Solução Analítica do Exemplo 2.2 da página 36 do livro de Kubiccek & Hlavacek.

$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy(x)}{dx}=-\delta\cdot e^{y(x)}$, definida no domínio: 0<x<1 e sujeita às condições de contorno: CC1: x =0: $\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=0}=0$ e CC2: x = 1: $y(1)=0$.

Adotando como nova variável independente: $u=x^2$, resulta:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy(x)}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left[x\cdot\frac{dy(x)}{dx}\right]=4\cdot\frac{d}{du}\left[u\cdot\frac{dy(u)}{du}\right]=-\delta\cdot e^{y(u)}\text{, assim:}$$

$$\boxed{4\cdot\frac{d}{du}\left[u\cdot\frac{dy(u)}{du}\right]=-\delta\cdot e^{y(u)}}\ \text{(I)}$$

Adotando: $z(u)=u\cdot\frac{dy(u)}{du}$ como nova variável dependente, tem-se: $4\cdot\frac{dz(u)}{du}=-\delta\cdot e^{y(u)}$

Note que: $z(0)=\left[u\cdot\frac{dy(u)}{du}\right]_{u=0}=0$ e $\left.\frac{dz(u)}{du}\right|_{u=1}=-\frac{\delta}{4}$ pois $\left.y(u)\right|_{u=1}=0$

Derivando membro a membro da última expressão em relação a u, obtém-se:

$$4\cdot\frac{d^2z(u)}{du^2}=-\delta\cdot e^{y(u)}\cdot\frac{dy(u)}{du}=-\delta\cdot e^{y(u)}\cdot\frac{z}{u}\text{, mas: }-\delta\cdot e^{y(u)}=4\cdot\frac{dz(u)}{du}\text{, logo:}$$

$$\frac{d^2z(u)}{du^2}-\frac{dz(u)}{du}\cdot\frac{z}{u}=0\ \text{ ou : }u\cdot\frac{d^2z(u)}{du^2}-z\cdot\frac{dz(u)}{du}=0.$$

Identificando: $\frac{d}{du}\left(u\cdot\frac{dz(u)}{du}\right)=u\cdot\frac{d^2z(u)}{du^2}+\frac{dz(u)}{du}$, tem-se:

$$u\cdot\frac{d^2z(u)}{du^2}+\frac{dz(u)}{du}-(z+1)\cdot\frac{dz(u)}{du}=0\Rightarrow\frac{d}{du}\left[u\cdot\frac{dz}{du}-\frac{(z+1)^2}{2}\right]=0\text{. Então:}$$

$$u\cdot\frac{dz}{du}-\frac{(z+1)^2}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow u\cdot\frac{dz}{du}-\frac{(z+1)^2-1}{2}=u\cdot\frac{dz}{du}-\frac{z\cdot(z+2)}{2}=0$$

Como: $\left.\frac{dz(u)}{du}\right|_{u=1}=-\frac{\delta}{4}\Rightarrow-\frac{\delta}{4}-\frac{z(1)\left[z(1)+2\right]}{2}=0\Rightarrow z^2(1)+2\cdot z(1)+\frac{\delta}{2}=0$, que só apresentará raiz real se: $\Delta=4-2\cdot\delta=2\cdot(2-\delta)>0$ isto é: δ<2.

Agrupando os termos: $\dfrac{dz}{z}-\dfrac{dz}{z+2}-\dfrac{du}{u}=0\Rightarrow \ln\left[\dfrac{z}{(z+2)\cdot u}\right]=C\Rightarrow \dfrac{(z+2)\cdot u}{z}=A$,

explicitando z, resulta:

$$z(u)=\frac{2\cdot u}{A-u}=u\cdot\frac{dy(u)}{du}\Rightarrow dy(u)=\frac{2}{A-u}\cdot du\Rightarrow y(u)=\ln\left(\frac{A-1}{A-u}\right)^2$$

Voltando à variável x: $\boxed{y(x)=\ln\left(\dfrac{A-1}{A-x^2}\right)^2}$

Para determinar a constante A, utiliza-se: $z^2(1)+2\cdot z(1)+\dfrac{\delta}{2}=0$ e

$$A=\frac{(z+2)\cdot u}{z}\Rightarrow A=1+\frac{2}{z(1)}$$