COLOCAÇÃO ORTOGONAL CONVENCIONAL NO DOMÍNIO DISCRETO

Exemplo Motivador:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \alpha \cdot x_{i-1}(t) + y_{i+1}(t) - \left[\alpha \cdot x_i(t) + y_i(t)\right] \quad \text{para } i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$$

Sendo: $y_i(t) = y_{eq}\left[x_i(t)\right]$ para $i = 1, 2, \cdots, N$; $x_0(t) = x_{feed}(t)$ e $y_{N+1}(t) = y_{feed}(t)$.

Utilizando a aproximação polinomial de grau n+1 das composições em relação à variável reescalada: $s_i = \dfrac{i-1}{N}$. Considerando também os pontos internos de interpolação: $0 \le s^{(1)} < s^{(2)} < \cdots s^{(n)} < 1$ e utilizando os pontos extremos do intervalo, isto é: $s^{(0)} = -\dfrac{1}{N}$ e $s^{(n+1)} = \dfrac{N+1}{N} = 1 + \dfrac{1}{N}$, tem-se:

$$x(s,t) \cong x^{(n+1)}(s,t) = \sum_{j=0}^{n+1} l_j(s) \cdot x^{(n+1)}\left(s^{(j)}, t\right).$$

Considerando, para simplificar a notação: $x^{(n+1)}\left(s^{(j)}, t\right) = x_j(t)$, tem-se:

$$x(s,t) \cong x^{(n+1)}(s,t) = \sum_{j=0}^{n+1} l_j(s) \cdot x_j(t)$$

A cada uma dessas variáveis, $x_i(t)$ para i=0, 1, 2, $\cdots$, n, $n+1$, associa-se um resíduo:

$$\Re^{(n+1)}\left(s^{(i)}, t\right) = \frac{dx_i(t)}{dt} - \alpha \cdot x^{(n+1)}\left(s^{(i)} - 1, t\right) - y_{eq}\left[x^{(n+1)}\left(s^{(i)} + 1, t\right)\right] + \left[\alpha \cdot x_i(t) + y_{eq}\left[x_i(t)\right]\right]$$

Calculando-se $x^{(n+1)}\left(s^{(i)} - 1, t\right)$ e $y_{eq}\left[x^{(n+1)}\left(s^{(i)} + 1, t\right)\right]$, através de:

$$x^{(n+1)}\left(s^{(i)} - 1, t\right) = \sum_{j=0}^{n+1} l_j\left(s^{(i)} - 1\right) \cdot x_j(t) = \sum_{j=0}^{n+1} A_{i,j}^{(-)} \cdot x_j(t)$$

e

$$\Re^{(n+1)}\left(s^{(i)}, t\right) = \frac{dx_i(t)}{dt} - \alpha \cdot x^{(n+1)}\left(s^{(i)} - 1, t\right) - y_{eq}\left[x^{(n+1)}\left(s^{(i)} + 1, t\right)\right] + \left[\alpha \cdot x_i(t) + y_{eq}\left[x_i(t)\right]\right]$$

$$y_{eq}\left[x^{(n+1)}\left(s^{(i)} + 1, t\right)\right] = \sum_{j=0}^{n+1} l_j\left(s^{(i)} + 1\right) \cdot y_j(t) = \sum_{j=0}^{n+1} A_{i,j}^{(+)} \cdot y_j(t)$$

Sendo: $y_j = y_{eq}\left[x_j(t)\right]$.

Desse modo:

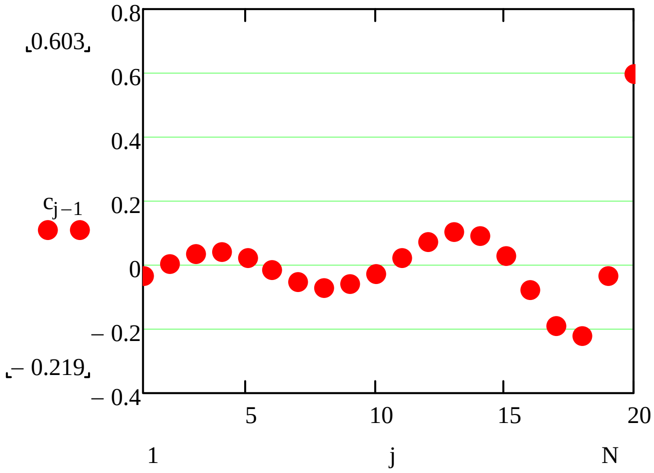
$$\Re^{(n+1)}\left(s^{(i)}, t\right) = \frac{dx_i(t)}{dt} - \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n+1} A_{i,j}^{(-)} \cdot x_j(t) - \sum_{j=0}^{n+1} A_{i,j}^{(+)} \cdot y_j(t) + \left[\alpha \cdot x_i(t) + y_i(t)\right]$$

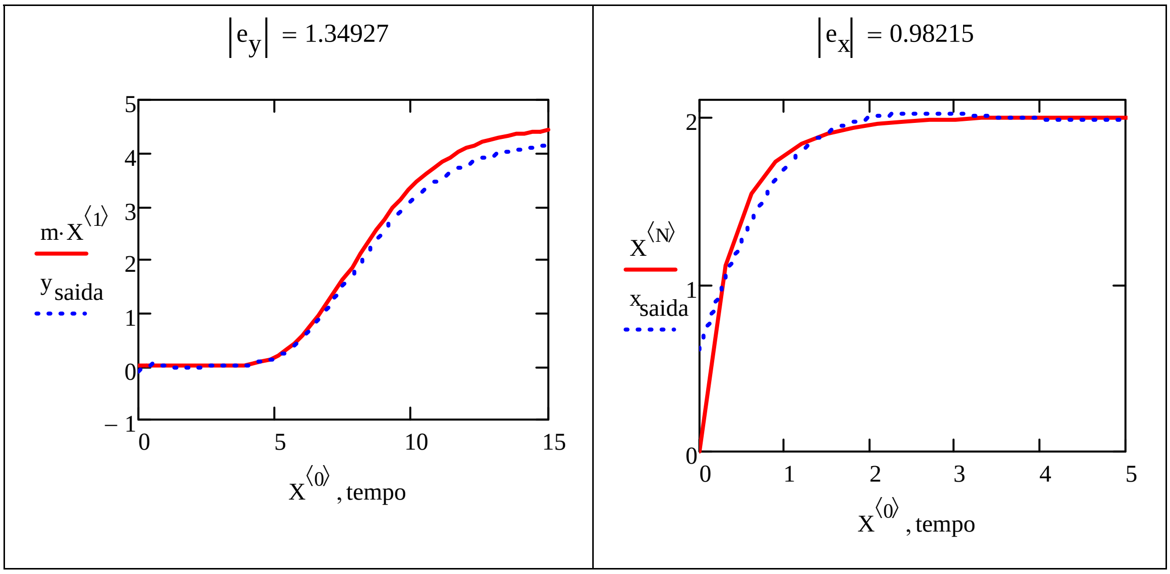
Para calcular os valores de $x_j(t)$ para *j* = 1, 2,..., *n* anulam-se os *n* resíduos nos pontos internos, resultando em:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n+1} A_{i,j}^{(-)} \cdot x_j(t) - \sum_{j=0}^{n+1} A_{i,j}^{(+)} \cdot y_j(t) - \left[\alpha \cdot x_i(t) + y_i(t)\right] \text{ para } i = 1, \cdots, n.$$

Apresentaremos os resultados do modelo completo e do modelo reduzido para o caso linear, isto é: $y_i(t) = m \cdot x_i(t)$. Com *N*= 20; *n* =5; parâmetros: α= ¾ ; *m* =3; $x_{feed}(t) = 0$ e $y_{feed}(t) = 6$ e considerando todos os valores das composições nos pratos internos como nulas .

O perfil interpolado inicial é mostrado abaixo:

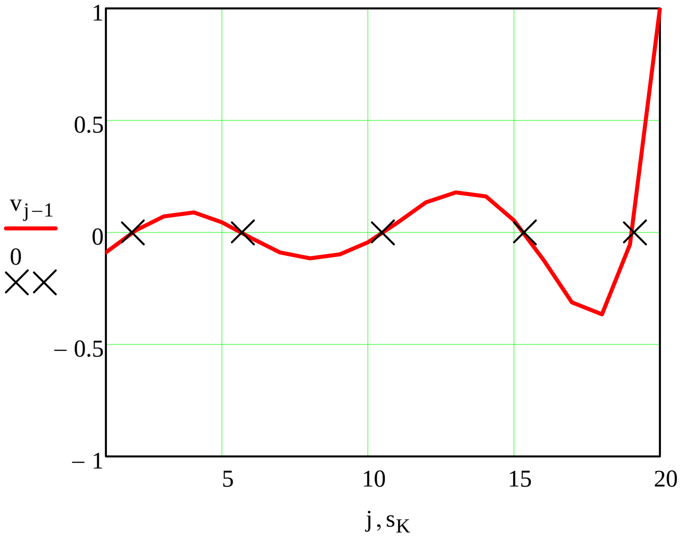




(Curva contínua vermelha: modelo completo; curva pontilhada azul: modelo reduzido)

Resultados bastante satisfatórios!

A variação dos resíduos dos balanços pode ser visualizada a seguir:

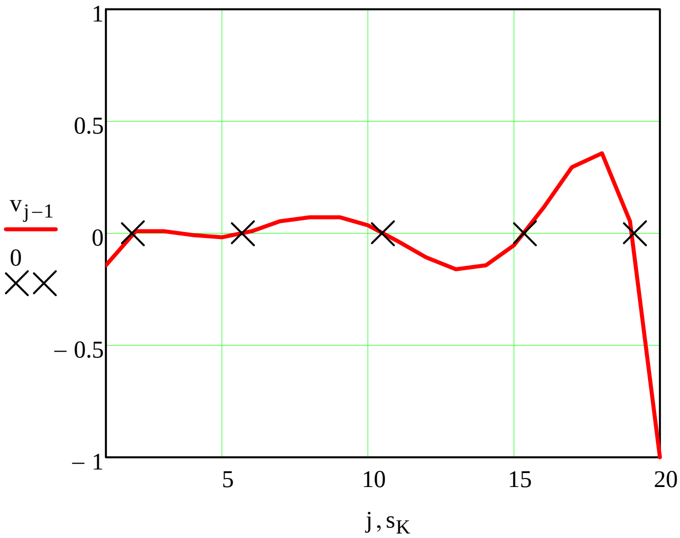


$tempo_k = 2.4$

$v_{max} = 0.15804$

$v_{min} = -0.05767$

$norma = 0.15804$



$tempo_k = 4.5$

$v_{max} = 0.02368$

$v_{min} = -0.06674$

$norma = 0.06674$

Na figura indicam-se os pontos internos da quadratura. O eixo vertical é o perfil do resíduo nos tempo indicados dividido pelo maior valor em módulo dos resíduos.