Receita de Um Novo Método de Aproximação Polinomial Global Aplicado a Problemas Unidirecionais sem Simetria

Estrutura Geral do Problema:

$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[y(x,t)-\lambda\cdot\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]-F\left[t,x,y(x,t)\right]=0$ no domínio : 0 < *x* < 1 e *t*>0.

Sujeita às condições de contorno:

CC1: $\left[y(x,t)-\lambda\cdot\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0}=p(t)$ e CC2: $\lambda\cdot\left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]_{x=1}=0$

E à condição inicial: $y(x,t)\big|_{t=0}=y_{inicial}(x)$.

Adotando-se $u(x,t)=y(x,t)-\lambda\cdot\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$, resulta:

$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-F\left[t,x,y(x,t)\right]=0$ no domínio : 0 < *x* < 1 e *t*>0.

Sujeita às condições de contorno:

CC1: $\left[u(x,t)\right]_{x=0}=p(t)$ e CC2: $\left[u(x,t)\right]_{x=1}=\left[y(x,t)\right]_{x=1}$

e às condições iniciais: $y(x,t)\big|_{t=0}=y_{inicial}(x)$

e $u(x,t)\big|_{t=0}=u_{inicial}(x)=y_{inicial}(x)-\lambda\cdot\frac{dy_{inicial}(x)}{dx}$.

Propondo-se a aproximação polinomial de grau *n*+1 em *x* para $u(x,t)$:

$$u(x,t)\cong u^{(n+1)}(x,t)=\sum_{j=0}^{n+1}\ell_j(x)\cdot u_j(t)\ \text{com}\ u_0(t)=p(t)$$

Os *n*+2 pontos de interpolação empregados na aproximação polinomial acima são:

$x_0=0,\ x_{n+1}=1$ e $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$ são as *n* raízes do polinômio de Jacobi com $\alpha=\beta=1$ (que são os pontos internos da quadratura de Lobatto).

Substituindo $u^{(n+1)}(x,t)$ em $u(x,t)=y(x,t)-\lambda\cdot\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$, obtém-se:

$y^{(n+1)}(z,t)=a(t)\cdot \mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda}}+\sum_{j=0}^{n+1} l_j(z)\cdot v_j(t)$, em que os valores de $v_j(t)$ são calculados através da resolução do sistema algébrico linear:

$v_i(t)-\lambda\cdot\sum_{k=0}^{n+1} A_{i,k}\cdot v_k(t)=u_i(t)$ para $i = 0, 1, \cdots, n+1$. Além disso, para que:

$\left[u^{(n+1)}(x,t)\right]_{x=1}=\left[y^{(n+1)}(x,t)\right]_{x=1}\Rightarrow u_{n+1}(t)=v_{n+1}(t)$, obtém-se:

$a(t)=\left[u_{n+1}(t)-v_{n+1}(t)\right]\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}}$, resultando na aproximação:

$$y^{(n+1)}(z,t)=\left[u_{n+1}(t)-v_{n+1}(t)\right]\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(1-z)}{\lambda}}+\sum_{j=0}^{n+1} l_j(z)\cdot v_j(t).$$

O resíduo em cada um dos pontos de interpolação é dado por:

$\Re^{(n+1)}(x_j,t)=\dfrac{dy_j(t)}{dt}+\left(\sum_{i=0}^{n+1} A_{j,i}\cdot u_i(t)\right)-F\left[t,x_j,y_j(t)\right]$, em que:

$y_j(t)=\left[u_{n+1}(t)-v_{n+1}(t)\right]\cdot \mathrm{e}^{-Pe\cdot(1-z_j)}+v_j(t)$.

Aplicando o método dos momentos: $\bar{\Re}_k^{(n+1)}(t)=\int_0^1 x^k\cdot\Re^{(n+1)}(x,t)\cdot dx=0$ que são computados por quadratura de Lobatto, resultando nas equações:

$\dfrac{d\Upsilon_k(t)}{dt}=\sum_{j=0}^{n+1}\omega_j\cdot x_j^k\cdot\left[F\left[t,x_j,y_j(t)\right]-\sum_{i=0}^{n+1} A_{j,i}\cdot u_i(t)\right]$ para $k = 0, 1, \ldots, n$

A essas equações diferenciais ordinárias associam-se as equações algébricas:

$$\begin{cases} v_i(t)-\sum_{k=0}^{n+1}\dfrac{A_{i,k}}{Pe}\cdot v_k(t)=u_i(t) \text{ para } i = 0, 1, \cdots, n+1 \text{ com } u_0(t)=p(t) \\ \left[u_{n+1}(t)-v_{n+1}(t)\right]\cdot I_k+\sum_{j=0}^{n+1}\omega_j\cdot x_j^k\cdot v_j(t)=\Upsilon_k(t) \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$$

Em que $x_0=0$, $x_{n+1}=1$ e $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$ são as n raízes do polinômio de Jacobi com $\alpha=\beta=1$, ω_j para $j = 0, 1, \cdots, n+1$ os pesos da quadratura de Lobatto e:

$I_k=\int_0^1 x^k\cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{1-x}{\lambda}\right)}\cdot dx\Rightarrow I_0=\lambda\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\lambda}\right)}\right)$ e $I_k=\lambda\cdot(1-k\cdot I_{k-1})$ para $k = 1, \ldots, n$.

Um método quase equivalente seria obtido anulando os resíduos nas n+1 raízes do polinômio de Legendre de grau n+1, dando origem a:

$$\frac{d\Upsilon_k(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{n+1} l_j(\xi_{k+1}) \cdot \left(F\left[t, x_j, y_j(t)\right] - \sum_{i=0}^{n+1} A_{j,i} \cdot u_i(t) \right) \text{ para } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

A essas equações diferenciais ordinárias associam-se as equações algébricas:

$$\begin{cases} v_i(t) - \displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} \frac{A_{i,j}}{Pe} \cdot v_j(t) = u_i(t) \text{ para } i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n+1 \text{ com } u_0(t) = p(t) \\ \left[u_{n+1}(t) - v_{n+1}(t)\right] \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{1-\xi_{k+1}}{\lambda}\right)} + \displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} l_j(\xi_{k+1}) \cdot v_j(t) = \Upsilon_k(t) \text{ para } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \end{cases}$$

Em que $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n+1} < 1$ são as n+1 raízes do polinômio de Legendre de grau n+1.