Aproximação de Padé

Existem inúmeras formas de aproximar uma função dada, $f(x)$, por funções “mais simples” ou com propriedades mais interessantes (diferenciação, integração, etc.), tais como:

- aproximação polinomial: $f(x) \cong p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$

- séries de potências: $f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

- frações continuadas: $f(x) \cong b_0(x) + \cfrac{a_1(x)}{b_1(x) + \cfrac{a_2(x)}{b_2(x) + \cfrac{a_3(x)}{b_3(x) + \cdots}}}$

- funções racionais: $f(x) \cong \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$

- séries de Fourier: $f(x) \cong a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \,\mathrm{sen}\, kx \right)$

Razão de polinômios

A desvantagem de usar polinômios para a aproximação é sua tendência à oscilação. Este comportamento pode ser reduzido com o uso de funções racionais, que são razões de polinômios:

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$$

Exemplo: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$$e^x = \frac{e^{x/2}}{e^{-x/2}} = \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \cdots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \cdots}$$

para $n = 1$: $e^x \cong \frac{2+x}{2-x}$

para $n = 2$: $e^x \cong \frac{8+4x+x^2}{8-4x+x^2}$, outra aproximação (Padé): $e^x \cong \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$

<u>Técnica da aproximação de Padé</u>:

Utiliza a condição $f^{(k)}(0) = r^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, ..., N$, ou seja, $f(x) - r(x)$ deve ter um zero de multiplicidade $N + 1$ em $x = 0$, onde $N = m + n$.

Fazendo $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, temos:

$$f(x)-r(x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i - \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j} = \frac{(c_0+c_1x+c_2x^2+...)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+...)-(a_0+a_1x+a_2x^2+...)}{q_m(x)}$$

e para termos um zero de multiplicidade $N + 1$ em $x = 0$, os coeficientes de x^k do numerador devem se anular:

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \cdot b_{k-i} - a_k = 0,\ \text{ para } k = 0, 1, 2, ..., N$$

onde $b_{m+1} = b_{m+2} = ... = b_N = 0$ e $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = a_N = 0$ e para normalização: $b_0 = 1$.

Exemplos:

1) $f(x) = e^x$, $n = m = 2 \rightarrow N = 4$

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$c_0\cdot b_0 = a_0 \rightarrow a_0 = c_0 = 1$$

$$c_0\cdot b_1 + c_1\cdot b_0 = a_1 \rightarrow b_1 + 1 = a_1$$

$$c_0\cdot b_2 + c_1\cdot b_1 + c_2\cdot b_0 = a_2 \rightarrow b_2 + b_1 + \frac{1}{2} = a_2$$

$$c_1\cdot b_2 + c_2\cdot b_1 + c_3\cdot b_0 = 0 \rightarrow b_2 + \frac{b_1}{2} + \frac{1}{6} = 0$$

$$c_2\cdot b_2 + c_3\cdot b_1 + c_4\cdot b_0 = 0 \rightarrow \frac{b_2}{2} + \frac{b_1}{6} + \frac{1}{24} = 0$$

Resolvendo as duas últimas equações: $b_1 = -\frac{1}{2}$ e $b_2 = \frac{1}{12}$, e com estes valores nas primeiras equações tem-se: $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = \frac{1}{12}$, ou seja:

$$f(x) \cong \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}} = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$$

A tabela abaixo mostra a aproximação de $f(x) = e^x$ para diferentes valores de $n = m$.

n	Função Aproximada	Máximo do módulo do erro no intervalo $-1 \le x \le +1$
1	$\dfrac{2+x}{2-x}$	0,28
2	$\dfrac{12+6\cdot x+x^2}{12-6\cdot x+x^2}$	$4,10^{-3}$
3	$\dfrac{120+60\cdot x+12\cdot x^2+x^3}{120-60\cdot x+12\cdot x^2-x^3}$	$2,8\cdot 10^{-5}$
4	$\dfrac{1680+840\cdot x+180\cdot x^2+20\cdot x^3+x^4}{1680-840\cdot x+180\cdot x^2-20\cdot x^3+x^4}$	$1,1\cdot 10^{-7}$

2) $f(x) = \cos(x)$, mudança de variável: $u = x^2$ (n é o grau dos polinômios em função de u)

n	Função $f(x)$ aproximada	Máximo do módulo do erro no intervalo $-1 \le x \le +1$
1	$\dfrac{12-5\cdot x^2}{12+x^2}$	$1,84\cdot 10^{-3}$
2	$\dfrac{1-0,456349\cdot x^2+0,020701\cdot x^4}{1+0,043651\cdot x^2+8,597884\cdot 10^{-4}\cdot x^4}$	$3,6\cdot 10^{-7}$
3	$\dfrac{1-0,470596\cdot x^2+0,027388\cdot x^4-0,000372\cdot x^6}{1+0,029404\cdot x^2+0,0000424\cdot x^4+3,235543\cdot 10^{-6}\cdot x^6}$	$1,3\cdot 10^{-11}$
4	$\dfrac{1-0,477862\cdot x^2+0,030842\cdot x^4-0,000587\cdot x^6+3,421843\cdot 10^{-6}\cdot x^8}{1+0,022138\cdot x^2+0,0000245\cdot x^4+1,666854\cdot 10^{-6}\cdot x^6+6,237545\cdot 10^{-9}\cdot x^8}$	$2,2\cdot 10^{-16}$

3) $f(x) = \ln(x)$, mudança de variável: $u = x - 1$ (n é o grau dos polinômios em função de u)

A aproximação de Padé foi feita em $\ln(u+1)/u$

n	Função $f(x)$ aproximada	Máximo do módulo do erro no intervalo $+1 \le x \le +2$
1	$\dfrac{6\cdot(x-1)+(x-1)^2}{6+4\cdot(x-1)}$	$6,85\cdot 10^{-3}$
2	$\dfrac{30\cdot(x-1)+21\cdot(x-1)^2+(x-1)^3}{30+36\cdot(x-1)+9\cdot(x-1)^2}$	$1,9\cdot 10^{-4}$
3	$\dfrac{420\cdot(x-1)+510\cdot(x-1)^2+140\cdot(x-1)^3+3\cdot(x-1)^4}{420+720\cdot(x-1)+360\cdot(x-1)^2+48\cdot(x-1)^3}$	$5,3\cdot 10^{-6}$
4	$\dfrac{3780\cdot(x-1)+6510\cdot(x-1)^2+3360\cdot(x-1)^3+505\cdot(x-1)^4+6\cdot(x-1)^5}{3780+8400\cdot(x-1)+6300\cdot(x-1)^2+1800\cdot(x-1)^3+150\cdot(x-1)^4}$	$1,52\cdot 10^{-7}$