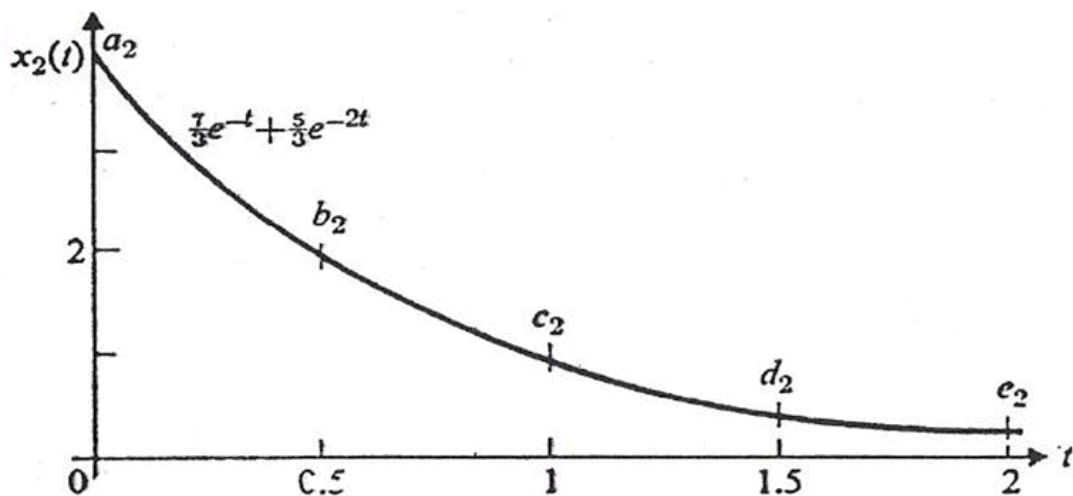
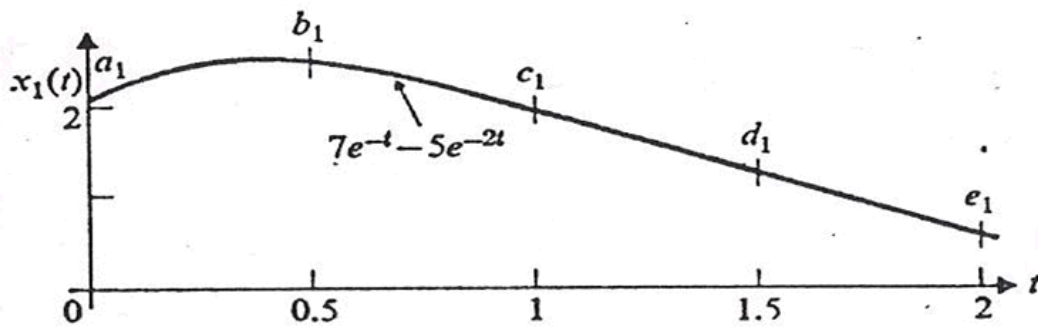
$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-2t}) & \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-2t}) \\ \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t}) & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-2t}) \end{bmatrix} = \underline{P} e^{\underline{\Lambda}t} \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente:

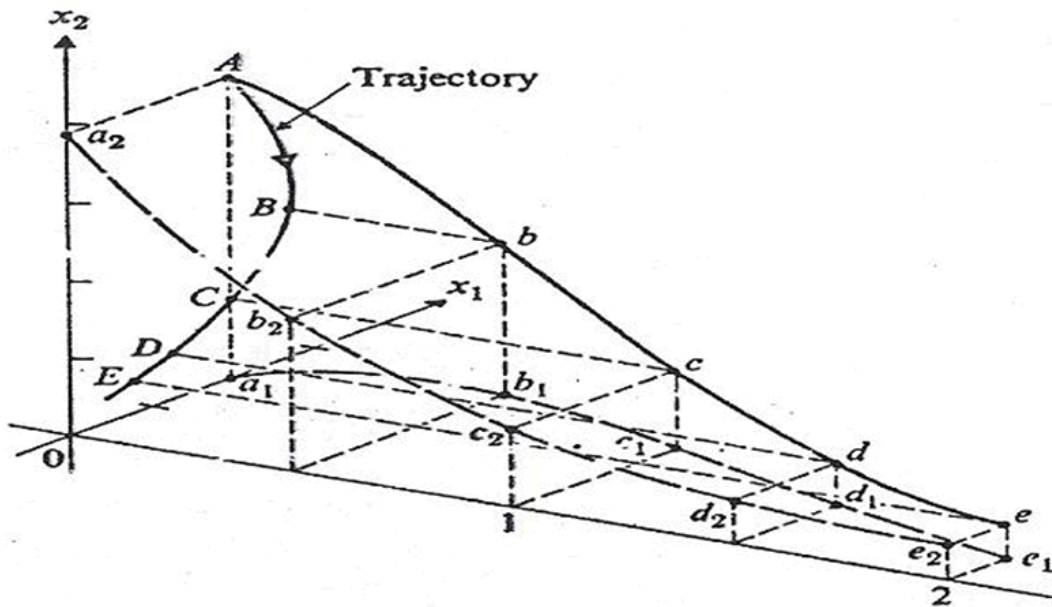
$$x_1(t) = 3e^{-t} \left(\frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) + 3e^{-2t} \left(\frac{1}{6} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right) \quad \text{ou} \quad x_1(t) = 7e^{-t} - 5e^{-2t}$$

$$x_2(t) = 1e^{-t} \left(\frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) - 1e^{-2t} \left(\frac{1}{6} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right) \quad \text{ou} \quad x_2(t) = \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-2t}$$

A representação individual destas respostas tem a forma:



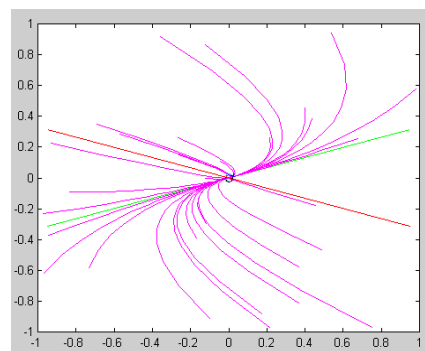
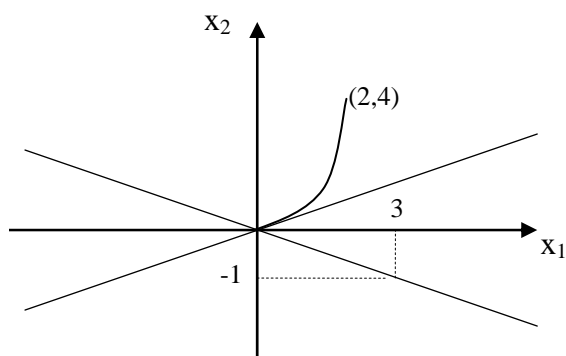
No espaço de 3 dimensões x_1, x_2, t :



Os vetores característicos deste sistema são:

$$\underline{v}_{d_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_{d_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Representados no plano



Considerando uma trajetória iniciando em algum ponto sobre um vetor característico

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = 3e^{-t}$$

$$x_2(t) = e^{-t}$$

As trajetórias que se iniciam nos vetores característicos permanecem sobre eles.

Em geral, para obter a trajetória deve-se eliminar o parâmetro “t” entre as equações da resposta temporal.

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= 7e^{-t} - 5e^{-2t} \\ x_2(t) &= \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-2t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} e^{-t} &= \frac{x_1 + 3x_2}{14} \\ e^{-2t} &= \frac{-x_1 + 3x_2}{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{x_1 + 3x_2}{14} \right)^2 = \frac{-x_1 + 3x_2}{10}$$

Se mudar o ponto inicial, a trajetória deverá ser recalculada.

---X---

Muitas vezes as trajetórias levam a pontos fixos no espaço de estados. Estes pontos são estacionários e uma vez atingidos, o sistema fica neles para “sempre”.

$$\left. \frac{d\underline{x}}{dt} \right|_{\underline{\bar{x}}} = \underline{0} = \underline{f}(\underline{\bar{x}})$$

Estes pontos são chamados de pontos estacionários (de equilíbrio; críticos). Os sistemas não-lineares podem ter um número qualquer de pontos estacionários.

Um exemplo é o reator CSTR com seus 3 pontos.



Para se fazer uma análise do comportamento das trajetórias perto dos pontos estacionários é conveniente deslocá-los para a origem definindo variáveis desvio $\underline{x} = \underline{x}' - \underline{\bar{x}}$. Por problemas de representação, a nossa análise é feita no plano de estados (o espaço de 3 dimensões é difícil de representar).

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= x_{10} \\ x_2 &= x_{20} \end{aligned} \text{ em } t = 0$$

Os pontos estacionários satisfazem

$$0 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$0 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

De todos os pontos resultantes da solução deste sistema, o de maior interesse foi levado à origem

$$0 = f_1(0, 0)$$

$$0 = f_2(0, 0)$$

O comportamento das trajetórias perto dos pontos estacionários pode ser analisado usando a forma linearizada das equações de estado. Em regiões do espaço mais afastadas, essas equações não são válidas.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

A visualização fica mais clara tratando a forma canônica diagonal

$$\frac{d\underline{x}^*}{dt} = \underline{\Lambda} \underline{x}^* \quad \underline{x}^*(0) = \underline{x}_0^*$$

Lembrando

$$\frac{dx_1^*}{dt} = \lambda_1 * x_1^* \Rightarrow x_1^*(t) = e^{\lambda_1 t} x_{10}^*$$

$$\frac{dx_2^*}{dt} = \lambda_2 * x_2^* \Rightarrow x_2^*(t) = e^{\lambda_2 t} x_{20}^*$$

A inclinação das trajetórias vem dada por $\frac{dx_2^*}{dx_1^*} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{x_2^*}{x_1^*}$

Para valores característicos diferentes existem 3 possibilidades:

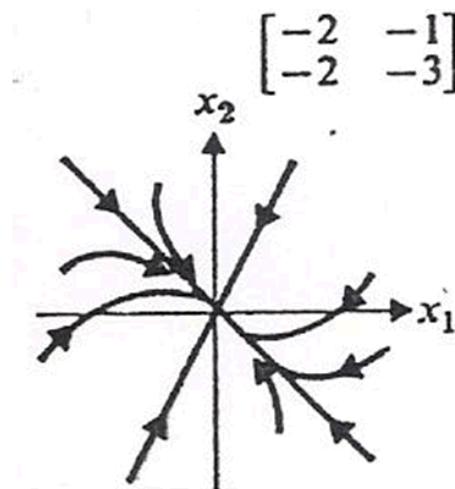
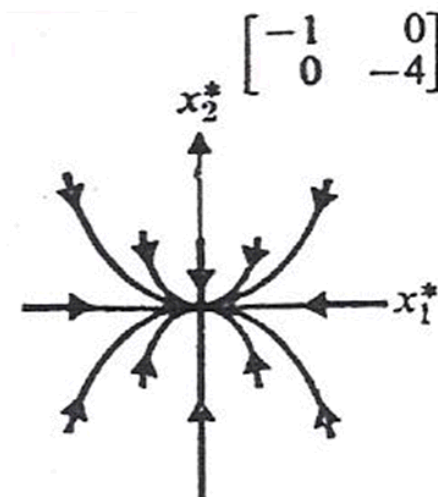
1º) Os dois negativos

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) > 0$$

no 1º e 3º quadrantes $\left(\frac{x_2^*}{x_1^*} \right) > 0 \Rightarrow \frac{dx_2^*}{dx_1^*} > 0$ as trajetórias tem inclinação positiva

no 2º e 4º quadrante $\left(\frac{x_2^*}{x_1^*} \right) < 0 \Rightarrow \frac{dx_2^*}{dx_1^*} < 0$ as trajetórias tem inclinação negativa

Como os valores característicos são negativos sabe-se que as trajetórias vão se aproximar do ponto estacionário, e assim:



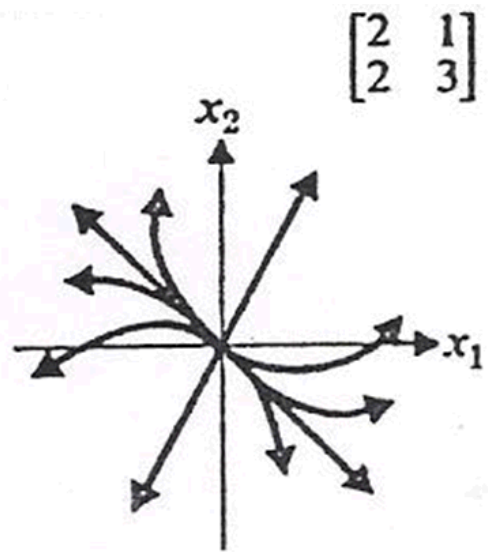
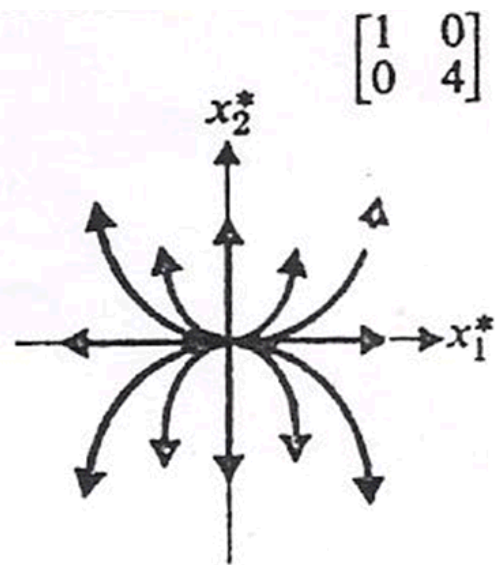
O ponto estacionário é um **nó estável**.

Nota: como $\lambda_2 < \lambda_1$ (e negativos), a variável x_2^* aproxima-se mais rápido da origem que a x_1^* .

2º) Os dois positivos

$$0 < \lambda_2 < \lambda_1 \Rightarrow \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) > 0$$

Observa-se que as inclinações serão as mesmas do caso anterior, porém as trajetórias tenderão a se afastar do ponto estacionário devido aos autovalores positivos.



Um **nó instável**.

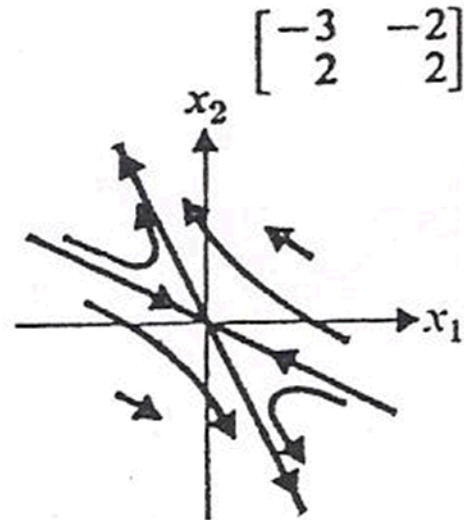
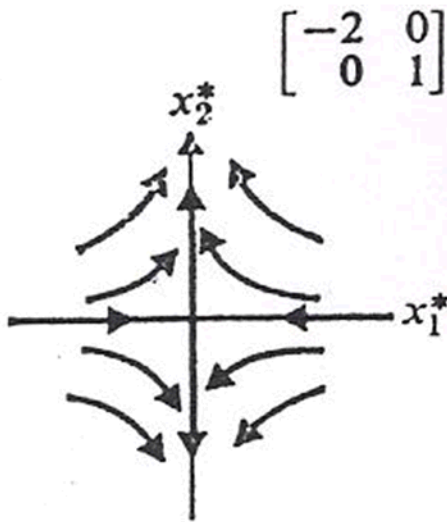
3º) Um positivo e outro negativo

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) < 0$$

no 1º e 3º quadrantes $\left(\frac{x_2^*}{x_1^*} \right) > 0 \Rightarrow \frac{dx_2^*}{dx_1^*} < 0$ as trajetórias tem inclinação negativa.

no 2º e 4º quadrantes $\left(\frac{x_2^*}{x_1^*} \right) < 0 \Rightarrow \frac{dx_2^*}{dx_1^*} > 0$ as trajetórias tem inclinação positiva.

Devido aos sinais dos autovalores x_1^* se aproxima de zero e x_2^* se afasta.



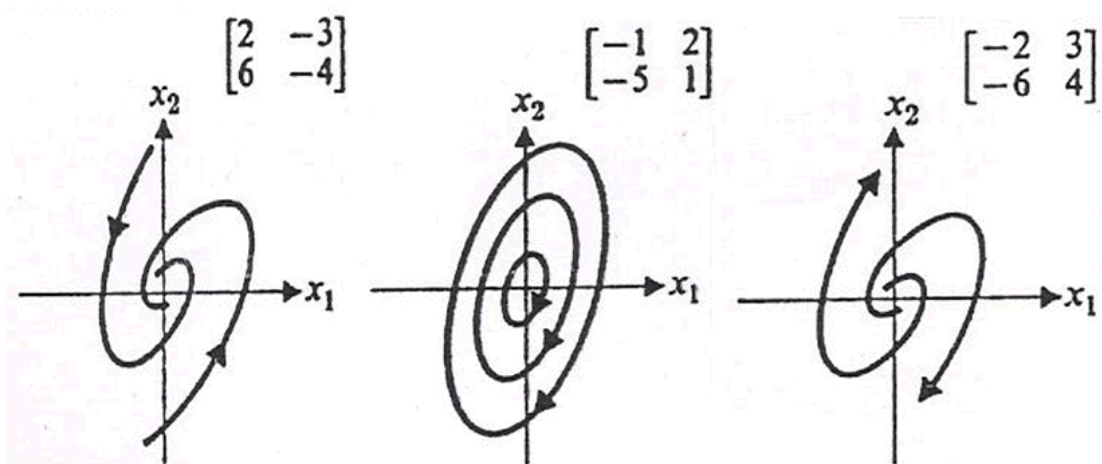
O ponto estacionário é um **ponto de sela** (instável)

Para valores característicos complexos conjugados a resposta temporal, $\underline{x}(t)$, do sistema vai incluir termos oscilatórios da forma

$$2\rho_j e^{-t/T_j} \cos(\omega_j t + d_j)$$

como já foi visto anteriormente.

Conseqüentemente, no plano de estados, se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ oscilam ao redor do estado estacionário com amplitude decrescente, constante ou crescente (segundo que $\text{Re}(\lambda) <, = \text{ou} > 0$) espera-se um comportamento das trajetórias da forma:



Na forma canônica, para valores característicos complexos conjugados, os estados também são complexos conjugados (na forma original não, pois os sistemas reais não

poderão ter um comportamento complexo). Assim, tanto x_1^* como x_2^* precisam de um plano para sua representação.

Para

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_R + i\lambda_I &\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_R - i\lambda_I \\ x_1^* = y_R + iy_I &\Rightarrow x_2^* = y_R - iy_I \end{aligned}$$

Usa-se o plano y_R, y_I

$$\frac{dx_1^*}{dt} = \lambda_1 x_1^* \Rightarrow \frac{d(y_R + iy_I)}{dt} = (\lambda_R + i\lambda_I)(y_R + iy_I) = (\lambda_R y_R - \lambda_I y_I) + i(\lambda_R y_I + \lambda_I y_R)$$

Separando parte real e imaginária

$$\begin{aligned} \frac{dy_R}{dt} &= \lambda_R y_R - \lambda_I y_I \\ \frac{dy_I}{dt} &= \lambda_R y_I + \lambda_I y_R \end{aligned}$$

As mesmas equações são obtidas para o conjugado.

As inclinações no plano y_R, y_I são

$$\frac{dy_I}{dy_R} = \frac{\lambda_I y_R + \lambda_R y_I}{\lambda_R y_R - \lambda_I y_I}$$

Considerando $\lambda_I > 0$, existem 3 casos de interesse:

1º) $\lambda_R < 0$

- No eixo real, $y_I = 0 \Rightarrow \frac{dy_I}{dy_R} = \frac{\lambda_I}{\lambda_R} < 0$ as inclinações são todas iguais e negativas

Usando

$$\frac{dy_R}{dt} = \lambda_R y_R - \lambda_I \cancel{y_I} = \lambda_R y_R$$

observa-se que no semi-eixo positivo, $y_R > 0$, há uma diminuição com o tempo e vice-versa.

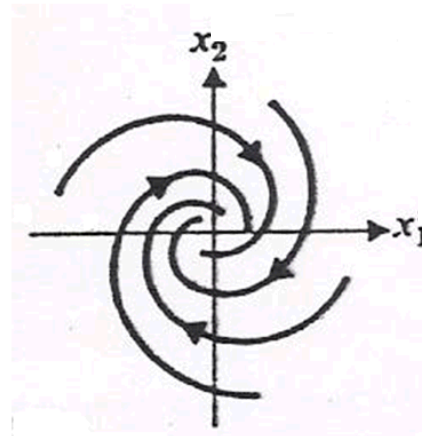
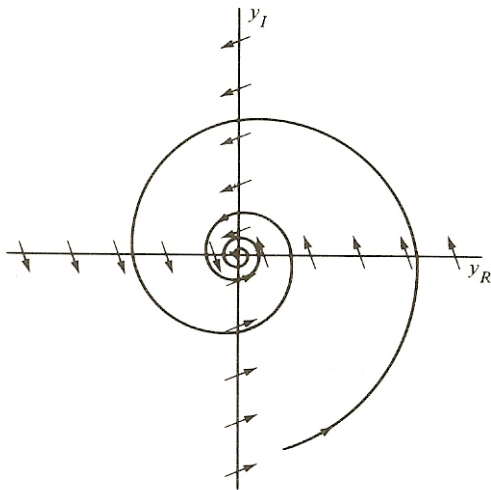
- No eixo imaginário $y_R = 0 \Rightarrow \frac{dy_I}{dy_R} = -\frac{\lambda_R}{\lambda_I} > 0$ As inclinações são todas iguais e
positivas

Os sentidos são calculados da mesma forma anterior:

$$\frac{dy_I}{dt} = \lambda_R y_I + \lambda_I x_R = \lambda_R y_I$$

Observa-se que no semi-eixo positivo, $y_I > 0$, há uma diminuição com o tempo.

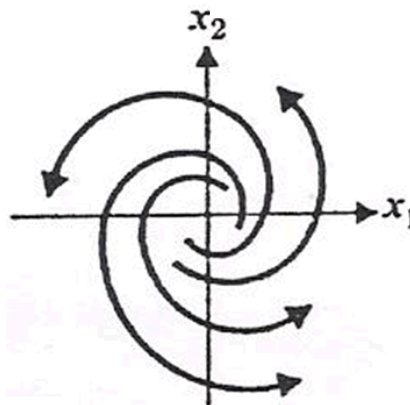
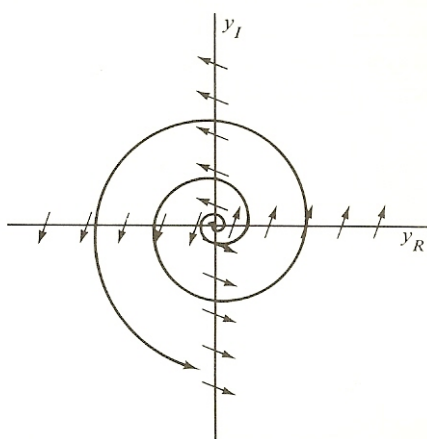
Então



É um **foco estável**.

2º) $\lambda_R > 0$

O comportamento é semelhante ao anterior, porém com sentidos opostos \Rightarrow **foco instável**



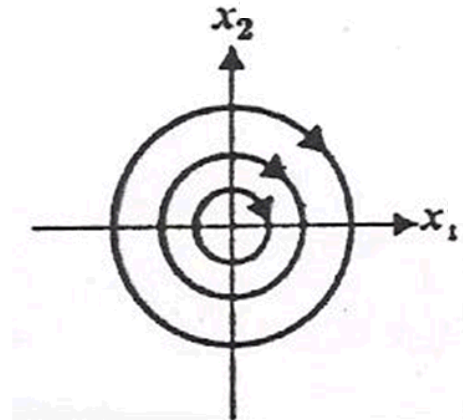
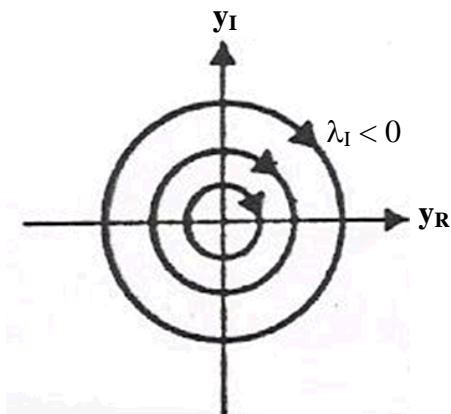
3º) $\lambda_R = 0$ raízes imaginárias.

$$\frac{dy_I}{dy_R} = \frac{y_R}{-y_I}$$

No eixo real, $y_I = 0 \Rightarrow$ inclinação infinita

No eixo imaginário, $y_R = 0 \Rightarrow$ inclinação zero

$$\text{Em } y_I = \pm y_R \Rightarrow \frac{dy_I}{dy_R} = \mp 1$$



Trata-se de um **centro**.

Deve-se notar que se a representação não tivesse sido feita na forma canônica se obteria o mesmo tipo de resultados, porém com as curvas deformadas.

Exemplo 2: Estados Estacionários de Sistemas Não-Lineares

a)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) + \frac{1}{2} \cdot e^{[x_1(t)^2 - 1]}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t)^2 + x_1(t)$$

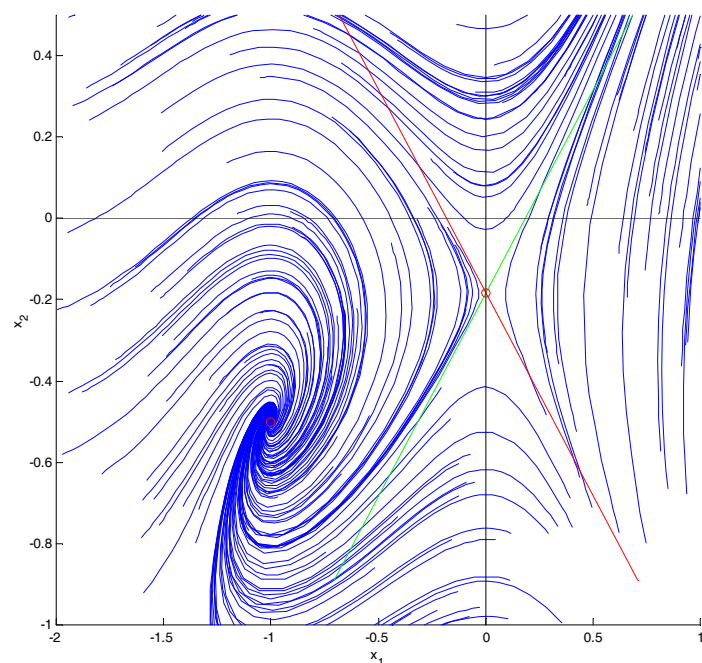
No estado estacionário

$$\bar{x}_2 + \frac{1}{2} \cdot e^{[\bar{x}_1^2 - 1]} = 0$$

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 = 0$$

Há duas soluções

$$(0, -0,184) \text{ e } (-1, -0,500)$$



Linearizando o sistema de equações

$$\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} = \left[\bar{x}_1 \cdot e^{(\bar{x}_1^2 - 1)} \right] \cdot \Delta x_1(t) + \Delta x_2(t)$$

$$\frac{d\Delta x_2(t)}{dt} = (2 \cdot \bar{x}_1 + 1) \cdot \Delta x_1(t)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \left[\bar{x}_1 \cdot e^{(\bar{x}_1^2 - 1)} \right] & 1 \\ (2 \cdot \bar{x}_1 + 1) & 0 \end{bmatrix}$$

No primeiro ponto, (0, -0,184)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{V}_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \quad \textbf{Ponto de Sela}$$

No segundo ponto, (-1, -0,500)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -0,5 + i \cdot 0,866 \\ \lambda_2 = -0,5 - i \cdot 0,866 \end{array} \quad \textbf{Foco Estável}$$

b)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - x_1(t)^3 - x_2(t)$$

No estado estacionário

$$\bar{x}_2 = 0$$

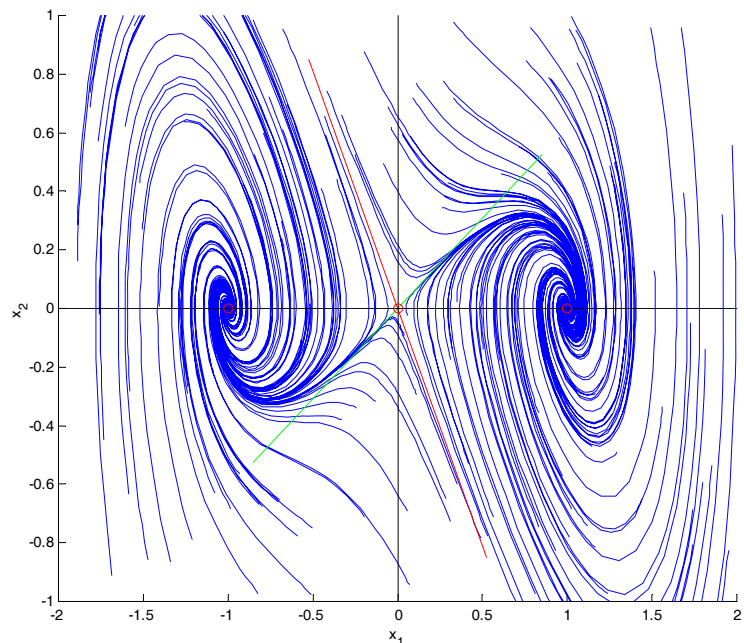
$$\bar{x}_1 - \bar{x}_1^3 - \bar{x}_2 = 0$$

Há três soluções

$$(0, 0) \quad (1, 0) \quad (-1, 0)$$

Linearizando o sistema de equações

$$\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} = \Delta x_2(t)$$



$$\frac{d\Delta x_2(t)}{dt} = (1 - 3 \cdot \bar{x}_1^2) \cdot \Delta x_1(t) - \Delta x_2(t)$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 - 3 \cdot \bar{x}_1^2) & -1 \end{bmatrix}$$

Os valores característicos desta matriz são

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 12 \cdot \bar{x}_1^2}}{2}$$

Para o primeiro ponto (0, 0)

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1,618$$

$$\underline{\underline{V_d}} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Ponto de Sela

Para o segundo ponto (1, 0)

$$\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

Foco Estável

Para o terceiro ponto (-1, 0)

$$\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

Foco Estável

c) Biorreator (Bequette, 1998)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = [\mu(x_2) - D] \cdot x_1(t)$$

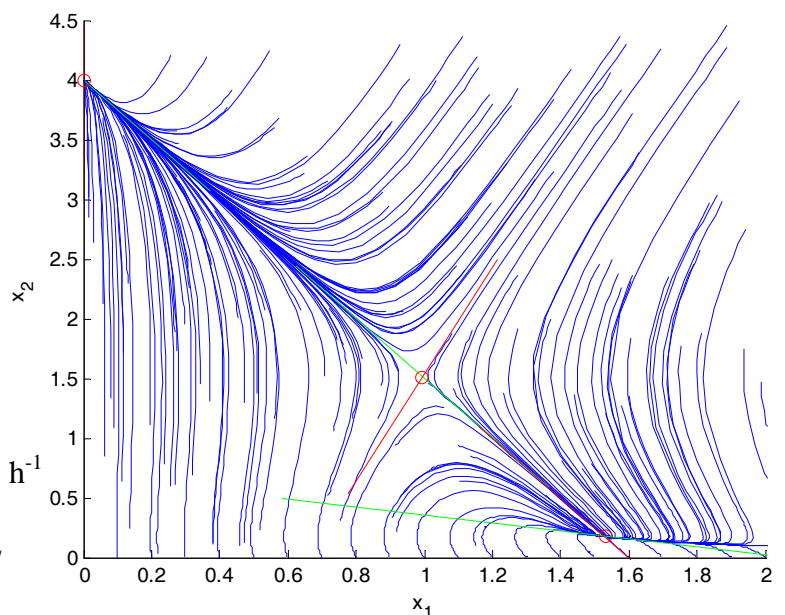
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = [x_{2f} - x_2(t)] \cdot D - \frac{\mu(x_2)}{Y} \cdot x_1(t)$$

$$\text{onde } \mu(x_2) = \frac{\mu_{\max} \cdot x_2(t)}{k_m + x_2(t) + k_1 \cdot x_2(t)^2}$$

$$\mu_{\max} = 0,53 \text{ h}^{-1} \quad k_m = 0,12 \text{ g/L} \quad D = 0,3 \text{ h}^{-1}$$

$$k_1 = 0,4545 \text{ L/g} \quad Y = 0,4 \quad x_{2f} = 4,0 \text{ g/L}$$

No estado estacionário



Há três soluções

$$(0, 4) \quad (0,9951, 1,5122) \quad (1,5302, 0,1746)$$

Linearizando o sistema de equações

$$\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} = [\mu(\bar{x}_2) - D] \cdot \Delta x_1(t) + \frac{\bar{x}_1}{k_m + \bar{x}_2 + k_1 \cdot \bar{x}_2^2} [\mu_{\max} - \mu(\bar{x}_2)(1 + 2k_1 \cdot \bar{x}_2)] \cdot \Delta x_2(t)$$

$$\frac{d\Delta x_2(t)}{dt} = -\frac{\mu(\bar{x}_2)}{Y} \cdot \Delta x_1(t) - \left\{ D + \frac{\bar{x}_1}{k_m + \bar{x}_2 + k_1 \cdot \bar{x}_2^2} \frac{[\mu_{\max} - \mu(\bar{x}_2)(1 + 2k_1 \cdot \bar{x}_2)]}{Y} \right\} \cdot \Delta x_2(t)$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \mu(\bar{x}_2) - D & \frac{\bar{x}_1}{k_m + \bar{x}_2 + k_1 \cdot \bar{x}_2^2} [\mu_{\max} - \mu(\bar{x}_2)(1 + 2k_1 \cdot \bar{x}_2)] \\ -\frac{\mu(\bar{x}_2)}{Y} & -D - \frac{\bar{x}_1}{k_m + \bar{x}_2 + k_1 \cdot \bar{x}_2^2} \frac{[\mu_{\max} - \mu(\bar{x}_2)(1 + 2k_1 \cdot \bar{x}_2)]}{Y} \end{bmatrix}$$

Para o primeiro ponto (0, 4) - *washout*

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -0,1139 & 0 \\ -0,4652 & -0,3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{V_d}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -0,1139 \\ \lambda_2 = -0,3 \end{array} \quad \text{Nó estável}$$

No segundo ponto (0,9951, 1,5122)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -0,0679 \\ -0,75 & -0,1302 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{V_d}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,2264 \\ -2,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 0,1698 \\ \lambda_2 = -0,3 \end{array} \quad \text{Ponto Sela}$$

No terceiro ponto (1,5302, 0,1746)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,9048 \\ -0,75 & -2,562 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{V_d}} = \begin{bmatrix} 1 & -3,016 \\ -2,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -2,262 \\ \lambda_2 = -0,3 \end{array} \quad \text{Nó Estável}$$

---X---

Esta análise foi feita nas proximidades dos pontos estacionários onde as trajetórias do sistema não-linear coincidem com as do linear.

Quando as trajetórias não-lineares se afastam de um ponto estacionário instável, elas podem ir para o infinito, se aproximar de um outro ponto estacionário estável ou de um outro **atrator** estável.

Além dos **pontos estacionários**, existem outras figuras geométricas do espaço de estados para os quais podem se dirigir (ou dos quais podem se afastar) as trajetórias dos sistemas não-lineares: **ciclos limites**, **atratores toroidais** e **atratores caóticos**. O assunto **atratores** será apresentado a seguir, de forma resumida.

Exemplo 3: Ciclo limite

a) Atrator

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) + x_1(t) \cdot [0,5^2 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2]$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) \cdot [0,5^2 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2]$$

No estado estacionário

Há uma solução: (0, 0)

Linearizando o sistema de equações

$$\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} = (0,5^2 - 3\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2) \cdot \Delta x_1(t) + (1 - 2\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) \cdot \Delta x_2(t)$$

$$\frac{d\Delta x_2(t)}{dt} = -(1 + 2\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) \cdot \Delta x_1(t) + (0,5^2 - \bar{x}_1^2 - 3\bar{x}_2^2) \cdot \Delta x_2(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,5^2 - 3\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 & 1 - 2\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ -1 - 2\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 & 0,5^2 - \bar{x}_1^2 - 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix}$$

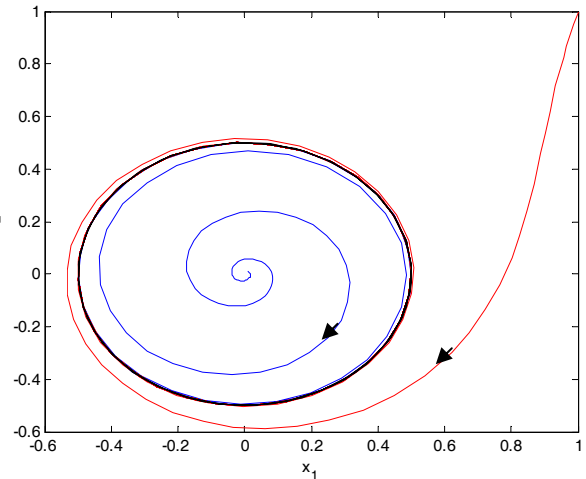
Para o ponto (0, 0)

$$A = \begin{bmatrix} 0,25 & 1 \\ -1 & 0,25 \end{bmatrix} \quad V_d = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0,25 + i \\ \lambda_2 = 0,25 - i \end{matrix} \quad \text{Foco instável}$$

Para este sistema há um **ciclo limite estável** em $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = 0,5^2$ e, neste caso, o sistema é equivalente a:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t)$$



$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{V}_d = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = +i \\ \lambda_2 = -i \end{array}$$

Ciclo limite

b) Repulsor

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) - x_1(t) \cdot [0,5^2 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2]$$

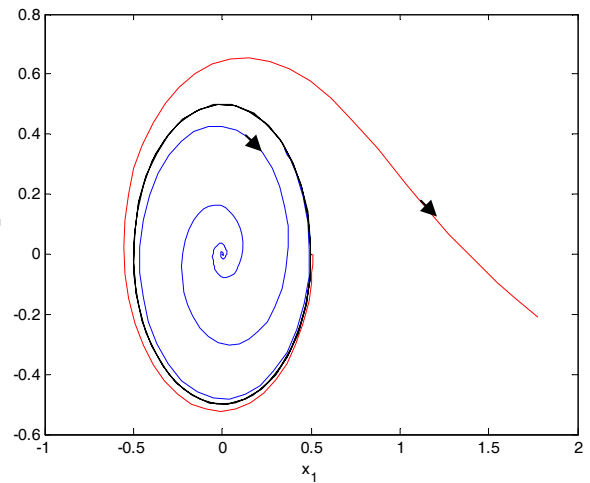
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) - x_2(t) \cdot [0,5^2 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2]$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -0,5^2 + 3\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 & 1 + 2\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ -1 + 2\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 & -0,5^2 + \bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix}$$

Para o ponto (0, 0)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -0,25 & 1 \\ -1 & -0,25 \end{bmatrix} \quad \underline{V}_d = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -0,25 + i \\ \lambda_2 = -0,25 - i \end{array}$$

Foco estável



Para este sistema há um **ciclo limite instável** em $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = 0,5^2$.

A grande diferença entre um **ciclo limite** e um **centro** é que os ciclos limites são órbitas isoladas, ou seja, uma perturbação tirando da órbita de um ciclo limite retornará à mesma órbita ao passo que uma perturbação tirando da órbita de um centro vai cair em outra órbita deste centro.

9.2 Atratores e Bifurcações

Seja um sistema dinâmico não-linear autônomo (neste contexto isso significa que não há dependência explícita com o tempo, t).

Um sistema dinâmico é uma forma de se descrever a evolução temporal de todos os pontos do espaço de estados S.

É uma transformação ϕ tal que:

$$\phi : (t, \underline{x}_0) \rightarrow \underline{x}(t) \quad [\phi(t, \underline{x}_0) = \phi_t(\underline{x}_0)] \quad (1)$$

$$\phi(0, \underline{x}_0) = \phi_0(\underline{x}_0) = \underline{x}_0 \quad (2)$$

$$\phi_t \circ \phi_{t'} = \phi(t, \phi(t', \underline{x}_0)) = \phi_t(\phi_{t'}(\underline{x}_0)) = \phi_{t+t'}(\underline{x}_0) = \phi(t + t', \underline{x}_0) \quad (3)$$

(2) indica a transformação identidade

(3) é a composição de transformações

Esta última igualdade indica que se chega ao mesmo resultado aplicando a transformação de uma única vez para todo o intervalo de tempo $(t + t')$, que aplicando sucessivamente para os intervalos (t) e (t') .

Todo sistema dinâmico definido por (1), (2) e (3) pode ser representado na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{f}[\underline{x}(t)] \quad \text{com} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

Se $\underline{f}[\underline{x}(t)]$ é continuamente diferenciável então:

- Dada a condição inicial, o sistema **tem solução** num certo intervalo de tempo.

$$\underline{x}(t) = \phi(t, \underline{x}_0) = \phi_t(\underline{x}_0)$$

- A solução é **única**.
- A solução depende continuamente das **condições iniciais**.

Seja o sistema linear autônomo no tempo

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) \quad \text{com} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

e sejam os conjuntos de condições iniciais $S_0 \in S$ e de soluções $S_t \in S$.

Então, para todo $\underline{x}(t) \in S_t$ existe um $\underline{x}_0 \in S_0$ tal que

$$\underline{x}(t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}_0$$

A função $\phi_t(\underline{x}_0)$ é uma transformação dinâmica chamada **escoamento** ou **fluxo**.

Se $V(0)$ é o volume do espaço S_0 e $V(t)$ é o volume do espaço S_t , então:

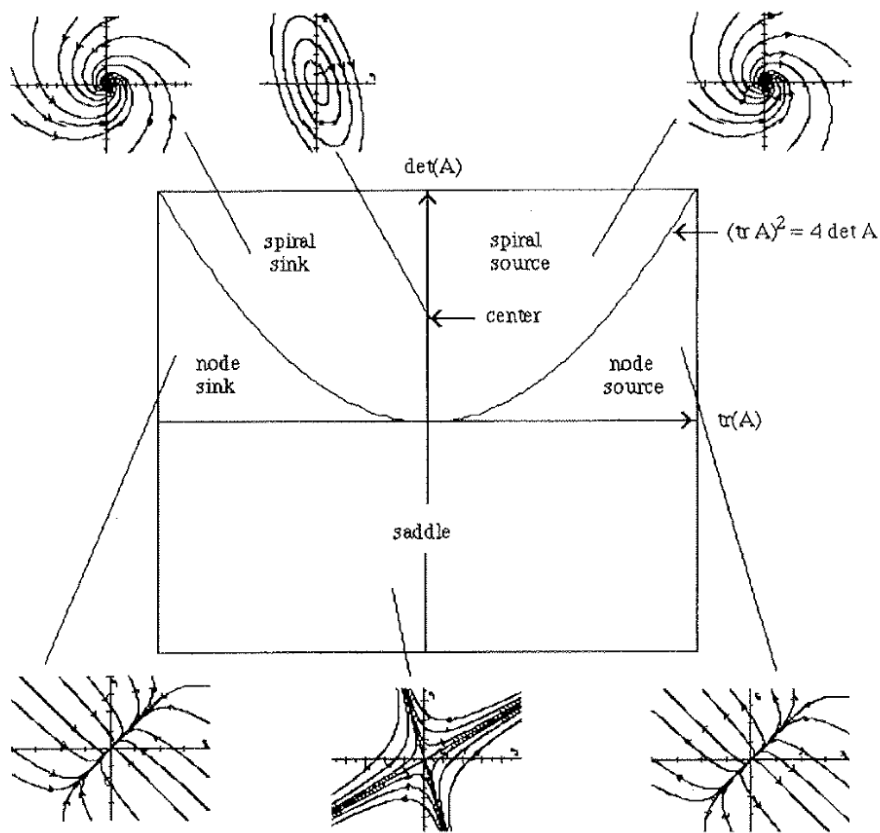
Se $tr(\underline{A}) < 0$, o volume do espaço se contrai e o sistema é dissipativo.

Observe que para um sistema linear de segunda ordem:

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \lambda^2 - tr(\underline{A}) \cdot \lambda + \det(\underline{A}) = 0 \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{tr(\underline{A}) \pm \sqrt{tr(\underline{A})^2 - 4 \det(\underline{A})}}{2}$$

Ou seja, no mínimo um valor característico será negativo se $tr(\underline{A}) < 0$.

Os diferentes comportamentos dinâmicos deste sistema linear podem ser localizados em um plano $\det(\underline{A}) \times \text{tr}(\underline{A})$:



Para o caso geral, não-linear, se o $\text{div}(\underline{f}) < 0$ em S , o volume do espaço se contrai e o sistema dinâmico é **dissipativo**.

$$\text{div}(\underline{f}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{f} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) = \text{tr}(\underline{J})$$

onde

$$\underline{J} = [a_{ij}] \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \text{Matriz Jacobiana}$$

Se a $\text{div}(\underline{f}) > 0$ em S , o volume do espaço cresce e o sistema dinâmico é **expansivo**.

Se a $\text{div}(\underline{f}) = 0$ em S , o volume do espaço se mantém e o sistema dinâmico é **conservativo**.

Estas características podem ser apenas locais. Um sistema que é globalmente dissipativo pode ser localmente expansivo.

A grande maioria dos sistemas em engenharia é dissipativo.

Se o sistema dissipativo é **limitado**, no sentido de que nenhuma trajetória em S tende para $\pm\infty$ quando $t \rightarrow \infty$, o volume do espaço se contrai e converge para uma das seguintes figuras geométricas:

- **ponto** (estado estacionário; equilíbrio)
- **curva fechada** (solução periódica simples; ciclo limite)
- **figura toroidal** (solução quase-periódica; atrator toroidal)
- **caos** (solução oscilatória não-periódica; atrator estranho; fractal)

São os **atratores**.

Desprezando a fase transiente estes atratores são soluções de um sistema dissipativo.

Do ponto de vista dinâmico interessa a **estabilidade** dos atratores. São estáveis se todas as trajetórias que passam numa vizinhança de todos os seus pontos convergem para ele para $t \rightarrow \infty$. Os atratores estranhos são localmente instáveis.

Todo sistema dinâmico dissipativo limitado tem pelo menos **um** atrator.

Para mais de um atrator estável definem-se **bases de atratores** e **superfícies de separação**.

Um sistema dinâmico é **estruturalmente estável** (um outro conceito) se sistemas vizinhos, obtidos de perturbações (de algum parâmetro) do sistema original, têm uma estrutura dinâmica similar (mesmo número e igual estabilidade dos atratores).

Quando mudanças de parâmetros determinam alterações qualitativas na estrutura dinâmica do sistema ocorre uma **bifurcação**.

Numa bifurcação, um sistema dinâmico estruturalmente instável se transforma em sistemas com características dinâmicas diferentes.

Exemplos desta situação são:

- dobrar quebrar
- inclinar cair
- esticar rasgar
- encher explodir

Trata-se de **mudanças qualitativas**. Nesse tipo de mudança pode-se passar, em termos de comportamento dinâmico, por exemplo, de estado estacionário a estado dinâmico:

- estável instável
- simétrico assimétrico
- estacionário movimento regular
- regular irregular
- ordem caos

Em termos das soluções das equações que governam o fenômeno, há uma solução diferente de cada lado do valor de certo **parâmetro**, podendo haver diferença no número de soluções ou no comportamento das soluções.

Exemplo 4: Bifurcações em termos da variação de um parâmetro

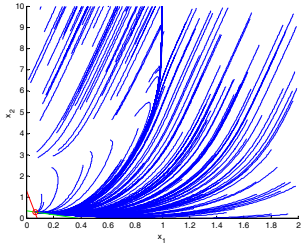
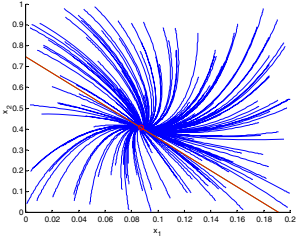
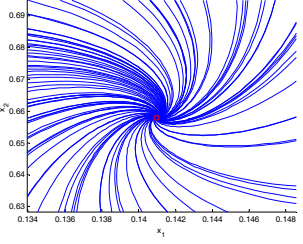
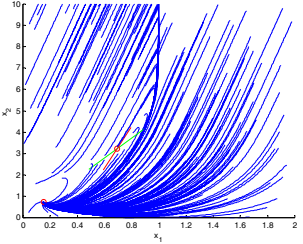
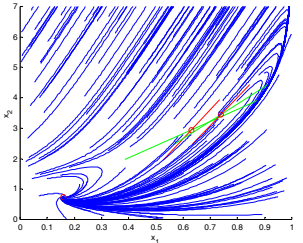
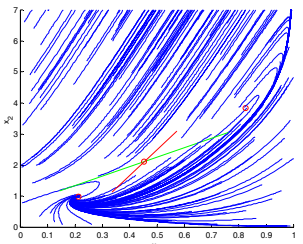
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + p \cdot [1 - x_1(t)] e^{x_2(t)}$$

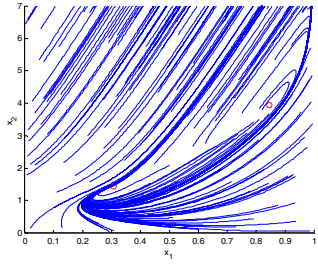
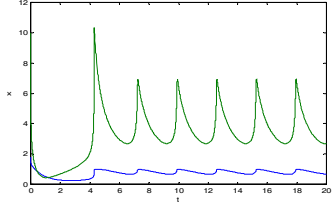
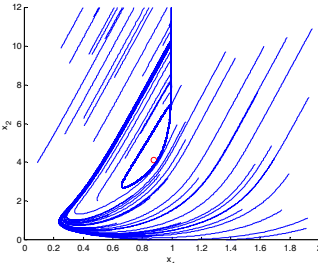
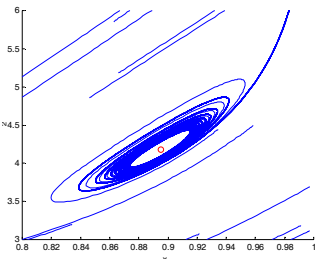
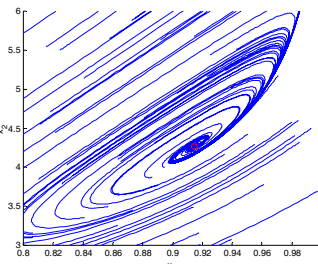
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -3x_2(t) + 14p \cdot [1 - x_1(t)] e^{x_2(t)}$$

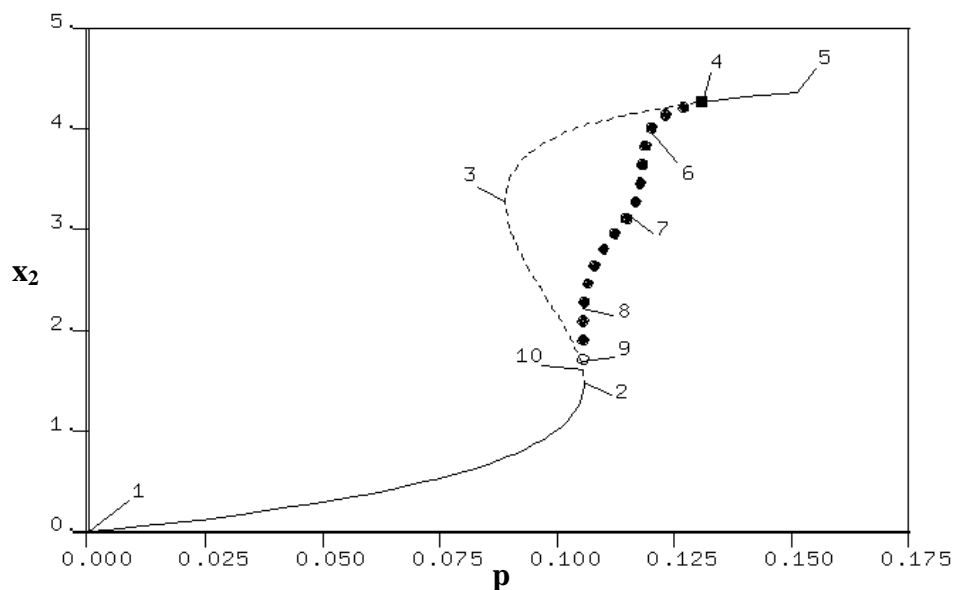
$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 - p \cdot e^{x_2} & p \cdot (1 - x_1) \cdot e^{x_2} \\ -14p \cdot e^{x_2} & -3 + 14p \cdot (1 - x_1) \cdot e^{x_2} \end{bmatrix}$$

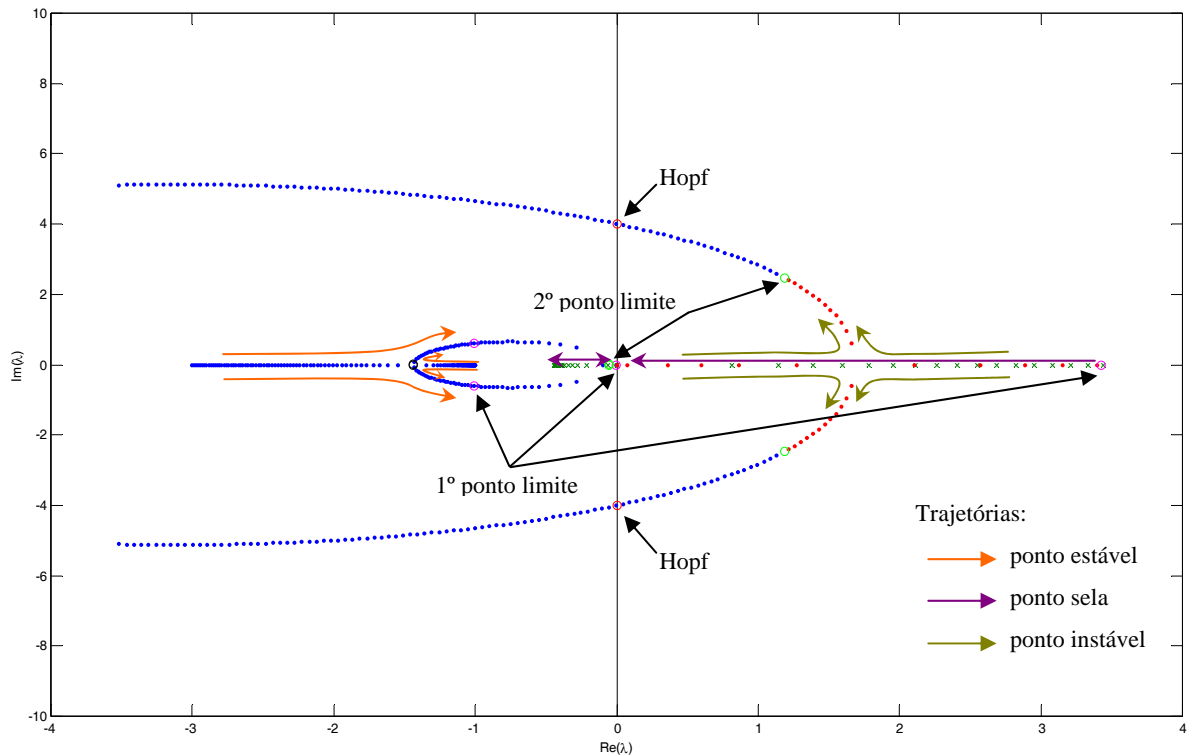
No estado estacionário a solução é (0, 0) para p = 0 e os valores característicos são -1 e -3.

Em função dos valores do parâmetro "p" se apresentam as seguintes situações:

Parâmetro p	Valores característicos	Plano de fase
$p < 0,06361$	Valores característicos reais e negativos - Nó Estável $p = 0,05 \quad \lambda = [-1,13, -2,06]$	
$p = 0,06361$	Valores característicos reais, negativos e repetidos - Nó Estável (Estrela) $\lambda = [-1,4372, -1,4372]$	
$0,06361 < p < 0,0889$	Valores característicos complexos conjugados com parte real negativa - Foco Estável $p = 0,085$ $\lambda = -1,095 \pm 0,565 i$	
$p = 0,0889$ o nó instável dá origem a dois pontos: nó instável e sela para $p > 0,0889$	Ponto limite: Uma solução estável (foco) e outra instável (nó) (ponto 3 na figura abaixo) $\lambda = -1,009 \pm 0,605 i$ $\lambda = [0, 3,432]$	
$0,0889 < p < 0,0933$	Uma solução estável (foco) e duas instáveis (sela e nó) $p = 0,09$ $\lambda = -0,982 \pm 0,614 i$ $\lambda = [-0,213, 3,332]$ $\lambda = [0,364, 3,151]$	
$0,0933 < p < 0,10574$ em $p = 0,105738931$ o primeiro ponto passa de foco para nó estável: $\lambda = [-0,055, -0,046]$	Uma solução estável (foco) e duas instáveis (sela e foco) $p = 0,10$ $\lambda = -0,652 \pm 0,651 i$ $\lambda = [-0,439, 1,953]$ $\lambda = 1,431 \pm 1,851 i$	

<p>$p = 0,10574$</p> <p>o nó estável dá origem a dois pontos: nó estável e sela para $p < 0,10574$</p>	<p>Ponto limite: Uma solução estável (nó), outra instável (foco) (ponto 2 na figura abaixo) e um ciclo limite estável</p> <p>$\lambda = [-0,097, 0]$ $\lambda = 1,186 \pm 2,478 i$</p>	
<p>$0,10574 < p < 0,1309$</p> 	<p>Uma solução instável (foco) e um ciclo limite estável</p> <p>$p = 0,12$ $\lambda = 0,528 \pm 3,487 i$</p>	
<p>$p = 0,1309$</p>	<p>Bifurcação Hopf: Valores característicos imaginários puros (ponto 4 na figura abaixo)</p> <p>$\lambda = \pm 4,008 i$</p>	
<p>$p > 0,1309$</p>	<p>Valores característicos complexos conjugados com parte real negativa - Foco Estável</p> <p>$p = 0,15$ $\lambda = -0,952 \pm 4,627 i$</p>	





---X---

A mudança de comportamento pode ser em etapas, passando de estado estacionário a movimento regular e, finalmente, a movimento irregular (caos).

Na passagem de autovalores reais de negativos a positivos, usualmente aparecem **novos ramos de soluções estacionárias**.

Na passagem de autovalores conjugados do plano negativo ao positivo, continua a solução estacionária, mas, sob certas condições, **aparecem soluções periódicas**.

Ponto Fixo; Solução Estacionária; Ponto de Equilíbrio; Ponto Crítico.

Considerando o sistema dinâmico função de um vetor de parâmetros

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t); \mathbf{p}]$$

o ponto de equilíbrio é solução do sistema de equações algébricas

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

Em um diagrama de bifurcação o ponto de equilíbrio, $\bar{x}(p)$, evolui, em função do valor de p , ao longo de **ramos** de soluções estacionárias, até atingir uma singularidade.

Usando o conceito de derivada total, pode-se obter (eliminando a barra para simplificar a notação)

$$d\underline{x} = -\left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{p}} \cdot d\underline{p} = \underline{J}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{p}} \cdot d\underline{p}$$

Se \underline{J} é não-singular, \underline{x} pode ser computado **continuamente** nas vizinhanças de um ponto (\underline{x}, p) como uma função de p , com solução única. A correspondente função $\underline{x}(p)$ é um **ramo** de soluções.

Quando \underline{J} é singular (pelo menos um valor característico nulo), há o encontro de dois ou mais ramos de soluções estacionárias, caracterizando **pontos de ramificações** estacionárias:

- **pontos limite**: neles nascem ou morrem dois ramos.
- **pontos de bifurcação**: neles nascem ou morrem mais de dois ramos.

Existem pacotes computacionais (AUTO, por exemplo) que calculam os ramos de soluções estacionárias e identificam pontos singulares.

Na engenharia química são normalmente encontrados os **pontos limite**.

Linearizando em torno do estado estacionário,

$$\frac{d(\underline{x} - \bar{x})}{dt} = \underline{J} \cdot (\underline{x} - \bar{x})$$

se todos os valores característicos de \underline{J} têm parte real negativa $\underline{x} = \bar{x}$ (solução estacionária) é **localmente estável**.

Se algum desses valores característicos têm parte real positiva o sistema é **localmente instável**.

Quando os autovalores são zero ou imaginários o ponto de equilíbrio é dito **degenerado**.

Por exemplo, para um sistema linear, considerando valores característicos complexos conjugados, na passagem de parte real negativa à parte real positiva, passa-se pela

forma degenerada chamada centro, na mudança de um foco estável para um foco instável. Para um sistema não-linear esta forma degenerada também pode aparecer na forma de um ciclo limite.

Considerando o caso de um sistema descrito por apenas um estado, contendo um parâmetro de bifurcação p :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t); p]$$

cujo ponto de equilíbrio é solução da equação algébrica:

$$f(\bar{x}; p) = 0$$

Um ponto de bifurcação ocorre quando o Jacobiano é singular, que neste caso é equivalente a:

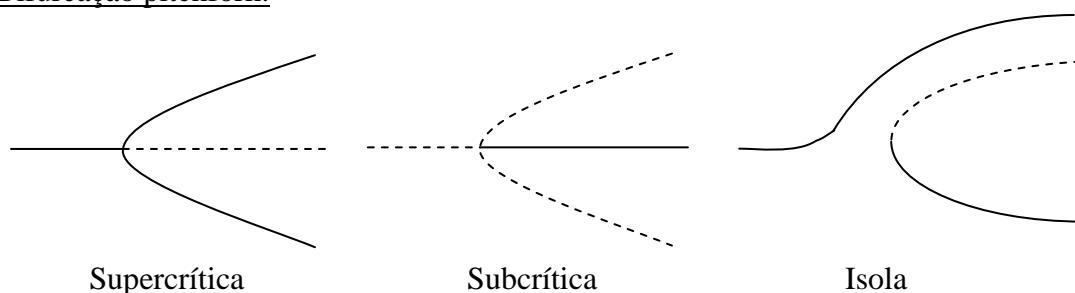
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}; p)} = 0$$

O número de soluções estacionárias pode ser determinado pelo seguinte critério:

$$f(x; p) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \neq 0$$

que se satisfeito implica que o sistema possui k soluções estacionárias.

Bifurcação pitchfork:



Neste caso k muda de 1 para 3 no ponto de bifurcação.

Exemplo 5:

$$\frac{dx}{dt} = f[x(t); p] = p \cdot x - x^3$$

$$J(x; p) = p - 3x^2$$

tem como estados estacionários: $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \sqrt{p}$ e $\bar{x}_3 = -\sqrt{p}$ quando $p > 0$, sendo o primeiro instável e os outros dois estáveis. Para $p < 0$, o único estado estacionário possível é $\bar{x}_1 = 0$, que neste caso é sempre estável. Para determinar o ponto de bifurcação, aplica-se a condição $J(\bar{x}; p) = 0$:

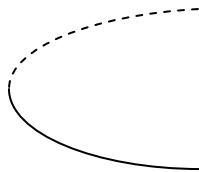
$$p = 3\bar{x}^2$$

O único estado estacionário que satisfaz esta condição é $\bar{x}_1 = 0$ quando $p = \bar{p} = 0$ e, neste ponto:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(\bar{x}_1, \bar{p})} = 6\bar{x}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6 \neq 0$$

Indicando o surgimento de 3 estados estacionários neste ponto de bifurcação. Pela análise de estabilidade dos estados estacionários, identifica-se este ponto como uma bifurcação pitchfork supercrítica.

Bifurcação sela-nó:



Também chamada de bifurcação tangencial ou de dobra (*fold*) ou ponto limite (*turning point*), no ponto de bifurcação ocorre a junção de $k = 2$ ramos de soluções estacionárias.

Exemplo 6:

$$\frac{dx}{dt} = f[x(t); p] = p - x^2 \quad J(x; p) = -2x$$

tem como estados estacionários: $\bar{x}_1 = \sqrt{p}$ e $\bar{x}_2 = -\sqrt{p}$ quando $p > 0$, sendo o primeiro estável (nó) e o segundo instável (“sela”). Para $p < 0$, não há ponto de equilíbrio real. O termo sela faz mais sentido para sistemas de dimensão maior do que 1, onde os demais valores característicos têm parte real negativa, caracterizando um ponto sela (poderia também ser o oposto: o primeiro ser nó instável e o segundo sela, com os demais valores característicos com parte real positiva), veja os pontos limites do exemplo 4 acima.

Para determinar o ponto de bifurcação, aplica-se a condição $J(\bar{x}; p) = 0$:

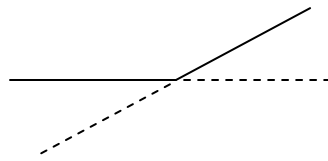
$$-2\bar{x} = 0$$

O único estado estacionário que satisfaz esta condição é $\bar{x} = 0$ quando $p = \bar{p} = 0$ e, neste ponto:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(\bar{x}, \bar{p})} = -2 \neq 0$$

Indicando o surgimento de 2 estados estacionários distintos neste ponto de bifurcação.

Bifurcação transcritical:



No ponto de bifurcação ocorre a troca das condições de estabilidade das soluções estacionárias.

Exemplo 7:

$$\frac{dx}{dt} = f[x(t); p] = p \cdot x - x^2 \quad J(x; p) = p - 2x$$

tem como estados estacionários: $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_2 = p$. Para $p > 0$, o primeiro ponto é instável e o segundo estável, mas para $p < 0$ a situação se reverte, sendo o primeiro estável e o segundo instável. Para determinar o ponto de bifurcação, aplica-se a condição $J(\bar{x}; p) = 0$:

$$2\bar{x} = p$$

O único estado estacionário que satisfaz esta condição é $\bar{x} = 0$ quando $p = \bar{p} = 0$ e, neste ponto:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(\bar{x}, \bar{p})} = -2 \neq 0$$

Indicando o surgimento de 2 estados estacionários distintos neste ponto de bifurcação.

Observe que neste caso há dois estados estacionários distintos em cada lado do ponto de

bifurcação. A mesma observação poderia ser feita para o exemplo anterior se também fossem considerado os valores complexos.

Ciclo Limite; Solução Periódica

A solução estacionária é periódica, repetindo-se para múltiplos de certo intervalo de tempo "T".

$$\underline{x}(t + T) = \underline{x}(t)$$

O sistema linearizado apresentará soluções oscilatórias quando houver autovalores de \underline{J} imaginários conjugados (são soluções pontuais). Em termos de diagramas de bifurcação, estas soluções surgem numa **bifurcação de Hopf**, com período $T = 2\pi / \beta$, onde $\beta = |\lambda_{\text{Hopf}}|$ e λ_{Hopf} é o valor característico no ponto da bifurcação Hopf (imaginário puro).

A estabilidade do **ciclo limite** pode ser determinada da seguinte forma.

Seja $\underline{x}(t)$ uma solução periódica.

Seja $\Delta \underline{x}_0$ uma perturbação pequena em $t = 0$, que gera uma evolução temporal descrita por

$$\frac{d\Delta \underline{x}}{dt} = \underline{J} \cdot \Delta \underline{x} \quad \text{com} \quad \Delta \underline{x}(0) = \Delta \underline{x}_0$$

cuja solução é

$$\Delta \underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t;0) \cdot \Delta \underline{x}_0 \quad \underline{\Phi}(t;0) = \exp(\underline{J} \cdot t)$$

Como $\underline{x}(t)$ é periódica, de período T,

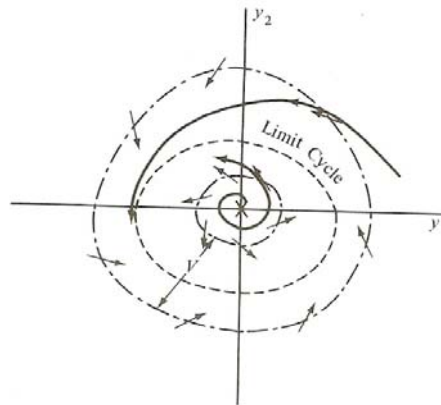
$$\Delta \underline{x}(T) = \underline{\Phi}(T,0) \cdot \Delta \underline{x}_0$$

Em geral

$$\Delta \underline{x}[(k+1)T] = \underline{\Phi}(T,0) \cdot \Delta \underline{x}(kT) \quad \text{(mapeamento de Poincaré)}$$

Esta equação de diferenças será estável se os valores característicos de $\underline{\Phi}(T,0)$ (valores característicos – multiplicadores de Floquet) estão dentro do círculo unitário.

A menos que se tenha realizado uma análise de **bifurcação paramétrica** (construção de **diagramas de bifurcação**), com a localização de bifurcações Hopf (origem de um ciclo limite), não é fácil estabelecer se um sistema possui ou não um ciclo limite. O teorema de Poincaré-Bendixon diz que qualquer trajetória descrita por um sistema não-linear que entra ou está contida e nunca sai de uma região fechada e limitada, V , sem a existência de um estado estacionário, é um ciclo limite ou está se aproximando assintoticamente de um.



Considerando agora uma região V delimitada pelo ciclo limite, sem a exclusão de estados estacionários, pode-se concluir a partir deste teorema que:

$$F + N + C - S = 1$$

onde F , N , C e S são, respectivamente, os números de focos, nós, centros e pontos selas contidos na região V , independentemente de serem estáveis ou não. Por exemplo, um único estado estacionário cercado por um ciclo limite estável (instável) deve ser instável (estável), ou seja, um foco ou um nó.

Um outro teorema de Bendixon diz que ao aplicarmos o teorema da divergência de Gauss para o vetor $\underline{f}[\underline{x}(t); \underline{p}]$ no plano de fases, se o $\text{tr}\left\{\underline{J}[\underline{x}(t); \underline{p}]\right\}$ não mudar de sinal na região V então não existe ciclo limite nesta região. O teorema de divergência de Gauss diz que:

$$\int_V (\nabla \cdot \phi) dV = \int_C (\mathbf{n} \cdot \phi) dS$$

onde \mathbf{n} é um vetor normal deixando a superfície S . Para um espaço bidimensional:

$$\iint_V \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \int_C (\phi_2 dx_1 - \phi_1 dx_2)$$

onde V é a região delimitada pelo ciclo limite e C é o ciclo. Na integral ao longo de C , dx_1 e dx_2 variam de acordo com o sistema dinâmico:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{f}[\underline{x}(t); \underline{p}]$$

que resulta em:

$$\iint_V \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \int_C (\phi_2 f_1 - \phi_1 f_2) dt$$

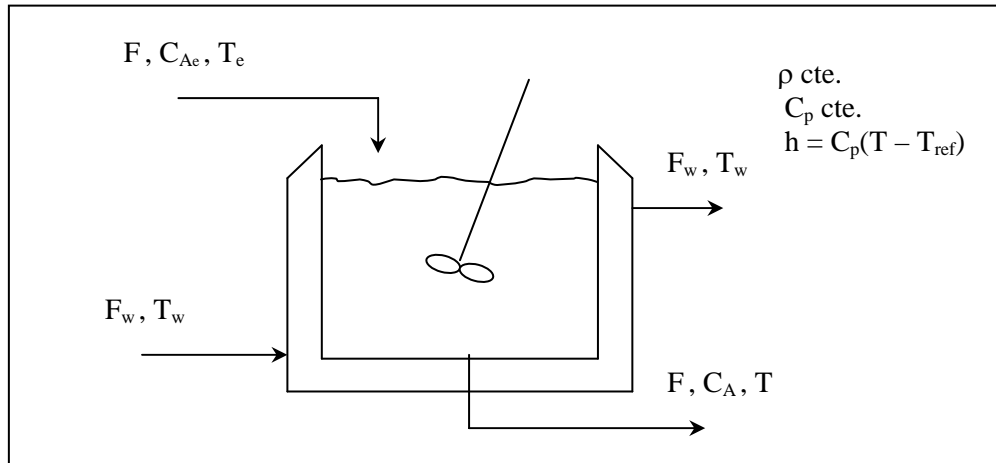
Se o vetor ϕ for o próprio vetor $\underline{f}[\underline{x}(t); \underline{p}]$, então:

$$\iint_V \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = - \int_C (f_2 f_1 - f_1 f_2) dt = 0$$

Logo, a primeira integral é nula somente se $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \text{tr}(\underline{J})$ mudar de sinal dentro de

V .

Exemplo 8: reator CSTR não-isotérmico com reação de primeira ordem e com propriedades físicas, volume do meio reacional e temperatura da camisa constantes.



$$V \frac{dC_A}{dt} = F(C_{Ae} - C_A) - k(T)C_A V$$

$$\rho V C_p \frac{dT}{dt} = F \rho C_p (T_e - T) + (-\Delta H_r) k(T) C_A V - UA_t (T - T_w)$$

com $k(T) = k_0 \exp(-E/RT)$. A matriz Jacobiana para este sistema é dada por:

$$\underline{\underline{J}}(C_A, T) = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V} - k(T) & -\frac{E}{RT^2} k(T) C_A \\ \frac{(-\Delta H_r) k(T)}{\rho C_p} & -\frac{F}{V} + \frac{E}{RT^2} \frac{(-\Delta H_r) k(T) C_A}{\rho C_p} - \frac{UA_t}{\rho V C_p} \end{bmatrix}$$

e $\text{tr}[\underline{\underline{J}}(C_A, T)] = -\frac{2F}{V} - k(T) + \frac{E}{RT^2} \frac{(-\Delta H_r) k(T) C_A}{\rho C_p} - \frac{UA_t}{\rho V C_p}$. Concluí-se, neste caso,

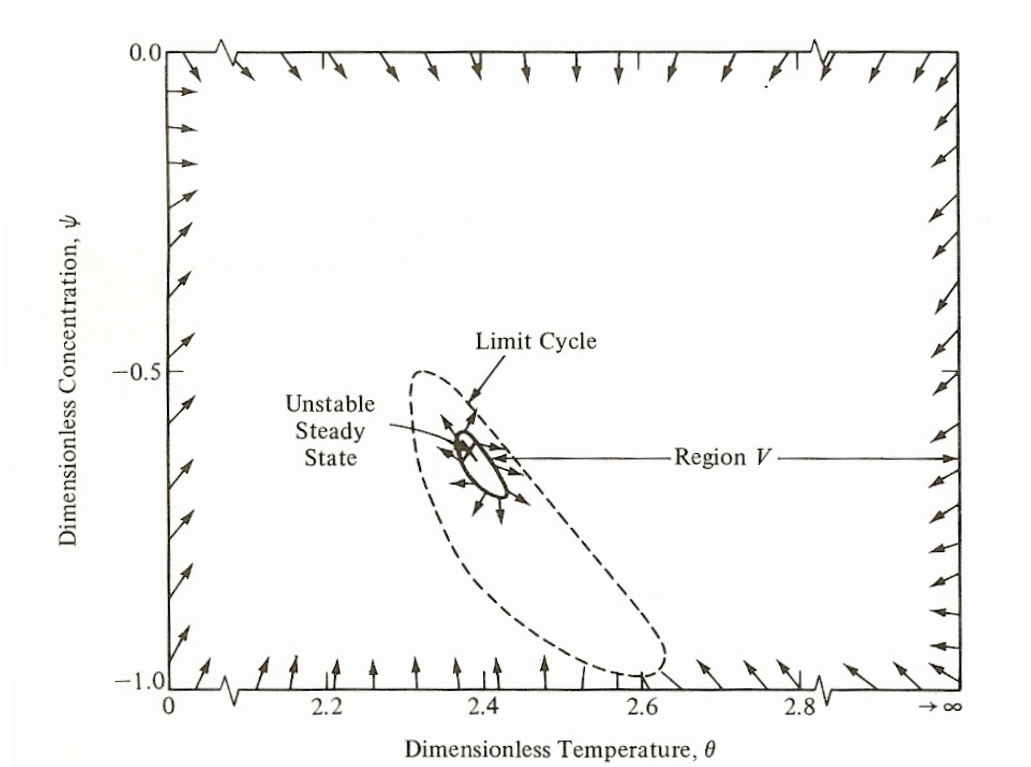
que se a reação química for endotérmica ($\Delta H_r > 0$) então $\text{tr}(\underline{\underline{J}}) < 0$ para qualquer valor de C_A e T e, portanto, o sistema nunca apresentará ciclo limite.

Para o caso de uma reação química exotérmica ($\Delta H_r < 0$), é possível encontrar condições onde exista ciclo limite. Por exemplo, para o caso de uma condição operacional apresentar somente um estado estacionário instável, o teorema de Poincaré-Bendixon diz que para existir um ciclo limite, este estado deve ser um nó ou um foco e, portanto, deve satisfazer a condição:

$$\det[\underline{\underline{J}}(\bar{x})] > 0 \quad \text{e} \quad \text{tr}[\underline{\underline{J}}(\bar{x})] > 0$$

mas, a medida que C_A e T tendem a seus valores extremos (ao se afastarem do estado estacionário instável), o $\text{tr}(\underline{\underline{J}}) < 0$ devido ao termo de geração de calor que tende a zero, havendo portanto a mudança de sinal $\text{tr}(\underline{\underline{J}})$ e satisfazendo a condição necessária para a existência de um ciclo limite. Analisando f_1 e f_2 , observa-se que quando $C_A \rightarrow 0$: $f_1 > 0$ fazendo com que C_A aumente, e quando $C_A \rightarrow C_{Ae}$: $f_1 < 0$ fazendo com que C_A diminua; da mesma forma, quando $T \rightarrow 0$: $f_2 > 0$ fazendo que a temperatura aumente, e quando $T \rightarrow \infty$: $f_2 < 0$ fazendo que a temperatura diminua. Este comportamento ilustrado na figura abaixo ($\psi = \frac{C_A - C_{Ae}}{C_{Ae}}$ e $\theta = \frac{\rho C_p T}{(-\Delta H_r) C_{Ae}}$), confirma a existência de um ciclo

limite, de acordo com o teorema de Poincaré-Bendixon.



Toro; Solução Quase-Periódica; Neimark-Sacker

É um movimento oscilatório com pequenos desvios de fase, como que percorrendo a superfície de um anel. Surge quando os valores característicos de Floquet cruzam o círculo unitário com parte imaginária $\neq 0$.

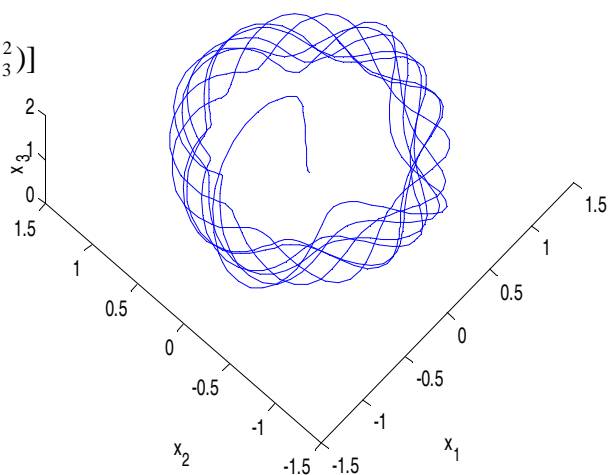
Exemplo 9:

$$\frac{dx_1}{dt} = (p-3)x_1 - 0,25x_2 + x_1[x_3 + 0,2(1-x_3^2)]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,25x_1 + (p-3)x_2 + x_2[x_3 + 0,2(1-x_3^2)]$$

$$\frac{dx_3}{dt} = px_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$p = 2 \text{ e } x_0 = [0,1 \ 0,1 \ 0,1]^T$$



$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} p-2,8 & -0,25 & x_1(1-0,4x_3) \\ 0,25 & p-2,8 & x_2(1-0,4x_3) \\ -2x_1 & -2x_2 & p-2x_3 \end{bmatrix}$$

No ponto estacionário (0, 0, 0):

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} p-2,8 & -0,25 & 0 \\ 0,25 & p-2,8 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\lambda}} = \begin{bmatrix} -0,8 + 0,25i \\ -0,8 - 0,25i \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ponto sela})$$

Atrator Estranho; Solução Caótica

É uma solução não-estacionária e não-periódica que pode ocorrer em sistemas contínuos com 3 ou mais estados e em sistemas discretos de qualquer dimensão. A sua evolução é muito sensível às condições iniciais.

Exemplo 10: modelo de crescimento de população (equação logística), discreto.

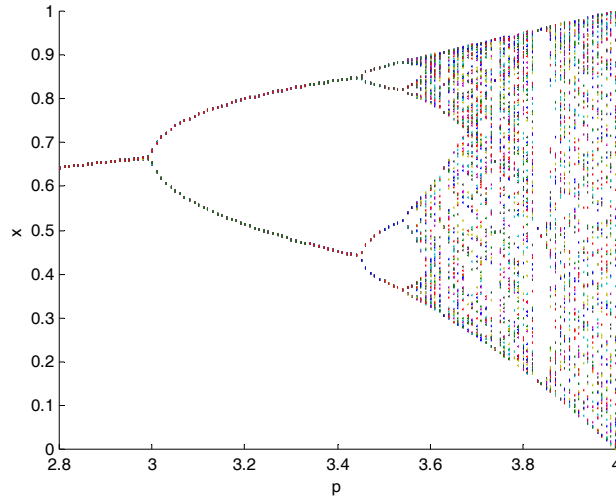
$$x_{k+1} = p x_k (1 - x_k) = g(x_k)$$

Este mapeamento quadrático é estável quando $|g'(\bar{x})| < 1$. As soluções estacionárias

possíveis são $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_2 = \frac{p-1}{p}$. Como $g'(\bar{x}) = p(1-2\bar{x})$, a origem é estável

somente para $p < 1$ e o segundo ponto, onde $g'(\bar{x}_2) = 2-p$, só é estável para $1 < p < 3$.

Para valores de $3 < p < 4$ os estados estacionários são instáveis e há o aparecimento de atratores periódicos com duplicações de período à medida que p aumenta até levar ao caos. Valores de $p > 4$ não há atratores, levando a população a um crescimento infinito. A figura abaixo apresenta o diagrama de órbitas em função do parâmetro de bifurcação.



Exemplo 11: Equação de Lorenz, contínuo.

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(x_2 - x_1)$$

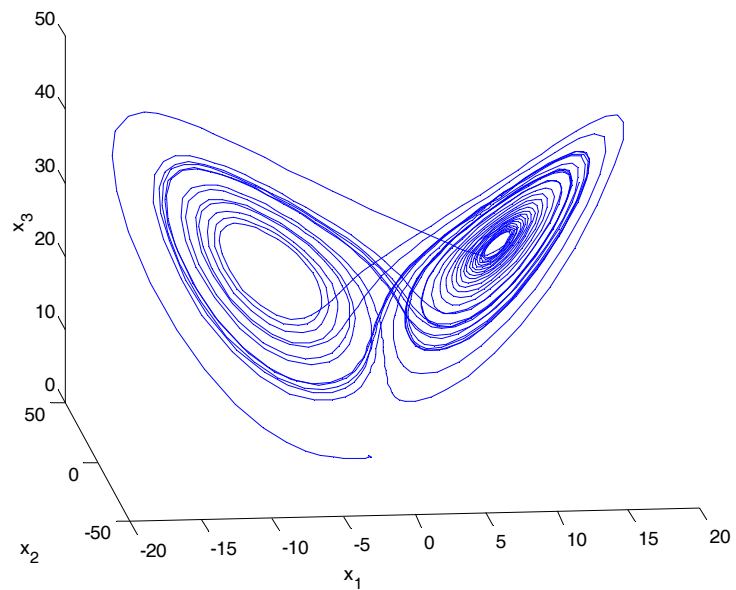
$$\frac{dx_2}{dt} = r x_1 - x_2 - x_1 x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 - b x_3$$

$\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$

$x_0 = [-1 \ 0 \ 0]^T$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{bmatrix}$$



Os estados estacionários são: $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{bmatrix}$ e $\bar{x}_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{bmatrix}$

E, para os valores dados dos parâmetros, todos os estados estacionários são instáveis, ocorrendo a existência de um atrator estranho (caos).

A solução tem dimensão não inteira.

Define-se como dimensão:

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln[M(\varepsilon)]}{\ln(1/\varepsilon)} \right]$$

$M(\varepsilon)$: número mínimo de cubos de lado ε necessários para cobrir completamente uma figura geométrica em S.

Fractal: qualquer figura geométrica com dimensão não-inteira

Os mecanismos que provocam o aparecimento do caos podem ser diversos:

- duplicação de período.
- coalescência de estados estacionários.
- destruição de um movimento toroidal.

São várias as técnicas disponíveis para caracterizar o grau de caoticidade de um sistema:

- cálculo da dimensão do atrator (quanto mais perto de um inteiro menor a caoticidade)
- expoentes de Lyapunov (se positivos indicam caos)
- espectro de potência (maior achatamento, maior caos)
- integral de correlação (com o caos tende rápido para zero)
- mapeamento de Poincaré.