EXEMPLO MOTIVADOR I

Método da Aproximação Polinomial Aplicado a Problemas Unidirecionais com Simetria

1. Equações Diferenciais Ordinárias – Problemas de Valor no Contorno

Estrutura Geral do Problema:

$$\frac{1}{x^s}\cdot\frac{d}{dx}\left[x^s\cdot\frac{dy(x)}{dx}\right]-f\left[x,y(x)\right]=0 \tag{1}$$

no domínio : $0 \le x < 1$

Sujeita às condições de contorno:

$$\text{CC1: } \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=0}=0 \tag{2-a}$$

$$\text{CC2: } \alpha\cdot\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1}+\left.y(x)\right|_{x=1}=1 \tag{2-b}$$

O valor médio de uma função de $y(x)$ no domínio: $0 \le x < 1$ é definido através da integral:

$$\bar{F}=(s+1)\cdot\int_{x=0}^{x=1}x^s\cdot F\left[y(x)\right]\cdot dx \tag{3}$$

A CC1 traduz na realidade o fato de $y(x)$ ser uma função par em x, isto é: $y(x)=y(x^2)$, adotando assim como nova variável independente $u = x^2$, tem-se:

$$\frac{4}{u^{\frac{s-1}{2}}}\cdot\frac{d}{du}\left[u^{\frac{s+1}{2}}\cdot\frac{dy(u)}{du}\right]-\hat{f}\left[u,y(u)\right]=0 \text{ no domínio : } 0 \le u < 1 \tag{4}$$

Ou, na forma *aberta*:

$$u\cdot\frac{d^2y(u)}{du^2}+\frac{s+1}{2}\cdot\frac{dy(u)}{du}-\frac{\hat{f}\left[u,y(u)\right]}{4}=0 \text{ no domínio : } 0 \le u < 1 \tag{5}$$

Sujeita às condições de contorno:

$$\text{CC1: } \left.\frac{dy(u)}{du}\right|_{u=0}\Rightarrow \text{FINITA} \tag{6-a}$$

$$\text{CC2: } 2\cdot\alpha\cdot\left.\frac{dy(u)}{du}\right|_{u=1}+\left.y(u)\right|_{u=1}=1 \tag{6-b}$$

O valor médio de uma função de $y(u)$ no domínio: $0 \le u < 1$ é definido através da integral:

$$\bar{F} = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot F\left[y(u)\right] \cdot du \tag{7}$$

Propondo-se a aproximação polinomial de grau n em u para $y(u)$:

$$y(u) \cong y^{(n)}(u) = \sum_{j=1}^{n+1} \ell_j(u) \cdot y_j$$

em que: $\ell_j(u)$:polinômio em u de grau n, tal que: (8)

$\ell_j(u_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$ [função δ de Krönecker];

$y_j = y^{(n)}(u_j)$ e $0 < u_1 < u_2 < \cdots u_n < u_{n+1} \equiv 1$

Essa aproximação pode também ser apresentada na forma:

$$y(u) \cong y^{(n)}(u) = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot u^j \Rightarrow y(1) \cong y^{(n)}(1) = \sum_{j=0}^{n} c_j \text{ e } \left.\frac{dy(u)}{du}\right|_{u=1} \cong \left.\frac{dy^{(n)}(u)}{du}\right|_{u=1} = \sum_{j=0}^{n} j \cdot c_j$$

Obrigando-se essa aproximação a satisfazer a CC2, isto é:

$2 \cdot \alpha \cdot \left.\frac{dy^{(n)}(u)}{du}\right|_{u=1} + y^{(n)}(u)\Big|_{u=1} = 1$, resultado: $c_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} (2 \cdot \alpha \cdot j + 1) \cdot c_j$, que substituído na expressão de $y^{(n)}(u)$ resulta em:

$$y^{(n)}(u, \boldsymbol{c}) = 1 + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \left(u^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j\right) \text{ em que: } \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \Re^n \tag{9}$$

Note que nessa forma, a aproximação polinomial $y^{(n)}(u)$ satisfaz às duas condições de contorno associadas ao problema!

A substituição da aproximação polinomial $y^{(n)}(u)$ na equação diferencial (5) dá origem à expressão do *Resíduo* da aproximação, definido por:

$$\boldsymbol{R}^{(n)}(u, \boldsymbol{c}) = u \cdot \frac{d^2 y^{(n)}(u, \boldsymbol{c})}{du^2} + \left(\frac{s+1}{2}\right) \cdot \frac{dy^{(n)}(u, \boldsymbol{c})}{du} - \frac{\hat{f}\left[u, y^{(n)}(u, \boldsymbol{c})\right]}{4} \tag{10}$$

Esse resíduo mede a qualidade da aproximação ponto a ponto do intervalo: $0 \leq u < 1$. Para quantificá-lo globalmente, o mesmo deve associar-se à seguinte forma integral:

$$\boldsymbol{R}_j^{(n)}(\boldsymbol{c}) = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot \omega_j(u) \cdot \boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c}) \cdot du \equiv 0 \text{ para } j = 1, 2, ..., n \tag{11}$$

$\boldsymbol{R}_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{n})}(\mathbf{c})$ é chamado de *j*'ésimo *Resíduo Ponderado* da aproximação, sendo $\omega_j(u)$ o *j*'ésimo peso do resíduo e é o que caracteriza o tipo do método dentro da classe geral de métodos denominados como ***Métodos dos Resíduos Ponderados***. Os três principais ***Métodos dos Resíduos Ponderados*** apresentam os valores de $\omega_j(u)$:

$\omega_j(u)$	***Método dos Resíduos Ponderados***	
u^{j-1}	***Método dos Momentos***	(12-a)
$\dfrac{\partial y^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{\partial c_j}$	***Método de Galerkin***	(12-b)
$\dfrac{\partial \boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{\partial c_j}$	***Método dos Mínimos Quadrados***	(12-c)

Mas, de (9), tem-se: $\dfrac{\partial y^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{\partial c_j} = u^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j$, assim:

$\omega_j(u)$	***Método dos Resíduos Ponderados***	
u^{j-1}	***Método dos Momentos***	(13-a)
$u^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j$	***Método de Galerkin***	(13-b)
$\dfrac{\partial \boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{\partial c_j}$	***Método dos Mínimos Quadrados***	(13-c)

Para *j* = 1, 2, ..., *n*.

A dificuldade de computar a derivada dos resíduos em relação ao coeficiente c_j é uma grande desvantagem do ***Método dos Mínimos Quadrados***, assim sendo, esse método não será considerado. Entretanto, o valor do ***Valor Médio do Quadrado do Resíduo*** será considerado na avaliação do desempenho do método, sendo tal valor expresso por:

$$\bar{\boldsymbol{R}}_{quad}(\boldsymbol{c}) = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot \left[\boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c})\right]^2 \cdot du \tag{14}$$

1-) ***<u>Método dos Momentos</u>***

Neste caso:

$$\boldsymbol{R}_j^{(n)}(\boldsymbol{c}) = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot u^{j-1} \cdot \boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c}) \cdot du \equiv 0 \text{ para } j = 1, 2, ..., n \quad (15)$$

Quando a função: $f\left[u, y(u)\right] = f\left[y(u)\right] = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y(u)$, sendo α_0 e α_1 constantes, o resíduo $\boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c})$ será uma função polinomial em *u* com o mesmo grau *n* de $y^{(n)}(u,\boldsymbol{c})$. E, nesse caso, o integrando de (15), $u^{j-1} \cdot \boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c})$, será um polinômio em *u* de grau $n + j - 1$, como *j* varia de 1 a *n*, o maior grau assumido por este termo é: $2 \cdot n - 1$. Dessa forma, a integral em (15) pode, no caso linear, ser avaliada **exatamente** por quadratura de Gauss, resultando na expressão:

$$\boldsymbol{R}_j^{(n)}(\boldsymbol{c}) = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot u^{j-1} \cdot \boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c}) \cdot du \cong \sum_{i=1}^{n} H_i \cdot u_i^{j-1} \cdot \boldsymbol{R}^{(n)}(u_i,\boldsymbol{c}) \equiv 0 \quad (16)$$

para *j* = 1, 2, ..., *n*

Sendo: $0 < u_1 < u_2 < \cdots u_n < 1$ as *n* raízes de $P_n^{\left(0,\frac{s-1}{2}\right)}(u)$ e verificando-se a igualdade caso: $f\left[u, y(u)\right] = f\left[y(u)\right] = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y(u)$, sendo α_0 e α_1 constantes.

Desse modo, se:

$$\boldsymbol{R}^{(n)}(u_i,\boldsymbol{c}) = u_i \cdot \left.\frac{d^2 y^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{du^2}\right|_{u_i} + \frac{s+1}{2} \cdot \left.\frac{dy^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{du}\right|_{u_i} - \frac{\hat{f}\left[u_i, y^{(n)}(u_i,\boldsymbol{c})\right]}{4} = 0 \quad (17)$$

Pode-se assegurar que <u>todos</u> os resíduos ponderados: $\boldsymbol{R}_j^{(n)}(\boldsymbol{c})$ são *aproximadamente* nulos, sendo esses *exatamente* nulos se $f\left[u, y(u)\right] = f\left[y(u)\right] = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y(u)$, sendo α_0 e α_1 constantes.

Substituindo em (17):

$y^{(n)}(u_i) = y_i\,;\;\; \left.\dfrac{dy^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{du}\right|_{u_i} = \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{i,j} \cdot y_j$ e $\left.\dfrac{d^2 y^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{du^2}\right|_{u_i} = \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{B}_{i,j} \cdot y_j$ e rearranjando a expressão resultante, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{C}_{i,j} \cdot y_j = \frac{\hat{f}\,[u_i, y_i]}{4} \quad \text{para } i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{, sendo: } \boldsymbol{C}_{i,j} = u_i \cdot \boldsymbol{B}_{i,j} + \frac{s+1}{2} \cdot \boldsymbol{A}_{i,j} \qquad (18)$$

Além dessas equações, tem-se, após substituição de: $y(1) \cong y^{(n)}(u_{n+1}) = y_{n+1}$ e

$\left.\dfrac{dy(u)}{du}\right|_{u=1} \cong \left.\dfrac{dy^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{du}\right|_{u_{n+1}=1} = \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{n+1,j} \cdot y_j$ em (6-b): $2 \cdot \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{n+1,j} \cdot y_j + y_{n+1} = 1$.

Dando origem ao sistema algébrico não linear de n+1 equações e n+1 incógnitas [y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}] :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{C}_{i,j} \cdot y_j = \frac{\hat{f}\,[u_i, y_i]}{4} \quad \text{para i } = 1,\ 2,\ \cdots, \text{n} \\ \displaystyle 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{n+1,j} \cdot y_j + y_{n+1} = 1 \end{cases} \qquad (19)$$

A ser resolvido pelo método de Newton-Raphson.

As n primeiras equações do sistema de equações acima são idênticas às obtidas pela aplicação direta do ***Método da Colocação Ortogonal***, adotando como ***pontos de colocação*** [os pontos nos quais os resíduos da equação diferencial se anulam] as n raízes de $P_n^{(\alpha,\beta)}(u)$ com $\alpha = 0$ e $\beta = \dfrac{s-1}{2}$.

2-) ***Método de Galerkin***

Neste caso:

$$\boldsymbol{R}_j^{(n)}(\boldsymbol{c}) = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot \left(u^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j\right) \cdot \boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c}) \cdot du \equiv 0 \text{ para } j = 1, 2, ..., n \qquad (20)$$

Quando a função: $f\left[u, y(u)\right] = f\left[y(u)\right] = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y(u)$, sendo α_0 e α_1 constantes, o resíduo $\boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c})$ será uma função polinomial em u com o mesmo grau n de $y^{(n)}(u,\boldsymbol{c})$. E, nesse caso, o integrando de (15), $\left(u^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j\right) \cdot \boldsymbol{R}^{(n)}(u,\boldsymbol{c})$, será um polinômio em u de grau $n + j$, como j varia de 1 a n, o maior grau assumido por este termo é: $2 \cdot n$. Dessa forma, a integral em (15) pode, no caso linear, ser avaliada **exatamente** por quadratura de do tipo Gauss-Radau com inclusão da extremidade superior $u_{n+1} \equiv 1$, resultando na expressão:

$$\boldsymbol{R}_j^{(n)}(\boldsymbol{c}) = \frac{(s+1)}{2} \cdot \cdots \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot \left(u^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j\right) \cdot \boldsymbol{R}^{(n)}(u, \boldsymbol{c}) \cdot du \cong$$
$$\cong \sum_{i=1}^{n+1} H_i \cdot \left(u_i^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j\right) \cdot \boldsymbol{R}^{(n)}(u_i, \boldsymbol{c}) \equiv 0 \text{ para } j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{21}$$

Em que: $0 < u_1 < u_2 < \cdots u_n < 1$ são as n raízes de $P_n^{\left(1, \frac{s-1}{2}\right)}(u)$ e $u_{n+1} \equiv 1$, verificando-se a igualdade caso: $f\left[u, y(u)\right] = f\left[y(u)\right] = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y(u)$, sendo α_0 e α_1 constantes.

Desse modo, se:

$$\sum_{i=1}^{n+1} H_i \cdot \left(u_i^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j\right) \cdot R^{(n)}(u_i, c) \equiv 0 \tag{22}$$

pode-se assegurar que <u>todos</u> os resíduos ponderados : $\boldsymbol{R}_j^{(n)}(\boldsymbol{c})$ são *aproximadamente* nulos, sendo os mesmos *exatamente* nulos se $f\left[u, y(u)\right] = f\left[y(u)\right] = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y(u)$, com α_0 e α_1 constantes.

Substituindo em (22): $y(1) \cong y^{(n)}(u_i) = y_i$, $\left.\frac{dy(u)}{du}\right|_{u=u_i} \cong \left.\frac{dy^{(n)}(u, \boldsymbol{y})}{du}\right|_{u=u_i} = \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{i,j} \cdot y_j$,

$\left.\frac{d^2 y(u)}{du^2}\right|_{u=u_i} \cong \left.\frac{d^2 y^{(n)}(u, \boldsymbol{y})}{du^2}\right|_{u=u_i} = \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{B}_{i,j} \cdot y_j$, identificando:

$\boldsymbol{R}^{(n)}(u_i, \boldsymbol{c}) = \sum_{k=1}^{n+1} \boldsymbol{C}_{i,k} \cdot y_k - \frac{\hat{f}\left[u_i, y_i\right]}{4}$ para $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$, em que: $\boldsymbol{C}_{i,j} = u_i \cdot \boldsymbol{B}_{i,j} + \frac{s+1}{2} \cdot \boldsymbol{A}_{i,j}$,

a expressão (22) transforma-se em:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{D}_{j,i} \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{E}_{j,i} \cdot \hat{f}\left[u_i, y_i\right] \text{ para } j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \text{ em que:} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{D}_{j,i} = \sum_{k=1}^{n+1} H_k \cdot \left(u_k^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j\right) \cdot \boldsymbol{C}_{k,i} \text{ e } \boldsymbol{E}_{j,i} = \frac{1}{4} \cdot H_i \cdot \left(u_i^j - 1 - 2 \cdot \alpha \cdot j\right)$$

Além dessas equações, tem-se, após substituição de: $y(1) \cong y^{(n)}(u_{n+1}) = y_{n+1}$ e

$$\left.\frac{dy(u)}{du}\right|_{u=1} \cong \left.\frac{dy^{(n)}(u,\boldsymbol{c})}{du}\right|_{u_{n+1}=1} = \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{n+1,j} \cdot y_j \text{ em (6-b): } 2\cdot\alpha\cdot\sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{n+1,j}\cdot y_j + y_{n+1} = 1.$$

Dando origem ao sistema algébrico não linear de n+1 equações e n+1 incógnitas [y_1 , y_2 , ..., y_n , y_{n+1}]

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{D}_{i,j}\cdot y_j = \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{E}_{i,j}\cdot \hat{f}\left[u_j, y_j\right] \text{para} \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ \displaystyle 2\cdot\alpha\cdot\sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{n+1,j}\cdot y_j + y_{n+1} = 1 \end{cases} \tag{24}$$

em que: $\boldsymbol{D}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} H_k \cdot \left(u_k^i - 1 - 2\cdot\alpha\cdot i\right)\cdot \boldsymbol{C}_{k,j}$; $\boldsymbol{E}_{i,j} = \dfrac{H_j\cdot\left(u_j^i - 1 - 2\cdot\alpha\cdot i\right)}{4}$; $0 < u_1 < u_2 < \cdots u_n < 1$

são as n raízes de $P_n^{\left(1,\frac{s-1}{2}\right)}(u)$ e $u_{n+1} \equiv 1$.

O sistema algébrico não linear (24) pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson.

O ***Método dos Momentos*** poderia também ser resolvido de forma análoga, sendo necessário apenas modificar as definições: $\boldsymbol{D}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} H_k \cdot u_k^{i-1}\cdot \boldsymbol{C}_{k,j}$; $\boldsymbol{E}_{i,j} = \dfrac{H_j\cdot u_j^{i-1}}{4}$;

$0 < u_1 < u_2 < \cdots u_n < 1$ são as n raízes de $P_n^{\left(1,\frac{s-1}{2}\right)}(u)$ e $u_{n+1} \equiv 1$.

<u>Exercício de Treinamento</u>: Resolva numericamente o problema:

$$\frac{1}{x^s}\cdot\frac{d}{dx}\left[x^s\cdot\frac{dy(x)}{dx}\right] - f\left[x, y(x)\right] = 0 \text{, no domínio : } 0 \le x < 1 \tag{1}$$

Sujeita às condições de contorno:

$$\text{CC1: } \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0 \tag{2-a}$$

$$\text{CC2: } \alpha\cdot\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1} + \left.y(x)\right|_{x=1} = 1 \tag{2-b}$$

Considerando o valor do parâmetro α como nulo e um valor positivo qualquer, considere também os dois casos: $f\left[x, y(x)\right] = \begin{cases} \lambda\cdot y(x) \\ \lambda\cdot\left[y(x)\right]^m \end{cases}$ escolhendo os valores de λ >0 e m>0.

Compare seus resultados aplicando o método dos momentos e o de Galerkin e adotando valores crescentes de n.

No caso linear, isto é: $f\left[x, y(x)\right] = \lambda \cdot y(x)$, compare seus resultados com a solução analítica.
Utilize em todas as situações como critério de desempenho do método o valor médio do resíduo ao quadrado [Equação (14)].

<u>CASO LINEAR</u> $s = 2;\quad \alpha = 10\quad$ e $\quad \lambda = 100$

Método dos Momentos

n	$3 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \left[erro(x)\right]^2 dx$	$3 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot Res^2(x) dx$
2	$3.033.10^{-6}$	$5.653 \,.\, 10^{-3}$
3	$1.144.10^{-7}$	$3.485.10^{-4}$
4	$2.865.10^{-9}$	$1.372.10^{-5}$
5	$4.\,276.10^{-11}$	$3.201.10^{-7}$
6	$3.968.10^{-13}$	$4.552.10^{-9}$
8	0.000	$2.416.10^{-13}$

Método de Galerkin

n	$3 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \left[erro(x)\right]^2 dx$	$3 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot Res^2(x) dx$
2	$2.455.10^{-6}$	$5.371 \,.\, 10^{-3}$
3	$6.339.10^{-8}$	$3.387.10^{-4}$
4	$1.245.10^{-9}$	$1.485.10^{-5}$
5	$1.660.10^{-11}$	$3.973.10^{-7}$
6	$1.458.10^{-13}$	$6.440.10^{-9}$
8	0.000	$4.283.10^{-13}$

2. <u>Equações Diferenciais Parciais Parabólicas – o **Método das Linhas**</u>
Estrutura Geral do Problema:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^s} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x^s \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right] - f\left[x, y(x,t)\right] \text{no domínio : } 0 \le x < 1 \text{ e } t > 0. \qquad (1)$$

Sujeita às condições:

$$\text{Condições de contorno: } \begin{cases} \text{CC1: } \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 & \qquad (2\text{-a}) \\ & \text{para } t > 0 \\ \text{CC2: } \alpha \cdot \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} + \left. y(x,t)\right|_{x=1} = y_b(t) & \qquad (2\text{-b}) \end{cases}$$

Condição Inicial: $\left. y(x,t)\right|_{t=0} = y_{inic}(x)$ para $0 \le x < 1$ (2-c)

A aplicação do método da aproximação polinomial é no caso transiente análoga à do caso estacionário, isto é: aplica-se a aproximação polinomial à variável $y(x,t)$ na variável x e a equação diferencial parcial original se transforma em um sistema de n equações diferenciais ordinárias em t acoplado a uma equação algébrica relativa à condição de contorno 2. Esse procedimento pode ser classificado como um **método das linhas**, que corresponde, de um modo geral, à transformação de sistemas de equações diferenciais parciais no tempo e no espaço em um sistema algébrico-diferencial ordinário na variável t através de aproximações (ou discretizações) aplicadas às variáveis espaciais. Deste modo, a variável $y(x,t)$ é aproximada por:

$$y(x,t) \cong y^{(n)}(u,t) = \sum_{j=1}^{n+1} \ell_j(u) \cdot y_j(t), \text{ em que: } u = x^2; \qquad (3)$$

$\ell_j(u)$: polinômio em u de grau n, tal que: $\ell_j(u_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$,

$y_j(t) = y^{(n)}(u_j, t)$ e $0 < u_1 < u_2 < \cdots u_n < u_{n+1} \equiv 1$

A expressão do resíduo da equação diferencial original , Equação (1), é:

$$\boldsymbol{R}^{(n)}\left[u, \boldsymbol{y}(t)\right] = \frac{\partial y^{(n)}\left[u, \boldsymbol{y}(t)\right]}{\partial t} - 4 \cdot \left\{ u \cdot \frac{\partial^2 y^{(n)}\left[u, \boldsymbol{y}(t)\right]}{\partial u^2} + \frac{s+1}{2} \cdot \frac{\partial y^{(n)}\left[u, \boldsymbol{y}(t)\right]}{\partial u} \right\} + \qquad (4)$$

$$+ \hat{f}\left\langle u, y^{(n)}\left[u, \boldsymbol{y}(t)\right]\right\rangle$$

Em que: $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \\ y_{n+1}(t) \end{pmatrix} \in \Re^{n+1}$.

Esse resíduo mede a qualidade da aproximação, a cada tempo, ponto a ponto do intervalo: $0 \le u < 1$, para quantificá-lo globalmente, associa-o às seguintes integrais:

$$\boldsymbol{R}_j^{(n)}\left[\boldsymbol{y}(t)\right]=\frac{(s+1)}{2}\cdot\int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}}\cdot\omega_j(u)\cdot\boldsymbol{R}^{(n)}\left[u,\boldsymbol{y}(t)\right]\cdot du \equiv 0 \quad \text{para } j=1,\,2,\,\cdots,\,n \qquad (5)$$

Sendo:

$\omega_j(u)$	***Método dos Resíduos Ponderados***	
u^{j-1}	***Método dos Momentos***	(6-a)
$u^j - 1 - 2\cdot\alpha\cdot j$	***Método de Galerkin***	(6-b)

Computando os n resíduos ponderados de (5) por quadratura de Gauss-Radau, resulta:

$$\sum_{j=1}^{n+1}\boldsymbol{E}_{i,j}\cdot\frac{dy_j(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n+1}\boldsymbol{D}_{i,j}\cdot y_j(t)-\sum_{j=1}^{n+1}\boldsymbol{E}_{i,j}\cdot\hat{f}\left[u_j,y_j(t)\right],\ \text{para}\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (7)$$

Sujeitas às condições iniciais: $y_i(0)=y_{inic}\left(\sqrt{u_i}\right)$ para $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$

Em que:

(i) ***Método dos Momentos:*** $\boldsymbol{E}_{i,j}=H_j\cdot u_j^{i-1}$ e $\boldsymbol{D}_{i,j}=\sum_{k=1}^{n+1}H_k\cdot u_k^{i-1}\cdot\boldsymbol{C}_{\mathrm{k,j}}$

(ii) ***Método de Galerkin:*** $\boldsymbol{E}_{i,j}=H_j\cdot\left(u_j^i-1-2\cdot\alpha\cdot i\right)$ e

$$\boldsymbol{D}_{i,j}=\sum_{k=1}^{n+1}H_k\cdot\left(u_k^i-1-2\cdot\alpha\cdot i\right)\cdot\boldsymbol{C}_{\mathrm{k,j}}$$

Sendo: $\boldsymbol{C}_{k,j}=4\cdot\left[u_k\cdot\boldsymbol{B}_{k,j}+\frac{s+1}{2}\cdot\boldsymbol{A}_{k,j}\right]$; $0<u_1<u_2<\cdots u_n<1$ as n raízes de $P_n^{\left(1,\frac{s-1}{2}\right)}(u)$ e $u_{n+1}\equiv 1$.

Ao sistema (7), associa-se a equação algébrica (linear), correspondente à condição de contorno 2, reescrita em termos da variável u, expressa por:

$$2\cdot\alpha\cdot\sum_{j=1}^{n+1}\boldsymbol{A}_{n+1,j}\cdot y_j(t)+y_{n+1}(t)=y_b(t).$$

Assim, o método da aproximação polinomial em x aplicado à equação diferencial parcial (1) dá origem ao sistema algébrico-diferencial (de índice diferencial = 1):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{E}_{i,j} \cdot \dfrac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{D}_{i,j} \cdot y_j(t) - \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{E}_{i,j} \cdot \hat{f}\left[u_j, y_j(t)\right], \text{ para } \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{n+1,j} \cdot y_j(t) + y_{n+1}(t) = y_b(t) \end{cases} \tag{8}$$

Sujeitas às condições iniciais: $y_i(0) = y_{inic}\left(\sqrt{u_i}\right)$ para $\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$.

<u>Exercício de Treinamento</u>: resolva numericamente o problema:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{x^s} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x^s \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right] - f\left[x, y(x,t)\right], \text{no domínio : } 0 \le x < 1 \text{ e } t > 0. \tag{1}$$

Sujeita às condições:

$$\text{Condições de contorno: } \begin{cases} \text{CC1: } \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 & (2\text{-a}) \\ \text{CC2:} \alpha \cdot \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} + \left. y(x,t)\right|_{x=1} = y_b(t) & (2\text{-b}) \end{cases} \quad \text{para } t>0$$

Condição Inicial: $\left. y(x,t)\right|_{t=0} = y_{inic}(x)$ para $0 \le x < 1$

(2-c)

Considerando o valor do parâmetro α como nulo e um valor positivo qualquer, considere também os dois casos: $f\left[x, y(x,t)\right] = \begin{cases} \lambda \cdot y(x,t) \\ \lambda \cdot \left[y(x,t)\right]^m \end{cases}$ escolhendo os valores de $\lambda > 0$ e $m > 0$.

Considere, por simplicidade, $y_{inic} = 0$ e $y_b(t) = 1$ (simulação do *start-up*).

Compare seus resultados aplicando o método dos momentos e o de Galerkin e adotando valores crescentes de n.

Avalie em sua resposta a variação com o tempo do valor médio de $y(x,t)$:

$$\bar{y}(t) = (s+1) \cdot \int_{x=0}^{x=1} x^s \cdot y(x,t) \cdot dx = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot y(u,t) \cdot du$$

No caso linear, isto é: $f\left[x, y(x,t)\right] = \lambda \cdot y(x,t)$, compare seus resultados com a solução analítica.

Utilize em todas as situações como critério de desempenho do método a evolução temporal do valor médio do resíduo ao quadrado.

3) **Sistematização do Método Para Problemas Com Simetria**

Após identificar a função peso do método escolhido e a expressão do resíduo, computa-se a integral do *j'*ésimo resíduo ponderado:

$$\boldsymbol{R}_j^{(n)}\left[\boldsymbol{y}\right]=\frac{(s+1)}{2}\cdot\int_{u=0}^{u=1}u^{\frac{s-1}{2}}\cdot\omega_j(u)\cdot\boldsymbol{R}^{(n)}\left[u,\boldsymbol{y}\right]\cdot du\equiv 0 \text{ para } j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \quad (1)$$

Computando essa integral por quadratura de tipo Gauss-Radau, com inclusão da extremidade superior: $u_{n+1}=1$, tem-se:

$$\boldsymbol{R}_j^{(n)}\left[\boldsymbol{y}\right]\cong\sum_{k=1}^{n+1}H_k\cdot\omega_j(u_k)\cdot\boldsymbol{R}_k\equiv 0 \quad \text{em que: } \boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{R}^{(n)}\left[u_k,\boldsymbol{y}\right],\ \text{para } j=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \quad (2)$$

Sendo : $0<u_1<u_2<\cdots u_n<1$ as n raízes de $P_n^{\left(1,\frac{s-1}{2}\right)}(u)$ e $u_{n+1}\equiv 1$

Note que nas n equações algébricas lineares: $\sum_{k=1}^{n+1}H_k\cdot\omega_j(u_k)\cdot\boldsymbol{R}_k\equiv 0$ é possível expressar os n resíduos nos **pontos internos** em função do resíduo na extremidade superior $u_{n+1}\equiv 1$, assim:

$$\sum_{k=1}^{n+1}H_k\cdot\omega_j(u_k)\cdot\boldsymbol{R}_k\equiv 0\ \Rightarrow\boldsymbol{R}_i=v_i\cdot\boldsymbol{R}_{n+1}\quad \text{para } i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \quad (3)$$

Sendo: $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}$.

Em que: $\boldsymbol{G}_{i,j}=H_j\cdot\omega_i(u_j)$ e $\boldsymbol{p}_j=H_{n+1}\cdot\omega_j(u_{n+1})$, para $i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

A grande vantagem de representar o método nesta forma é que independe do problema ser estacionário ou transiente, bastando identificar a expressão do resíduo em cada ponto de interpolação (incluindo a extremidade superior!). Além disso, nessa forma o método se assemelha à forma clássica do método de colocação ortogonal.

No problema estacionário, tem-se:

$$\boldsymbol{R}_i=\sum_{j=1}^{n+1}\boldsymbol{C}_{i,j}\cdot y_i-\frac{\hat{f}\left[u_i,y_i\right]}{4}\quad \text{para } i=1,\ 2,\ \cdots,n,\ n+1. \quad (4)$$

Em que: $\boldsymbol{C}_{i,j}=u_i\cdot\boldsymbol{B}_{i,j}+\frac{s+1}{2}\cdot\boldsymbol{A}_{i,j}$.

Resultando no sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}\left[\boldsymbol{C}_{i,j}-\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{C}_{n+1,j}\right]\cdot y_j=\frac{\hat{f}\left[u_i,y_i\right]-\boldsymbol{v}_i\cdot\hat{f}\left[u_{n+1},y_{n+1}\right]}{4} \quad \text{para } i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ \displaystyle 2\cdot\alpha\cdot\sum_{j=1}^{n+1}A_{n+1,j}\cdot y_j+y_{n+1}=1\end{cases} \quad (5)$$

No problema transiente, tem-se:

$$\boldsymbol{R}_i = \frac{dy_i}{dt} - \sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{C}_{i,j} \cdot y_i + \hat{f}\left[u_i, y_i\right] \text{ para } i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n+1 \tag{6}$$

Em que: $\boldsymbol{C}_{i,j} = u_i \cdot \boldsymbol{B}_{i,j} + \frac{s+1}{2} \cdot \boldsymbol{A}_{i,j}$.

Resultando no sistema de equações algébrico-diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} - v_i \cdot \dfrac{dy_{n+1}}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \left[\boldsymbol{C}_{i,j} - v_i \cdot \boldsymbol{C}_{n+1,j}\right] \cdot y_j - \left\langle \hat{f}\left[u_i, y_i\right] - v_i \cdot \hat{f}\left[u_{n+1}, y_{n+1}\right] \right\rangle \\ \text{para } i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \\ \qquad 2 \cdot \alpha \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \boldsymbol{A}_{n+1,j} \cdot y_j + y_{n+1} = y_b\left(t\right) \end{cases} \tag{7}$$

Esse sistema está sujeito às condições iniciais: $y_i\left(0\right) = y_{inic}\left(\sqrt{u_i}\right)$ para $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$.

<u>Exercício de Treinamento</u>: resolva numericamente o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{x^s} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left[x^s \cdot \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right] - f\left[x, y(x,t), \theta(x,t)\right] \\ \\ \dfrac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{x^s} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left[x^s \cdot \dfrac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right] + \beta \cdot f\left[x, y(x,t), \theta(x,t)\right] \end{cases} \quad (1)$$

no domínio : $0 \le x < 1$ e $t > 0$.

Sujeita às condições:

$$\text{Condições de contorno: } \begin{cases} \text{CC1: } \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left.\dfrac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 & \text{(2-a)} \\ \text{CC2:} \alpha \cdot \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} + \left. y(x,t)\right|_{x=1} = y_b(t) \qquad \text{para } t>0 & \text{(2-b)} \\ \lambda \cdot \left.\dfrac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} + \left.\theta(x,t)\right|_{x=1} = \theta_b(t) & \end{cases}$$

$$\text{Condição Inicial: } \left. y(x,t)\right|_{t=0} = y_{inic}(x) \text{ e } \left.\theta(x,t)\right|_{t=0} = \theta_{inic}(x) \text{ para } 0 \le x < 1 \quad \text{(2-c)}$$

Considerando os valores dos parâmetros α e λ como nulos e valores positivos quaisquer, considere também:

$f\left[x, y(x,t), \theta(x,t)\right] = Da \cdot \left[y(x,t)\right]^m \cdot \exp\left[\gamma \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\theta(x,t)}\right)\right]$,escolhendo os valores de *Da* >0, γ>0 e *m*≥0. Considere, por simplicidade, y_{inic} =0, θ_{inic}=θ_b=1 e $y_b(t)$=1 (simulação do *start-up*).

Compare seus resultados aplicando o método dos momentos e o de Galerkin e adotando valores crescentes de *n*.

Avalie em sua resposta a variação com o tempo do valor médio de *y*(*x*,*t*) e deθ (*x*,*t*):

$$\bar{y}(t) = (s+1) \cdot \int_{x=0}^{x=1} x^s \cdot y(x,t) \cdot dx = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot y(u,t) \cdot du$$

$$\bar{\theta}(t) = (s+1) \cdot \int_{x=0}^{x=1} x^s \cdot \theta(x,t) \cdot dx = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot \theta(u,t) \cdot du$$

Além disso, calcule o *fator de efetividade:*

$$\eta(t) = (s+1) \cdot \int_{x=0}^{x=1} x^s \cdot \left[y(x,t)\right]^m \cdot \exp\left[\gamma \cdot \left(1 - \frac{1}{\theta(x,t)}\right)\right] \cdot dx \text{ ou, na forma:}$$

$$\eta(t) = \frac{(s+1)}{2} \cdot \int_{u=0}^{u=1} u^{\frac{s-1}{2}} \cdot \left[y(u,t)\right]^m \cdot \exp\left[\gamma \cdot \left(1 - \frac{1}{\theta(u,t)}\right)\right] \cdot du$$

Utilize em todas as situações como critério de desempenho do método a evolução temporal dos valores médios dos resíduos ao quadrado.