5-) Exemplo 2.2 da página 36 do livro de Kubiccek & Hlavacek.

$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy(x)}{dx}=-\delta\cdot e^{y(x)}$, definida no domínio: $0\le x<1$ e sujeita às condições de contorno: CC1: x =0: $\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=0}=0$ e CC2: x = 1: $y(1)=0$.

Reescrevendo a equação em termos de $u=x^2$ tem-se:

$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy(x)}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left[x\cdot\frac{dy(x)}{dx}\right]=4\cdot\frac{d}{du}\left[u\cdot\frac{dy(u)}{du}\right]=-\delta\cdot e^{y(u)}$, assim:

$\frac{d}{du}\left[u\cdot\frac{dy(u)}{du}\right]=-\frac{\delta}{4}\cdot e^{y(u)}$, definida no domínio: $0\le u<1$ e sujeita às condições de contorno: CC1: u =0: $\left.\frac{dy(u)}{du}\right|_{u=0}\to$ finita e CC2: u = 1: $y(1)=0$.

Propondo-se a aproximação polinomial de grau n em u para $y(u)$:

$$y(u)\cong y^{(n)}(u)=\sum_{j=1}^{n+1}\ell_j(u)\cdot y_j=\sum_{j=1}^{n}\ell_j(u)\cdot y_j$$

Em que: $\ell_j(u)$:polinômio em u de grau n, tal que:

$$\ell_j(u_i)=\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{para } i=j\\ 0 & \text{para } i\neq j\end{cases} \text{ [função δ de Krönecker];}$$

$$y_j=y^{(n)}(u_j) \text{ e } 0<u_1<u_2<\cdots u_n<u_{n+1}\equiv 1 \text{ e como } y(1)=0\Rightarrow y_{n+1}=0$$

O resíduo a aproximação em cada ponto de interpolação será:

$\boxed{\Re^{(n)}(u_i)=\Re_i^{(n)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbb{C}_{i,j}\cdot y_j\right)+\frac{\delta}{4}\cdot e^{y_i}}$, para i =1, 2,..., n+1.

Sendo: $\mathbb{C}_{i,j}=u_i\cdot B_{i,j}+A_{i,j}$

No método de colocação, tem-se:

$\Re_i^{(n)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbb{C}_{i,j}\cdot y_j\right)+\frac{\delta}{4}\cdot e^{y_i}=0$ para i= 1, 2, $\cdots$, n

Para reproduzir o método dos momentos deve-se adotar: $0<u_1<u_2<\cdots u_n<1$ como sendo as n raízes de $P_n^{\left(0,\frac{s-1}{2}\right)}(u)$ e para reproduzir o método de Galerkin deve-se adotar: $0<u_1<u_2<\cdots u_n<1$ como sendo as n raízes de $P_n^{\left(1,\frac{s-1}{2}\right)}(u)$.