

CONTROLE PREDITIVO MULTIVARIÁVEL
AUTOR: JOSÉ MANUEL GONZALEZ TUBIO PEREZ

1.	OBJETIVO	4
2.	INTRODUÇÃO.....	4
2.1.	COMPARAÇÃO ABORDAGEM CLÁSSICA.....	7
2.2.	CONTROLADORES PREDITIVOS MULTIVARIÁVEIS	7
2.2.2.	ALGORITMO DE UM MPC	8
2.2.3.	EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE UM MPC EM UM PROBLEMA SERVO MONOVIÁVEL	8
2.2.4.	DEFINIÇÕES DE UM MPC	9
2.3.	MODELOS DE PROCESSO.....	9
2.4.	OBTENÇÃO DE UM MODELO NA FORMA INCREMENTAL A PARTIR DE UM MODELO POSICIONAL	12
2.5.	PREDIÇÃO DA VARIÁVEL DE CONTROLE PELO MPC A PARTIR DE UM MODELO FIR – CASO SISO	13
2.5.1.	SIMBOLOGIA.....	13
2.5.2.	EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO PARA UM HORIZONTE DE CONTROLE UNITÁRIO	14
2.5.3.	EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO PARA UM HORIZONTE DE CONTROLE IGUAL A DOIS ..	15
2.5.4.	EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO PARA UM HORIZONTE DE CONTROLE IGUAL A M	16
3.	DYNAMIC MATRIX CONTROL (DMC)	18
3.1.	DYNAMIC MATRIX CONTROL (DMC) – CASO SISO	18
3.1.1.	CORREÇÃO DA PREDIÇÃO COM OS DADOS DA PLANTA.....	19
3.1.2.	PREDIÇÃO DO DMC – CASO SISO.....	20
3.1.3.	FUNÇÃO OBJETIVO DO DMC SISO	24
3.1.4.	FUNÇÃO OBJETIVO MODIFICADA DO DMC SISO.....	25
3.2.	DYNAMIC MATRIX CONTROL (DMC) – CASO MIMO.....	26
3.2.1.	CORREÇÃO DA PREDIÇÃO COM OS DADOS DA PLANTA.....	28
3.2.2.	PREDIÇÃO DO DMC – CASO MIMO	29
3.2.3.	FUNÇÃO OBJETIVO DO DMC MIMO.....	32
3.2.4.	FUNÇÃO OBJETIVO MODIFICADA DO DMC MIMO	33
3.3.	QUADRATIC DYNAMIC MATRIX CONTROL (QDMC)	34
3.3.1.	SOLVER DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA	35
3.4.	PREDIÇÃO DO DMC POR MATRIZ DE DESLOCAMENTO – HORIZONTE DE CONTROLE $M=1$	39
3.5.	PREDIÇÃO DO DMC POR MATRIZ DE DESLOCAMENTO – HORIZONTE DE CONTROLE M GENÉRICO.....	43
3.6.	DMC COM O USO DE MATRIZ AUXILIAR θ	47
3.6.1.	FUNÇÃO OBJETIVO DO DMC COM O USO DA MATRIZ AUXILIAR θ	48
3.7.	LDMC – LINEAR DYNAMIC MATRIX CONTROL.....	49
3.8.	MPC EM MALHA FECHADA.....	53
4.	CONTROLADOR MPC EM DUAS CAMADAS.....	57
4.1.	FUNÇÃO OBJETIVO QP DE UM MPC QUE OPERA EM DUAS CAMADAS	61
4.2.	CONTROLE DAS SAÍDAS POR FAIXA.....	61
4.3.	FUNÇÃO OBJETIVO ECONÔMICA COMO SAÍDA CONTROLADA	64
5.	MPC COM AÇÕES DE CONTROLE NÃO IGUALMENTE ESPAÇADAS	66

5.1. EQUAÇÃO DE PREDIÇÃO DA SAÍDA PARA ENTRADAS NÃO IGUALMENTE ESPAÇADAS.....	66
6. SISTEMAS INTEGRADORES.....	68
6.1. MÉTODO DE EXTRAPOLAÇÃO DE SAÍDA DO MODELO	68
6.2. ANÁLISE DA INSTABILIDADE PROVOCADA COM O USO DA NOVA MATRIZ M	70
6.3. REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADO E MODELO DE REALINHAMENTO	73
6.4. ENFOQUE DO SICON PARA SISTEMAS INTEGRADORES	76
7. MODELO DE REALINHAMENTO EM UM SISTEMA COM DINÂMICA GERAL E ORDEM GENÉRICA N_A E N_B	80
7.1. CASO GERAL DA ESTRATÉGIA DE REALINHAMENTO	81
7.2. MPC POSICIONAL E MPC INCREMENTAL	82
7.3. MODELO DE VARIÁVEIS DE ESTADO NA FORMA INCREMENTAL.....	83
8. MELHORIAS NOS ALGORITMOS DE CONTROLE PREDITIVO	85
8.1. CONTROLADORES NOMINALMENTE ESTÁVEIS	85
8.2. ESTABILIDADE VIA FUNÇÃO DE LYAPUNOV	86
8.3. MPC DE HORIZONTE INFINITO (IHMPC) [7]	86
8.4. LIMITAÇÕES DO MPC DE HORIZONTE INFINITO (IHMPC)	90
8.5. MPC DE HORIZONTE INFINITO (IHMPC) COM MODELO INCREMENTAL	90
8.6. FUNÇÃO OBJETIVO DO MPC DE HORIZONTE INFINITO (IHMPC) COM MODELO INCREMENTAL	94
9. MPC EM VARIÁVEIS DE ESTADO NA FORMA OPOM [8]	96
9.1. OPOM PARA O SISTEMA SISO.....	96
9.2. OPOM PARA O SISTEMA MIMO	99
9.3. IHMPC COM OPOM.....	104
9.4. IHMPC ESTENDIDO	109

1. OBJETIVO

O presente trabalho tem como objetivo fazer uma revisão na teoria de controladores preditivos, abrangendo os controladores baseados na resposta FIR e resposta ao degrau, controladores com modelos de espaço de estado, controladores com horizonte de predição infinito e controladores com estado baseado nas leituras da planta.

2. INTRODUÇÃO

O Controle Preditivo Multivariável (MPC) tem sido bastante aplicado na indústria. A Figura 2.1 mostra o desenvolvimento desta aplicação em diversos segmentos. Os ganhos obtidos com esta aplicação podem ser observados qualitativamente na Figura 2.2, em termos de variabilidade das variáveis controladas e, conseqüentemente, maior aproximação do ponto operacional com relação às restrições. A Figura 2.3 mostra um exemplo de interação entre o controle preditivo e o controle regulatório.

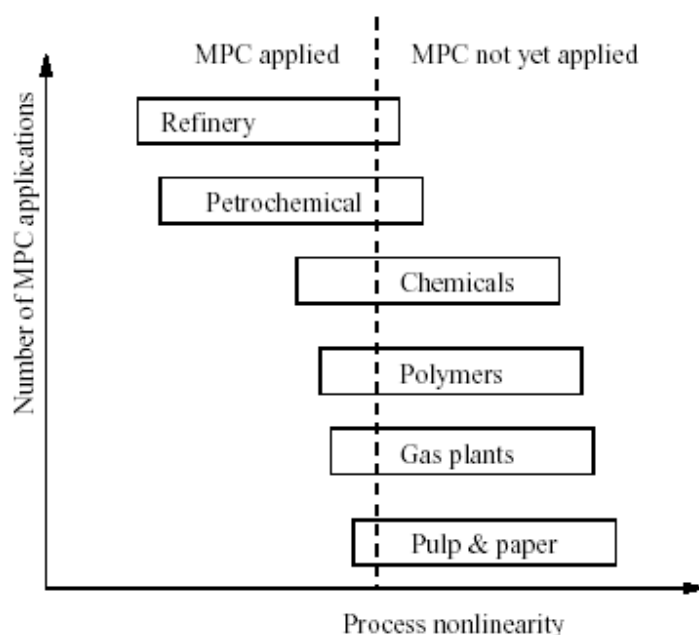


Figura 2.1 – Aplicação do Controlador Preditivo Multivariável na Indústria [1]

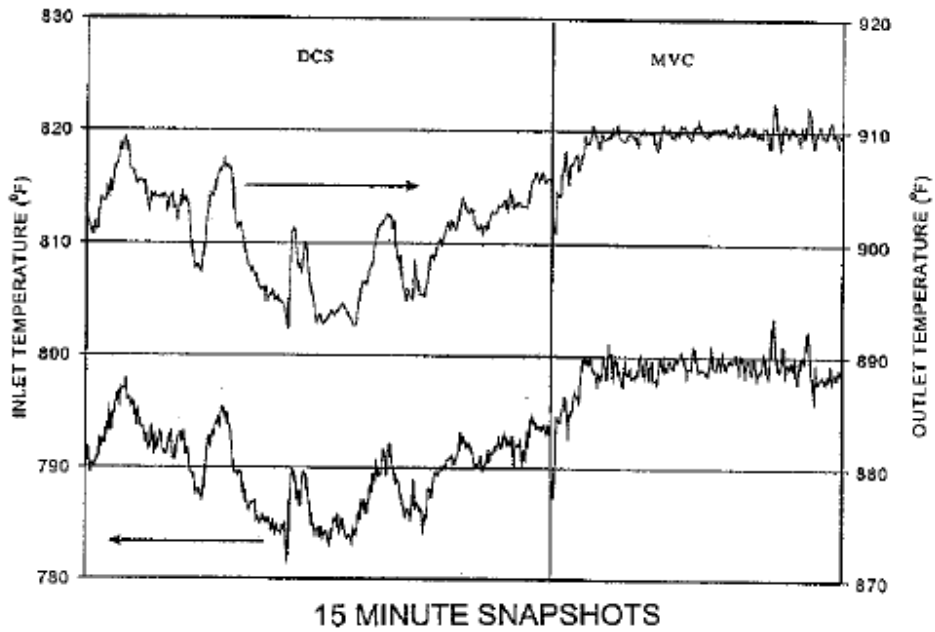


Figura 2.2 – Melhoria obtida com implantação do MPC [4]

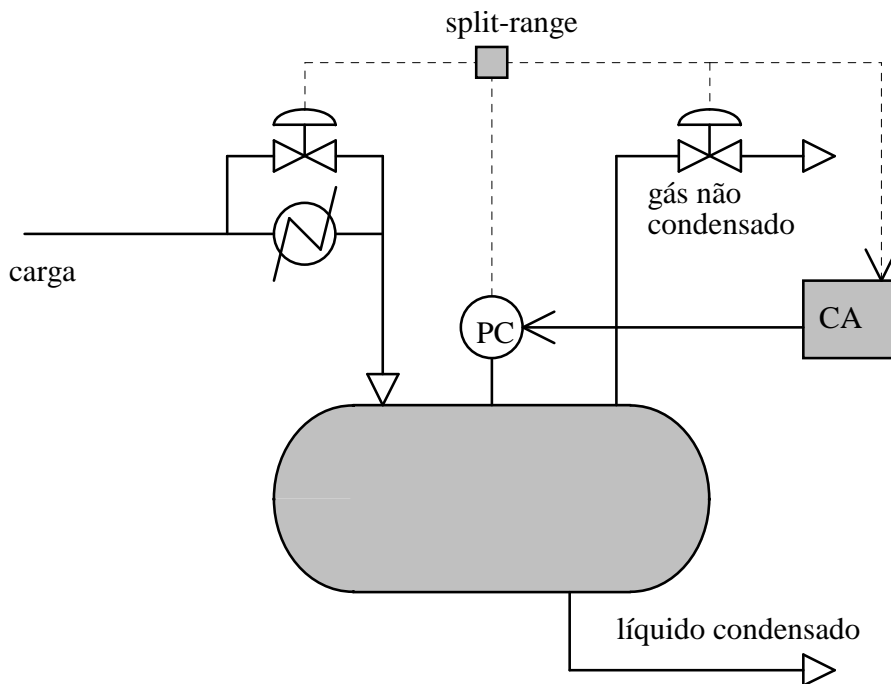


Figura 2.3 – Exemplo de atuação do MPC [2]

A maior aplicação do MPC tem sido em controles de processos com alguma não linearidade ou com um grande acoplamento entre as malhas de controle. Outra aplicação poderia ser também em processos com tempo morto significativo, quando comparado com a constante de tempo. A Petrobras tem diversas aplicações onde uma coluna de separação com uma forte interação entre a variável de temperatura de fundo e de topo, tal como a desbutanizadora, teve esse problema resolvido com o uso do MPC. Esta vantagem do MPC sobre o controle regulatório se deve ao fato de primeiro realizar uma predição, dentro de um intervalo de tempo, definido como horizonte de predição, das ações das manipuladas sobre a planta e conhecer, através de modelos, como se procede esta interação, ou seja, quanto uma alteração de determinada variável manipulada afeta as variáveis controladas em questão. A outra vantagem do MPC nesta questão, obviamente, é que o mesmo trata o processo como multivariável, ao invés de entrada e saída simples, como faz o controle regulatório.

Outra grande vantagem do MPC sobre o controle regulatório clássico é a possibilidade da inclusão de restrições nas variáveis manipuladas (abertura de válvula, limitação de velocidade, etc.) e de poder controlar em faixas as variáveis controladas que não precisam de um valor definido de controle. Nesse tipo de controle em faixa, o operador define um intervalo admissível para cada variável controlada.

A essência do MPC é determinar um conjunto de ações (variáveis manipuladas) dentro de um horizonte de controle, definido como m , para otimizar o somatório de erros quadráticos das variáveis de controle, dentro de um horizonte de predição. A leitura da planta é utilizada para ajustar a predição com os valores reais obtidos. A Figura 2.4 exemplifica esta atuação do MPC.

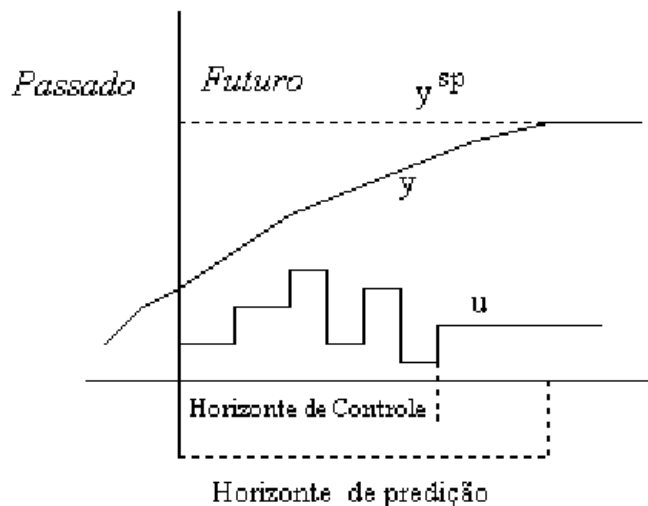


Figura 2.4 – Exemplo de atuação do MPC

2.1. COMPARAÇÃO ABORDAGEM CLÁSSICA

O controle clássico pode ser abordado na forma de tempo contínuo ou discreto. Em ambas as abordagens têm como características um sistema “*single input single output (SISO)*”, um modelo de tempo contínuo ou discreto e o algoritmo clássico PID – Proporcional, Integral e Derivativo – como base.

Nestas duas abordagens, alguns problemas não foram resolvidos, tais como o sistema “*multiple input multiple output (MIMO)*”, a possibilidade da existência de restrições nas entradas do processo e objetivos econômicos.

Um processo está sujeito a restrições em suas entradas devido a limitações de abertura de válvulas, carga térmicas de equipamentos, máxima temperatura admissível, etc. A Figura 2.5 mostra uma região viável de um controlador com duas variáveis manipuladas, u_1 e u_2 , com restrições nos valores destas variáveis.

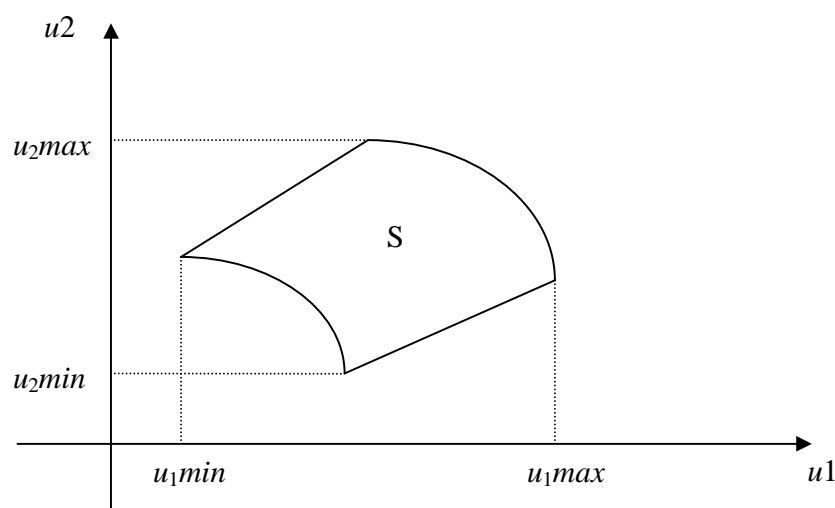


Figura 2.5 – Janela Operacional de duas variáveis manipuladas

Considerando um problema de otimização linear (LP), o ótimo deste problema encontra-se nas extremidades da região viável S. Um controlador PID convencional, que manipula apenas uma variável, não poderia trabalhar nesse ponto, pois perderia a sua única variável de manipulação.

2.2. CONTROLADORES PREDITIVOS MULTIVARIÁVEIS

Os controladores preditivos multivariáveis visam à solução destes problemas não resolvidos pelo controle clássico, também chamado de controle regulatório. São conhecidos como MPC – *Model Predictor Control*.

2.2.1. HISTÓRICO

A seguinte evolução pode ser descrita para o controlador preditivo multivariável.

- 2.2.1.1. MAC – Model Algorithmic Control (Richalet, Azerba – Gertriot, Franca – 1976). Aperfeiçoado pela *Setpoint* em 1986.
- 2.2.1.2. DMC – Dynamics Matrix Control (Cutler [3], 1979)
- 2.2.1.3. LDMC– Linear Dynamics Matrix Control (Cutler [4], 1983)
- 2.2.1.4. QDMC– Quadratic Dynamics Matrix Control (Morshedt, 1985)

2.2.2. ALGORITMO DE UM MPC

As seguintes etapas podem ser observadas no algoritmo de um MPC:

- 2.2.2.1. Através de um modelo implementado no controlador, o MPC é capaz de realizar a predição do comportamento da saída do processo, levando em consideração as entradas de controle atuais e futuras.
- 2.2.2.2. Esta predição deve ser corrigida, a cada intervalo de instante, por uma leitura da planta. Um MPC opera, tipicamente, com intervalos de tempo na faixa de um minuto.
- 2.2.2.3. Em cada iteração, o controlador calcula uma sequência de ações de controle. O tamanho desta sequência é definido como horizonte de controle. Esta sequência calculada minimiza a função do erro das saídas previstas até um horizonte definido como horizonte de predição.
- 2.2.2.4. Após resolver o problema de otimização descrito no item 2.2.2.3, o controlador implementa na planta apenas a primeira ação de controle dentre a sequência de ações calculadas que vão do intervalo de instante atual até o intervalo correspondente ao horizonte de controle m ajustado no controlador.
- 2.2.2.5. O controlador aguarda o próximo intervalo de tempo para retornar ao item 2.2.2.1.

2.2.3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE UM MPC EM UM PROBLEMA SERVO MONOVARIÁVEL

Na abordagem do MPC, o tempo é discretizado. No instante k , aplicamos, por exemplo, um degrau no *setpoint* da variável controlada y . Em função do erro existente, o MPC calcula as m ações de controle que minimizam o somatório quadrático dos erros preditos até o horizonte de predição np da variável controlada. Após calcular esta sequência de ações sobre a planta, apenas a ação $u(k)$ é aplicada ao processo. Até o instante $k+1$ seguinte, o controlador MPC comporta-se como um controlador em malha aberta, mantendo o último valor de saída calculado durante este intervalo.

No intervalo $k+1$, atualizamos a variável de predição com o valor obtido do campo. A diferença existente entre o valor da predição e o obtido da planta se deve pela diferença existente entre o modelo real da planta e o modelo existente no controlador. Também pode ser justificado pela existência de perturbações sobre a variável controlada. Após a correção da predição, novas m ações de controle são calculadas visando, como índice, o mínimo da soma dos erros ao quadrado.

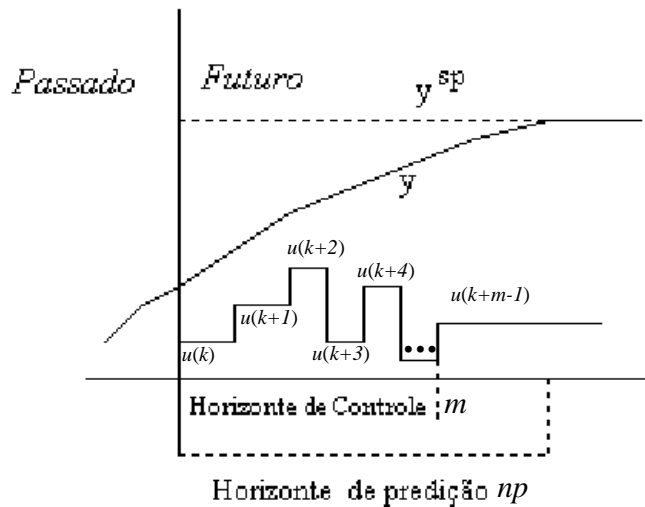


Figura 2.6 – Atuação de um MPC com horizonte de controle m e horizonte de predição np

2.2.4. DEFINIÇÕES DE UM MPC

- 2.2.4.1. Tempo de estabilização da planta (N): É o tempo que a planta estabiliza para uma perturbação em degrau aplicada à entrada.
- 2.2.4.2. Horizonte de Predição (np): É o intervalo de tempo em que as variáveis de saída são preditas pelo controlador. Deve ser menor ou igual ao tempo de estabilização. Os controladores mais modernos trabalham com um horizonte de predição infinito.
- 2.2.4.3. Horizonte de Controle (m): É o horizonte de cálculo das variáveis de entrada do processo. Normalmente o horizonte de controle é menor que o horizonte de predição.

Estes parâmetros são sintonizáveis. Quanto maior o horizonte de predição, maior suavidade no controle. Quanto maior o horizonte de controle, mais “overshoot” percebe-se nas variáveis controladas e ações de menores amplitudes são calculadas pelo algoritmo. No entanto, maior esforço computacional é requerido.

2.3. MODELOS DE PROCESSO

Um processo pode ser representado através dos seguintes modelos:

- 2.3.1. Função de transferência contínua:

Modelo representado através da variável complexa s , da transformada de Laplace.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G_p(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

2.3.2. Função de transferência discreta:

Modelo representado através da variável discreta z .

$$\frac{y(z)}{u(z)} = HG_p(z) = \frac{Q(z)}{D(z)}, \quad HG_p(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

OBS: Normalmente b_0 é nulo, pois, em um sistema causal, uma entrada não tem uma ação imediata sobre a saída.

2.3.3. Modelo em espaço de estados:

Modelo que utiliza o conceito de variáveis de estado.

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

onde:

x : vetor de estados; A : matriz de estados; B : matriz de entradas; C : matriz de saídas;
 y : vetor saída da planta; u : vetor entrada da planta; D : normalmente nulo, pois um sistema não responde imediatamente a uma variação na entrada.

O modelo em espaço de estado tem sido uma tendência mundial para a concepção de novos controladores preditivos. A razão para isso ficará melhor entendida mais a frente.

2.3.4. Modelo de resposta ao Impulso (Finite Impulse Response):

O modelo em FIR representa a resposta do processo ao pulso unitário. A sua representação é dada como os coeficientes desta resposta, onde cada coeficiente representa o valor da variável de saída da planta em um instante k -ésimo qualquer. Por ser este modelo empregado, atualmente, nos controladores da Petrobras, será feito um estudo mais aprofundado desta forma de representação da planta.

No domínio discreto, onde os controles regulatórios são implementados, o impulso unitário se transforma em um pulso unitário de área unitária. A transformada Z aplicada ao pulso unitário será:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k} = u(0) + u(1)z^{-1} + \dots = u(0) = 1$$

Portanto, a resposta do processo ao pulso unitário será:

$$y(z) = HG_p(z)U(z) = HG_p(z)$$

onde $HG_p(z)$ é a função transferência do processo escrita no domínio discreto e considerando um retentor (*holder*) no sistema de aquisição de dados.

Definindo h_i como a resposta da planta ao pulso no tempo contínuo i , a Figura 2.7 mostra como os parâmetros h_i podem identificar uma planta de processo.

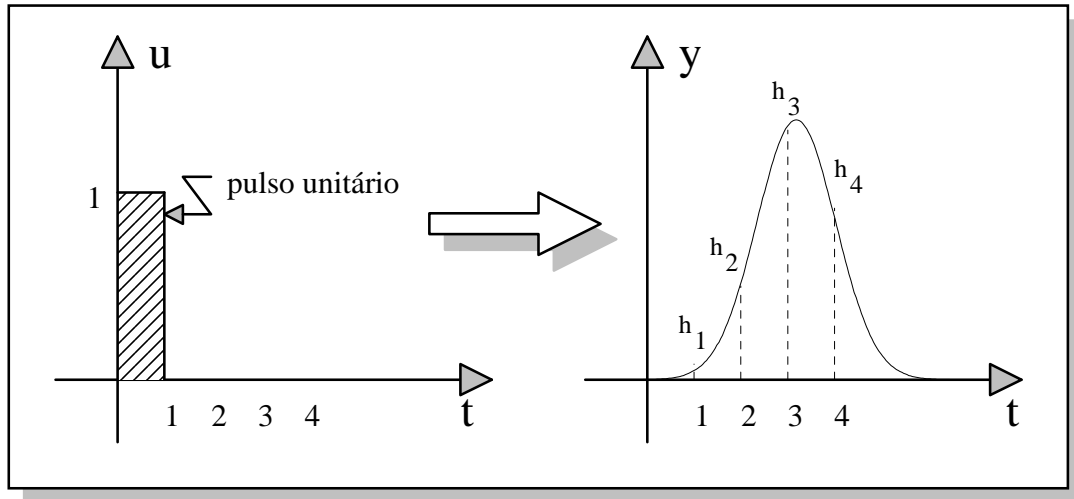


Figura 2.7 – Resposta de uma planta de processo ao pulso unitário [1]

A ação do controle preditivo sobre a planta pode ser visto como uma combinação de pulsos aplicados à entrada do processo.

No instante k um pulso de altura $u(k)$ é aplicado à planta. Este pulso dará como resposta uma curva similar à curva indicada na Figura 2.7. Esta resposta pode ser obtida durante a identificação da unidade.

No instante $k+1$ seguinte, o MPC aplicará um pulso de altura $u(k+1)$ à planta. O valor da variável de saída neste instante será o valor da resposta ao pulso que ocorreu no instante anterior k , cujo valor é h_1 .

$$y(k+1) = h_1 u(k)$$

No instante $k+2$ seguinte, o MPC aplicará um pulso de altura $u(k+2)$ à planta. Este pulso também gera uma resposta FIR. Considerando que o sistema seja linear, o valor da variável de saída neste instante será o valor da resposta ao pulso que ocorreu no instante k que terá o valor h_2 acrescido a resposta do pulso aplicado ao instante $k+1$ que terá o valor h_1 .

$$y(k+2) = h_1 u(k+1) + h_2 u(k)$$

Portanto, em um instante genérico $k+i$:

$$y(k+i) = h_1 u(k+i-1) + h_2 u(k+i-2) + h_3 u(k+i-3) + \dots + h_i u(k)$$

$$y(k+i) = \sum_{j=1}^i h_j u(k+i-j)$$

Se considerarmos um período de estabilização da planta igual a N , podemos escrever:

$$y(k+i) = \sum_{j=1}^N h_j u(k+i-j)$$

Esta equação mostra que se consideram apenas as ações passadas sobre o processo até o instante $i-N$. Os efeitos das ações que tenha ocorrido antes deste tempo já encontraram uma estabilização.

2.3.5. Modelo em resposta ao degrau

Quando o processo é estável, o modelo em resposta ao degrau se torna mais conveniente que a resposta ao pulso.

A Figura 2.8 mostra as respostas possíveis de um processo.

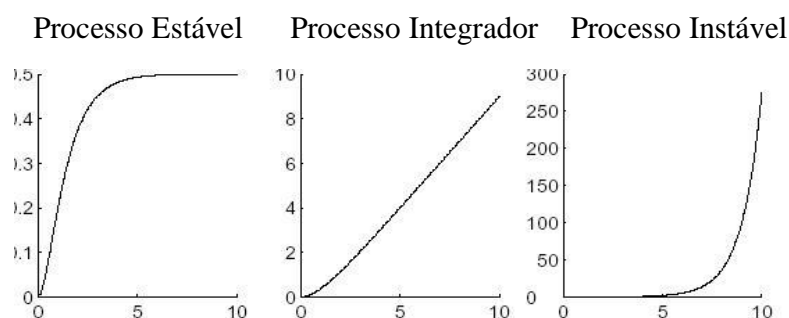


Figura 2.8 – Respostas do Processo ao degrau: estável, integradora e instável

Um degrau pode ser visto como vários pulsos de mesma amplitude, ocorridos nos instantes $k+1, k+2, k+3$, etc. (ver figura 2.9).

2.4. OBTENÇÃO DE UM MODELO NA FORMA INCREMENTAL A PARTIR DE UM MODELO POSICIONAL

Um modelo incremental pode ser obtido a partir de um modelo posicional a partir de uma simples subtração entre dois instantes seguintes.

$$y(k+1) = \sum_{j=1}^N h_j u(k+1-j) \quad y(k) = \sum_{j=1}^N h_j u(k-j) \quad \rightarrow \quad y(k+1) - y(k) = \sum_{j=1}^N h_j \Delta u(k+1-j)$$

onde $\Delta u(k+1-j) = u(k+1-j) - u(k-j)$

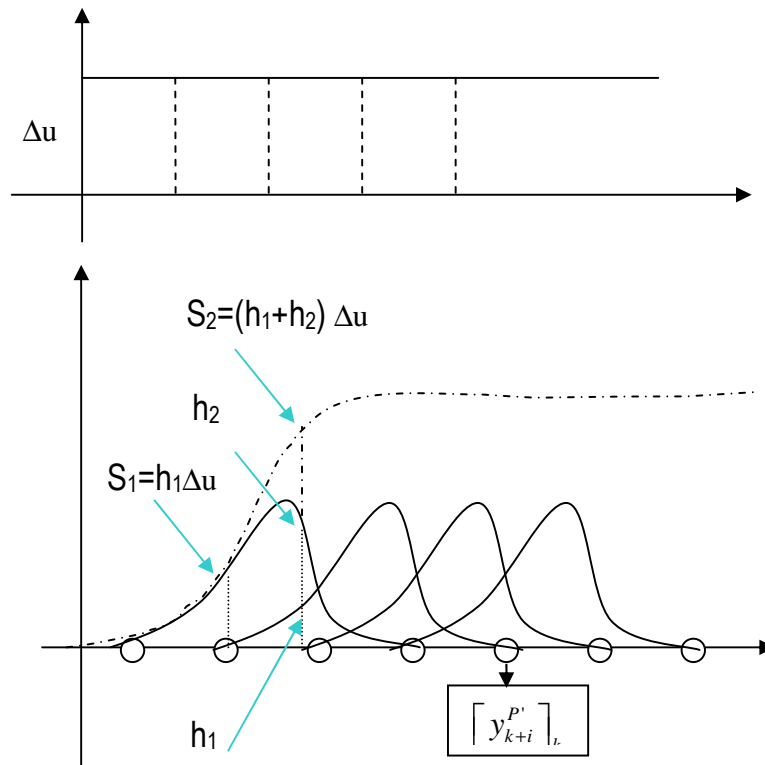


Figura 2.9 – Resposta ao degrau interpretada como somatório das respostas ao pulso

2.5. PREDIÇÃO DA VARIÁVEL DE CONTROLE PELO MPC A PARTIR DE UM MODELO FIR – CASO SIS0

2.5.1. SIMBOLOGIA

$[y_{k+i}^{P'}]_k$ - Predição da variável controlada y para o instante $k+i$ feita no instante k , sem considerar nenhuma ação de controle.

$[y_{k+i}^P]_k$ - Predição da variável controlada y para o instante $k+i$ feita no instante k , considerando as ações de controle.

$[y_{k+i}^C]_k$ - Predição da variável controlada y para o instante $k+i$ feita no instante k , considerando as ações de controle e corrigida com o erro atual no instante k .

$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+i}^P \end{bmatrix}_k$ - Variável de desvio da predição da variável y para o instante $k+i$ feita no instante k

$[A]$ - Dimensão da matriz A

2.5.2. EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO PARA UM HORIZONTE DE CONTROLE UNITÁRIO

Considerando a aplicação de um degrau sobre a planta de amplitude Δu no instante k , a predição para o instante seguinte $k+1$ será:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^P \end{bmatrix}_k = h_1 \Delta u(k) + \begin{bmatrix} y_{k+1}^{P'} \end{bmatrix}_k, \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^P \end{bmatrix}_k = S_1 \Delta u(k) + \begin{bmatrix} y_{k+1}^{P'} \end{bmatrix}_k, \text{ onde } S_1 = h_1$$

Para o instante $k+2$, a predição será:

$$\begin{bmatrix} y_{k+2}^P \end{bmatrix}_k = h_1 \Delta u(k+1) + h_2 \Delta u(k) + \begin{bmatrix} y_{k+2}^{P'} \end{bmatrix}_k$$

Mas, para um degrau, $\Delta u(k+1) = \Delta u(k)$. Então

$$\begin{bmatrix} y_{k+2}^P \end{bmatrix}_k = (h_1 + h_2) \Delta u(k) + \begin{bmatrix} y_{k+2}^{P'} \end{bmatrix}_k$$

$$\begin{bmatrix} y_{k+2}^P \end{bmatrix}_k = S_2 \Delta u(k) + \begin{bmatrix} y_{k+2}^{P'} \end{bmatrix}_k, \text{ onde } S_2 = h_1 + h_2$$

Para o instante $k+3$, a predição será

$$\begin{bmatrix} y_{k+3}^P \end{bmatrix}_k = h_1 \Delta u(k+2) + h_2 \Delta u(k+1) + h_3 \Delta u(k) + \begin{bmatrix} y_{k+3}^{P'} \end{bmatrix}_k$$

$$\begin{bmatrix} y_{k+3}^P \end{bmatrix}_k = (h_1 + h_2 + h_3) \Delta u(k) + \begin{bmatrix} y_{k+3}^{P'} \end{bmatrix}_k = S_3 \Delta u(k) + \begin{bmatrix} y_{k+3}^{P'} \end{bmatrix}_k$$

Para o instante $k+N$, período de estabilização, a predição será

$$\begin{bmatrix} y_{k+N}^P \end{bmatrix}_k = S_N \Delta u(k) + \begin{bmatrix} y_{k+N}^{P'} \end{bmatrix}_k$$

A Figura 2.10 mostra a predição feita pelo controlador no instante k até o instante $k+N$.

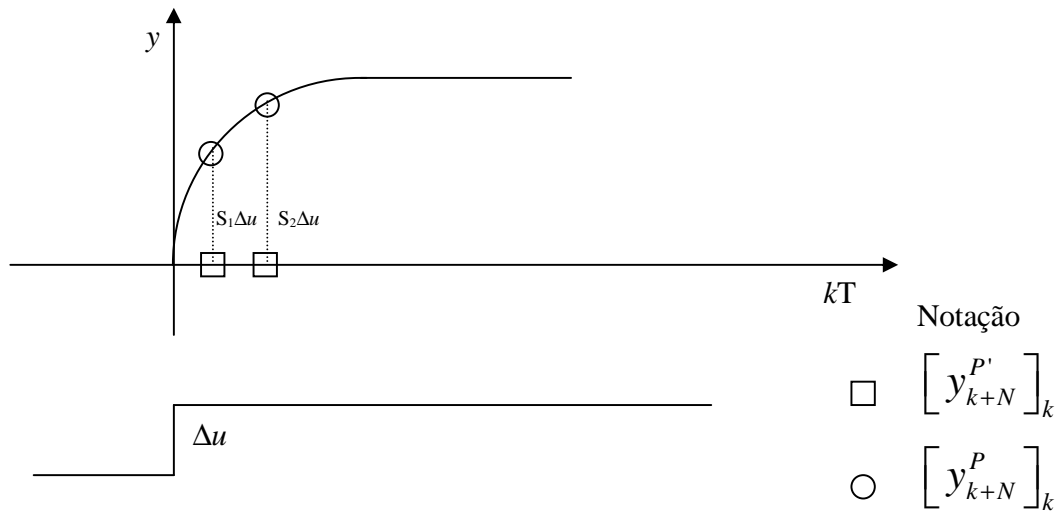


Figura 2.10 – Predição da Resposta do Processo à aplicação de um degrau de amplitude Δu

Se o MPC for sintonizado para ter mais de uma ação de controle (horizonte de controle m diferente de um), m ações de controle são calculadas para permitir que a variável seja conduzida ao *setpoint*, minimizando o somatório de erros ao quadrado durante o horizonte de predição.

2.5.3. EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO PARA UM HORIZONTE DE CONTROLE IGUAL A DOIS

A ação de controle, neste caso, pode ser considerada como o cálculo de dois movimentos na variável manipulada de valores $\Delta u(k)$ e $\Delta u(k+1)$. A Figura 2.11 mostra esta predição para este problema.

Antes da ocorrência do degrau, sem considerar a ação de controle, a predição de y é determinada por $[y_{k+N}^{P'}]_k$.

No instante k , quando um degrau é aplicado ao *setpoint* da variável controlada, o vetor predição passa a ser alterado pela ação de controle que ocorre em dois níveis, conforme já descrito. Neste instante, apenas a ação $\Delta u(k)$ será considerada, pois apenas esta ação é aplicada a planta.

A predição da variável de controle para o instante $k+1$, feita no instante k , será

$$[y_{k+1}^P]_k = S_1 \Delta u(k) + [y_{k+1}^{P'}]_k$$

A predição da variável de controle para o instante $k+2$, feita no instante k , será

$$[y_{k+2}^P]_k = S_2 \Delta u(k) + S_1 \Delta u(k+1) + [y_{k+2}^{P'}]_k$$

Da mesma forma, para o instante $k+3$

$$[y_{k+3}^P]_k = S_3 \Delta u(k) + S_2 \Delta u(k+1) + [y_{k+3}^{P'}]_k$$

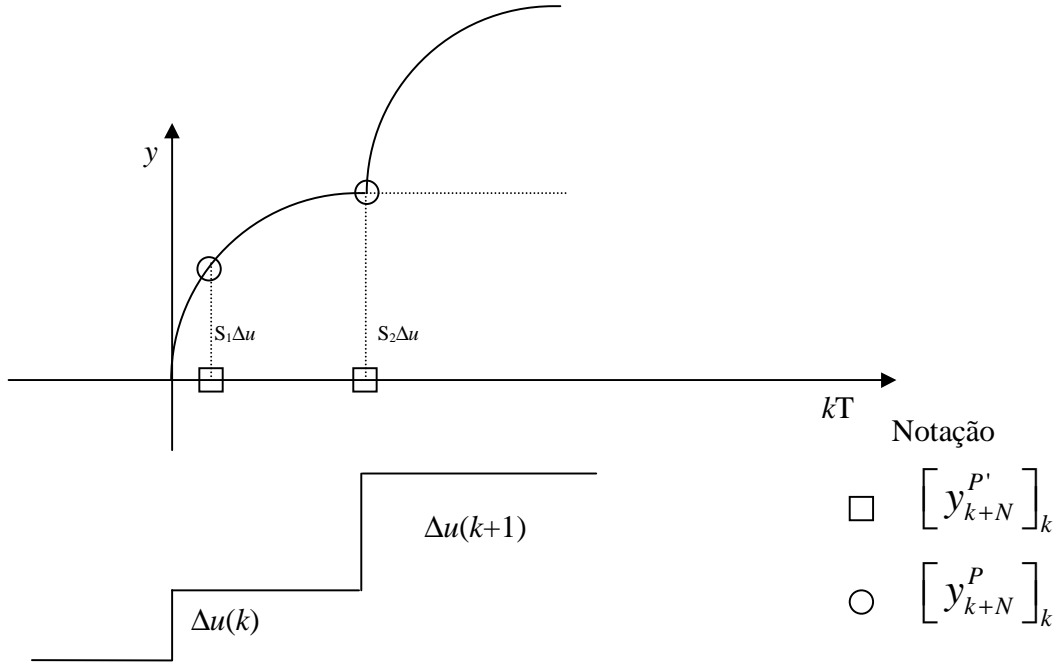


Figura 2.11 – Predição da resposta do processo para um MPC de horizonte de controle m igual a dois

2.5.4. EQUAÇÕES DE PREDIÇÃO PARA UM HORIZONTE DE CONTROLE IGUAL A M

Generalizando as equações de predição para um horizonte de controle m :

$$\left[y_{k+1}^P \right]_k = S_1 \Delta u(k) + \left[y_{k+1}^{P'} \right]_k$$

$$\left[y_{k+2}^P \right]_k = S_2 \Delta u(k) + S_1 \Delta u(k+1) + \left[y_{k+2}^{P'} \right]_k$$

$$\left[y_{k+3}^P \right]_k = S_3 \Delta u(k) + S_2 \Delta u(k+1) + S_1 \Delta u(k+2) + \left[y_{k+3}^{P'} \right]_k$$

⋮

$$\left[y_{k+m}^P \right]_k = S_m \Delta u(k) + S_{m-1} \Delta u(k+1) + \dots + S_2 \Delta u(k+m-2) + S_1 \Delta u(k+m-1) + \left[y_{k+m}^{P'} \right]_k$$

Para o intervalo de tempo depois de m :

$$\left[y_{k+m+1}^P \right]_k = S_{m+1} \Delta u(k) + S_m \Delta u(k+1) + \dots + S_2 \Delta u(k+m-1) + S_1 \Delta u(k+m) + \left[y_{k+m}^{P'} \right]_k$$

Mas $\Delta u(k+m)$ é nulo para um horizonte de controle igual a m .

$$\left[y_{k+m+1}^P \right]_k = S_{m+1} \Delta u(k) + S_m \Delta u(k+1) + \dots + S_2 \Delta u(k+m-1) + S_1 \underbrace{\Delta u(k+m)}_{=0} + \left[y_{k+m}^{P'} \right]_k$$

$$\begin{aligned} \left[y_{k+m+2}^P \right]_k &= S_{m+2} \Delta u(k) + S_{m+1} \Delta u(k+1) + \dots + S_3 \Delta u(k+m-1) + \underbrace{S_2 \Delta u(k+m)}_{=0} + \underbrace{S_1 \Delta u(k+m+1)}_{=0} + \left[y_{k+m}^{P'} \right]_k \\ &\vdots \\ \left[y_{k+N}^P \right]_k &= S_N \Delta u(k) + S_{N-1} \Delta u(k+1) + \dots + S_{N-m+2} \Delta u(k+m-2) + S_{N-m+1} \Delta u(k+m-1) + 0 + 0 \dots + \left[y_{k+m}^{P'} \right]_k \end{aligned}$$

Escrevendo este conjunto de equações de predição para uma notação compacta na forma matricial e supondo um horizonte de predição np igual a N , período de estabilização:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^P \\ y_{k+2}^P \\ \vdots \\ y_{k+N}^P \end{bmatrix}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ S_2 & S_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_N & S_{N-1} & \dots & S_{N-m+1} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Dinamica}} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k-m+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{k+1}^{P'} \\ y_{k+2}^{P'} \\ \vdots \\ y_{k+N}^{P'} \end{bmatrix}_k$$

$$\underline{y}^P = \underline{S} \underline{\Delta u} + \underline{y}^{P'}$$

Dimensões envolvidas na equação de predição, considerando apenas uma variável controlada e uma variável manipulada:

$$\left[\underline{y}^P \right] = N \times 1; \left[\underline{y}^{P'} \right] = N \times 1; \left[\underline{\Delta u} \right] = m \times 1; \left[\underline{S} \right] = N \times m$$

O MPC, no instante k , calcula as m entradas Δu de forma a minimizar a seguinte função objetivo:

$$\min J = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_{np}^2, \text{ onde}$$

e_i : erro entre *setpoint* e predição no instante $k+i$

Escrevendo a função objetivo na notação vetorial, tem-se:

$$\min J = \underline{e}^T \underline{e}, \text{ onde } \left[\underline{e} \right] = np \times 1$$

3. DYNAMIC MATRIX CONTROL (DMC)

Em 1979, Cutler [3] desenvolveu um controlador preditivo baseado em uma matriz dinâmica. Esta matriz, contendo a dinâmica de um processo, é o resultado da identificação da planta obtida com a aplicação de um degrau.

3.1. DYNAMIC MATRIX CONTROL (DMC) – CASO SISO

A predição da saída do processo, variável controlada, para um instante $k+1$, no instante k , pode ser vista como resultado das ações passadas e da ação aplicada ao processo neste instante k . Conforme mostrado no item 2.5, esta predição pode ser dada como:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^P \end{bmatrix}_k = h_1 u(k) + h_2 u(k-1) + h_3 u(k-2) + \dots + \begin{bmatrix} y_{k+1}^{P'} \end{bmatrix}_k$$

Definindo como variável incremental:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} y_{k+1}^P \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} y_{k+1}^{P'} \end{bmatrix}_k, \text{ podemos escrever:}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \end{bmatrix}_k = h_1 u(k) + h_2 u(k-1) + h_3 u(k-2) + \dots$$

onde

$h_1 u(k)$: resposta à ação de controle aplicada no instante atual

$h_2 u(k-1) + h_3 u(k-2) + \dots$: respostas às ações passadas

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \end{bmatrix}_k = \sum_{i=1}^N h_i u(k+1-i) \quad (3.1)$$

A equação (3.1) mostra que a predição depende da entrada atual e das entradas anteriores, até o instante N , período de estabilização. As entradas ocorridas anteriores a N já teriam seu efeito sobre o processo finalizado.

Para o instante k , a predição feita nesse instante k seria:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_k^P \end{bmatrix}_k = \sum_{i=1}^N h_i u(k-i) \quad (3.2)$$

Subtraindo a equação (3.1) da equação (3,2):

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \hat{y}_k^P \end{bmatrix}_k = \sum_{i=1}^N h_i u(k+1-i) - \sum_{i=1}^N h_i u(k-i)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \hat{y}_k^P \end{bmatrix}_k = \sum_{i=1}^N h_i [u(k+1-i) - u(k-i)]$$

Definindo:

$$\Delta u(k+1-i) = u(k+1-i) - u(k-i)$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{y}_{k+1}^P \right]_k - \left[\hat{y}_k^P \right]_k &= \sum_{i=1}^N h_i \Delta u(k+1-i) \\ \left[\hat{y}_{k+1}^P \right]_k &= \left[\hat{y}_k^P \right]_k + \sum_{i=1}^N h_i \Delta u(k+1-i) \quad (3.3) \end{aligned}$$

A expressão em termos de incremento de entrada de processo, $\Delta u(k+1-i)$, é mais conveniente, pois o controlador passa a ser um controlador integral, eliminando *offset*. O controlador expresso com lei de controle em função de posição é um MPC proporcional, podendo apresentar desvio permanente (*offset*) entre *setpoint* e PV.

Generalizando a equação (3.3) para qualquer intervalo de tempo:

$$\begin{aligned} \left[\hat{y}_{k+j}^P \right]_k &= \left[\hat{y}_{k+j-1}^P \right]_k + \sum_{i=1}^N h_i \Delta u(k+j-i) \quad (3.4) \\ \left[\hat{y}_{k+j}^P \right]_k &= \left[\hat{y}_{k+j-1}^P \right]_k + h_1 \Delta u(k+j-1) + h_2 \Delta u(k+j-2) + \dots + h_N \Delta u(k+j-N) \end{aligned}$$

Observe que este enfoque, indicado na equação (3.4), é um pouco diferente do abordado no item 2.5.2 e 2.5.3. Na primeira abordagem, a predição sem ação de controle era considerada em todas as predições do futuro. Agora, a predição do instante imediatamente anterior é utilizada no próximo intervalo de tempo.

3.1.1. CORREÇÃO DA PREDIÇÃO COM OS DADOS DA PLANTA

Para diminuir a sensibilidade do MPC a erros de modelo ou ações de perturbações não esperadas, a predição da saída para o intervalo $k+1$ no instante k , resultado da equação (3.3), é corrigida com o erro atual da predição de y para o intervalo k , predição esta feita no instante $k-1$ anterior. Neste momento, instante k , este erro pode ser calculado, pois a informação da planta já se encontra disponível.

$$\left[\hat{y}_{k+1}^C \right]_k = \left[\hat{y}_{k+1}^P \right]_k + \left(y_k - \left[\hat{y}_k^P \right]_{k-1} \right)$$

onde

y_k : valor lido da planta no instante k

Para a correção da predição em um instante genérico j , o DMC assume que o erro atual, erro existente entre a predição deste instante atual, feita no instante anterior, e a leitura da planta, já disponível, será constante para todo o horizonte de predição.

$$\left[\hat{y}_{k+j}^C \right]_k - \left[\hat{y}_{k+j}^P \right]_k = \left[\hat{y}_{k+j-1}^C \right]_k - \left[\hat{y}_{k+j-1}^P \right]_k$$

onde:

$$\left[\hat{y}_{k+j}^C \right]_k - \left[\hat{y}_{k+j}^P \right]_k : \text{erro de predição do instante } k+j$$

$$\left[\hat{y}_{k+j-1}^C \right]_k - \left[\hat{y}_{k+j-1}^P \right]_k : \text{erro de predição do instante } k+j-1$$

Esta equação do erro pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^C \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^C \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^P \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^P \end{bmatrix}_k$$

De (3.4):

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^C \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^C \end{bmatrix}_k + \sum_{i=1}^N h_i \Delta u(k+j-i) \quad (3.5)$$

3.1.2. PREDIÇÃO DO DMC – CASO SISO

Utilizando a equação (3.5) para a predição:

3.1.2.1. Intervalo de instante $j=1$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_k^C \end{bmatrix}_k + \sum_{i=1}^N h_i \Delta u(k+1-i)$$

onde $\begin{bmatrix} \hat{y}_k^C \end{bmatrix}_k$ será o valor y_k lido da planta, pois no instante k está informação já está disponível.

Desenvolvendo a equação:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k = y_k + h_1 \Delta u(k) + h_2 \Delta u(k-1) + h_3 \Delta u(k-2) + \dots$$

onde:

$\Delta u(k)$: em procedimento de cálculo pelo controlador

$\Delta u(k-1), \Delta u(k-2) \dots$: valores de ações passadas

Separando as ações de controle conhecidas, isto é, do passado, da ação de controle atual:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k = y_k + h_1 \Delta u(k) + \underbrace{\sum_{i=2}^N h_i \Delta u(k+1-i)}_{\phi_1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k = y_k + S_1 \Delta u(k) + \phi_1 \quad (3.6)$$

3.1.2.2. Intervalo de instante $j=2$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+2}^C \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k + \sum_{i=1}^N h_i \Delta u(k+2-i)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+2}^C \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k + \underbrace{h_1 \Delta u(k+1)}_{\text{desconhecido}} + \underbrace{h_2 \Delta u(k)}_{\text{desconhecido}} + \underbrace{h_3 \Delta u(k-1)}_{\text{conhecido}} + \underbrace{h_4 \Delta u(k-2)}_{\text{conhecido}} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+2}^C \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k + h_1 \Delta u(k+1) + h_2 \Delta u(k) + \underbrace{\sum_{i=3}^N h_i \Delta u(k+2-i)}_{\phi_2}$$

Da equação (3.6):

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{y}_{k+2}^C \right]_k &= y_k + S_1 \Delta u(k) + \phi_1 + h_1 \Delta u(k+1) + h_2 \Delta u(k) + \phi_2 \\
 \left[\hat{y}_{k+2}^C \right]_k &= y_k + h_1 \Delta u(k+1) + (S_1 + h_2) \Delta u(k) + \phi_1 + \phi_2 \\
 \left[\hat{y}_{k+2}^C \right]_k &= y_k + S_2 \Delta u(k) + S_1 \Delta u(k+1) + \phi_1 + \phi_2 \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

3.1.2.3. Intervalo de instante $j=3$

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{y}_{k+3}^C \right]_k &= \left[\hat{y}_{k+2}^C \right]_k + \sum_{i=1}^N h_i \Delta u(k+3-i) \\
 \left[\hat{y}_{k+3}^C \right]_k &= \left[\hat{y}_{k+2}^C \right]_k + h_1 \underbrace{\Delta u(k+2)}_{\text{desconhecido}} + h_2 \underbrace{\Delta u(k+1)}_{\text{desconhecido}} + h_3 \underbrace{\Delta u(k)}_{\text{desconhecido}} + h_4 \underbrace{\Delta u(k-1)}_{\text{conhecido}} + \dots \\
 \left[\hat{y}_{k+3}^C \right]_k &= \left[\hat{y}_{k+2}^C \right]_k + h_1 \Delta u(k+2) + h_2 \Delta u(k+1) + h_3 \Delta u(k) + \underbrace{\sum_{i=4}^N h_i \Delta u(k+3-i)}_{\phi_3}
 \end{aligned}$$

Da equação (3.7):

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{y}_{k+3}^C \right]_k &= y_k + S_1 \Delta u(k+1) + S_2 \Delta u(k) + \phi_1 + \phi_2 + h_1 \Delta u(k+2) + h_2 \Delta u(k+1) + h_3 \Delta u(k) + \phi_3 \\
 \left[\hat{y}_{k+3}^C \right]_k &= y_k + S_3 \Delta u(k) + S_2 \Delta u(k+1) + S_1 \Delta u(k+2) + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

As equações de predição corrigidas (3.6), (3.7) e (3.8) podem ser escritas, a partir da seguinte definição: $P_j = \sum_{n=1}^j \phi_n$, como:

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{y}_{k+1}^C \right]_k &= y_k + S_1 \Delta u(k) + P_1 \\
 \left[\hat{y}_{k+2}^C \right]_k &= y_k + S_2 \Delta u(k) + S_1 \Delta u(k+1) + P_2 \\
 \left[\hat{y}_{k+3}^C \right]_k &= y_k + S_3 \Delta u(k) + S_2 \Delta u(k+1) + S_1 \Delta u(k+2) + P_3
 \end{aligned}$$

Generalizando:

$$\left[\hat{y}_{k+j}^C \right]_k = y_k + S_j \Delta u(k) + S_{j-1} \Delta u(k+1) + S_{j-2} \Delta u(k+2) + \dots + S_1 \Delta u(k+j-1) + P_j$$

Escrevendo estas equações em uma forma matricial e fazendo a predição até um instante np :

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^C \\ y_{k+2}^C \\ y_{k+3}^C \\ \vdots \\ y_{k+np-1}^C \\ y_{k+np}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{np-1} & S_{np-2} & S_{np-3} & \dots & S_1 & 0 \\ S_{np} & S_{np-1} & S_{np-2} & \dots & S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+np-2) \\ \Delta u(k+np-1) \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} y_k \\ y_k \\ y_k \\ \vdots \\ y_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{np-1} \\ P_{np} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\underline{y}^C = \underline{S}\underline{\Delta u} + \underline{y}_k + \underline{P}$$

onde:

\underline{y}^C : valores preditos e corrigidos de y no instante k até o horizonte de predição np

$\underline{\Delta u}$: ações futuras de controle

\underline{y}_k : leitura da planta

\underline{P} : efeito das ações do passado sobre a planta até o instante atual

\underline{S} : matriz dinâmica, pois mostra a dinâmica do processo através dos coeficientes de resposta ao degrau deste processo.

O vetor erro pode ser obtido a partir da diferença entre o vetor \underline{y}^{SP} e o vetor de predição \underline{y}^C . Subtraindo, portanto, dos dois lados da equação (3.9), o vetor \underline{y}^{SP} vem:

$$\underline{y}^{SP} - \begin{bmatrix} y_{k+1}^C \\ y_{k+2}^C \\ y_{k+3}^C \\ \vdots \\ y_{k+np-1}^C \\ y_{k+np}^C \end{bmatrix} = \underline{y}^{SP} - \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{np-1} & S_{np-2} & S_{np-3} & \dots & S_1 & 0 \\ S_{np} & S_{np-1} & S_{np-2} & \dots & S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+np-2) \\ \Delta u(k+np-1) \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} y_k \\ y_k \\ y_k \\ \vdots \\ y_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{np-1} \\ P_{np} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y^{SP} - y_{k+1}^C \\ y^{SP} - y_{k+2}^C \\ y^{SP} - y_{k+3}^C \\ \vdots \\ y^{SP} - y_{k+np-1}^C \\ y^{SP} - y_{k+np}^C \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{np-1} & S_{np-2} & S_{np-3} & \dots & S_1 & 0 \\ S_{np} & S_{np-1} & S_{np-2} & \dots & S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+np-2) \\ \Delta u(k+np-1) \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} y^{SP} - y_k \\ y^{SP} - y_k \\ y^{SP} - y_k \\ \vdots \\ y^{SP} - y_k \\ y^{SP} - y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{np-1} \\ P_{np} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{k+1} \\ e_{k+2} \\ e_{k+3} \\ \vdots \\ e_{k+np-1} \\ e_{k+np} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{np-1} & S_{np-2} & S_{np-3} & \dots & S_1 & 0 \\ S_{np} & S_{np-1} & S_{np-2} & \dots & S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+np-2) \\ \Delta u(k+np-1) \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} e_k \\ e_k \\ e_k \\ \vdots \\ e_k \\ e_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{np-1} \\ P_{np} \end{bmatrix}$$

O MPC não calcula np ações de controle, como indicado na equação (3.9) mas apenas m ações de controle. Após o horizonte de controle m , os valores de incremento na entrada serão nulos. Portanto

$$\begin{bmatrix} e_{k+1} \\ e_{k+2} \\ e_{k+3} \\ \vdots \\ e_{k+np-1} \\ e_{k+np} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{np-1} & S_{np-2} & S_{np-3} & \dots & S_1 & 0 \\ S_{np} & S_{np-1} & S_{np-2} & \dots & S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} e_k \\ e_k \\ e_k \\ \vdots \\ e_k \\ e_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{np-1} \\ P_{np} \end{bmatrix}$$

A matriz dinâmica S pode, portanto ser simplificada, contendo np linhas e apenas m colunas, pois as demais serão multiplicadas por zero, valor da variação da entrada u após o horizonte de controle m .

$$\begin{bmatrix} e_{k+1} \\ e_{k+2} \\ e_{k+3} \\ \vdots \\ e_{k+np-1} \\ e_{k+np} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{np-1} & S_{np-2} & S_{np-3} & \dots & S_{np-m+1} & 0 \\ S_{np} & S_{np-1} & S_{np-2} & \dots & S_{np-m+2} & S_{np-m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-2) \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} e_k \\ e_k \\ e_k \\ \vdots \\ e_k \\ e_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{np-1} \\ P_{np} \end{bmatrix}$$

Em notação vetorial:

$$\underline{e} = -\underline{S}\underline{\Delta u} + \underline{e}_k - \underline{P}$$

Definindo $\underline{e}' = \underline{e}_k - \underline{P}$

$$\underline{e} = -\underline{S}\underline{\Delta u} + \underline{e}' \quad (3.10)$$

onde

$\underline{e} = y^{SP} - y_{k+j}^C$ - vetor de erros entre os valores previstos e o valor desejado

$\underline{e}' = \underline{e}_k - \underline{P}$ - vetor de erros sem ações de controle futuras

Dimensões dos termos da equação (3.10)

$$[\underline{e}] = np \times 1$$

$$[\underline{\Delta u}] = m \times 1$$

$$[\underline{e}'] = [\underline{e}_k] = [\underline{P}] = np \times 1$$

$$[\underline{S}] = np \times m$$

3.1.3. FUNÇÃO OBJETIVO DO DMC SIS0

O MPC tem como objetivo minimizar $J = \underline{e}'^T \underline{e}$. Substituindo a equação (3.10) na função objetivo J :

$$J = \left(-\underline{S}\underline{\Delta u} + \underline{e}' \right)^T \left(-\underline{S}\underline{\Delta u} + \underline{e}' \right)$$

3.1.3.1. Solução Analítica para a função objetivo

Desenvolvendo a expressão da função objetivo

$$J = \left(-\underline{S}\underline{\Delta u} + \underline{e}' \right)^T \left(-\underline{S}\underline{\Delta u} + \underline{e}' \right) = \left(-\underline{\Delta u}^T \underline{S}^T + \underline{e}'^T \right) \left(-\underline{S}\underline{\Delta u} + \underline{e}' \right)$$

$$J = \underline{\Delta u}^T \underline{S}^T \underline{S}\underline{\Delta u} - \underline{\Delta u}^T \underline{S}^T \underline{e}' - \underline{e}'^T \underline{S}\underline{\Delta u} + \underline{e}'^T \underline{e}'$$

O ponto ótimo desta função em relação à variável u será obtido através do ponto de derivada nula:

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{u}} = 2\underline{S}^T \underline{S}\underline{\Delta u} - \underline{S}^T \underline{e}' - \underline{e}'^T \underline{S} + 0 = 0$$

$$2\underline{S}^T \underline{S}\underline{\Delta u} = \underline{S}^T \underline{e}'$$

$$\underline{\Delta u} = \left(\underline{S}^T \underline{S} \right)^{-1} \underline{S}^T \underline{e}' \quad (3.11)$$

Dimensões dos termos da equação (3.11):

$$[\underline{\Delta u}] = m \times 1$$

$$[\underline{e}'] = np \times 1$$

$$[\underline{S}] = np \times m$$

Das m ações de controle calculadas na equação (3.11), apenas a primeira é implementada.

No instante $k+1$ seguinte, todo processo é recalculado com a nova informação da planta disponível.

A solução indicada na equação (3.11) é válida para um controlador sem restrições na entrada.

3.1.4. FUNÇÃO OBJETIVO MODIFICADA DO DMC SISO

Para atenuar a ação do controlador sobre a variável manipulada, pode-se inserir um fator denominado de *fator de supressão* que penaliza incrementos realizados nesta variável.

$$J = \underline{e}^T \underline{e} + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u} \quad (3.12)$$

onde $[\underline{R}] = m \times m$. A matriz \underline{R} define um peso sobre os movimentos da variável manipulada para cada instante do horizonte de controle, como pode ser visto a seguir:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_m \end{bmatrix}$$

3.1.4.1. Solução Analítica para a nova função objetivo

Substituindo a equação (3.10) na equação (3.12) e desenvolvendo a expressão da função objetivo

$$J = \left(-\underline{S} \Delta \underline{u} + \underline{e}' \right)^T \left(-\underline{S} \Delta \underline{u} + \underline{e}' \right) + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u} = \left(-\Delta \underline{u}^T \underline{S}^T + \underline{e}'^T \right) \left(-\underline{S} \Delta \underline{u} + \underline{e}' \right) + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u}$$

$$J = \Delta \underline{u}^T \underline{S}^T \underline{S} \Delta \underline{u} - \Delta \underline{u}^T \underline{S}^T \underline{e}' - \underline{e}'^T \underline{S} \Delta \underline{u} + \underline{e}'^T \underline{e}' + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u}$$

O ponto ótimo desta função em relação à variável u será obtido através do ponto de derivada nula.

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{u}} = 2 \underline{S}^T \underline{S} \Delta \underline{u} - \underline{S}^T \underline{e}' - \underline{e}'^T \underline{S} + 2 \underline{R} \Delta \underline{u} = 0$$

$$2 \underline{S}^T \underline{S} \Delta \underline{u} - \underline{S}^T \underline{e}' + 2 \underline{R} \Delta \underline{u} = 0$$

$$\underline{S}^T \underline{S} \Delta \underline{u} - \underline{S}^T \underline{e}' + \underline{R} \Delta \underline{u} = 0$$

$$\Delta \underline{u} = \left(\underline{S}^T \underline{S} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^T \underline{e}' \quad (3.13)$$

A equação (3.13) é a equação do DMC sem restrições, aplicada a um problema SISO.

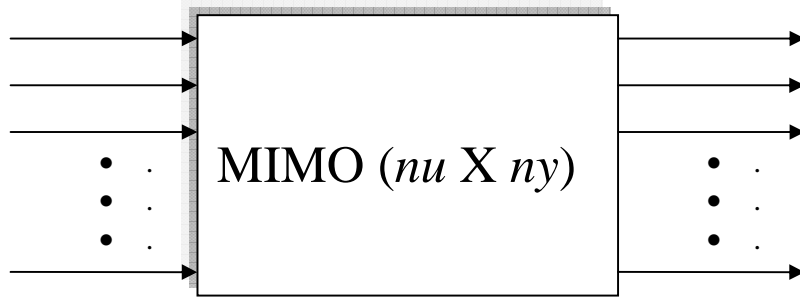


Figura 3.2: Sistema MIMO com nu variáveis manipuladas e ny variáveis controladas

A equação (3.2) pode ser escrita da seguinte forma para cada variável controlada de um sistema multivariável:

$$\left[\hat{y}_{j,k}^P \right]_k = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{nu} h_{j,l,i} u_l(k-i) \quad (3.14)$$

onde

$\left[\hat{y}_{j,k}^P \right]_k$ - predição da saída j , para o instante k

$u_l(k-i)$ - entrada manipulada l aplicada ao processo no instante $k-i$

$h_{j,l,i}$ - resposta da saída j ao impulso aplicado na entrada l no instante i

Na equação (3.14) observamos que cada variável manipulada l , definida de um a nu , influencia segundo uma dinâmica $\sum_{i=1}^N h_{j,l,i} u_l(k-i)$ cada uma das j das variáveis controladas.

Desenvolvendo a equação (3.14), por exemplo, para $j=1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left[\hat{y}_{1,k}^P \right]_k &= h_{1,1,1} u_1(k-1) + h_{1,2,1} u_2(k-1) + \dots + h_{1,nu,1} u_{nu}(k-1) + h_{1,1,2} u_1(k-2) + \dots + h_{1,nu,2} u_{nu}(k-2) + \dots \\ &\quad \dots + h_{1,1,N} u_1(k-N) + h_{1,2,N} u_2(k-N) + \dots + h_{1,nu,N} u_{nu}(k-N) \end{aligned}$$

Portanto, para cada instante i é possível definir uma matriz que correlaciona o efeito de cada manipulada sobre cada controlada:

$$\underline{\underline{H}}_i = \begin{bmatrix} h_{11,i} & h_{12,i} & \dots & h_{1nu,i} \\ h_{21,i} & h_{22,i} & \dots & h_{2nu,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{ny1,i} & h_{ny2,i} & \dots & h_{nynu,i} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo a equação (3.14) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_k^P \\ \underline{y}_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \underline{u}(k-i) \quad (3.15)$$

Dimensões da equação (3.15) que representa a predição das variáveis controladas para o instante k :

$\begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}_i \end{bmatrix} = ny \times nu$ - valor do impulso no instante i para cada conjunto variável controlada – variável manipulada

$$\begin{bmatrix} \underline{u}(k-i) \end{bmatrix} = nu \times 1$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_k^P \\ \underline{y}_k \end{bmatrix} = ny \times 1$$

A predição para o instante $k+1$, feita no instante k , será, de forma análoga:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \\ \underline{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \underline{u}(k-i+1) \quad (3.16)$$

Subtraindo a predição indicada na equação (3.16) da predição indicada na equação (3.15):

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \\ \underline{y}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_k^P \\ \underline{y}_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \underline{u}(k-i+1) - \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \underline{u}(k-i) = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \Delta \underline{u}(k-i+1)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \\ \underline{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_k^P \\ \underline{y}_k \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \Delta \underline{u}(k-i+1)$$

Generalizando:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^P \\ \underline{y}_{k+j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^P \\ \underline{y}_{k+j-1} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \Delta \underline{u}(k+j-i) \quad (3.17)$$

A equação (3.17), equação de um sistema MIMO, é equivalente a equação (3.4), equação de predição para um sistema SISO.

3.2.1. CORREÇÃO DA PREDIÇÃO COM OS DADOS DA PLANTA

O DMC assume que o erro cometido na predição é o mesmo para qualquer intervalo do horizonte de predição.

Desta forma

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^C \\ \underline{y}_{k+j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^P \\ \underline{y}_{k+j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^C \\ \underline{y}_{k+j-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^P \\ \underline{y}_{k+j-1} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^C \\ \underline{y}_{k+j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^P \\ \underline{y}_{k+j} \end{bmatrix} : \text{erro de predição para o instante } k+j \text{ feita no instante } k$$

$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^C \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^P \end{bmatrix}_k$: erro de predição para o instante $k+j-1$ feita no instante k

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^C \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^C \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^P \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^P \end{bmatrix}_k$$

Da equação (3.17), vem:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^C \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j-1}^C \end{bmatrix}_k + \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \Delta \underline{u}(k+j-i) \quad (3.18)$$

3.2.2. PREDIÇÃO DO DMC – CASO MIMO

Utilizando a equação (3.18) para a predição, obtêm-se os seguintes resultados:

3.2.2.1. Intervalo de instante $j=1$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k}_{\text{Valor Atual lido da Planta}} + \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \Delta \underline{u}(k+1-i)$$

Desenvolvendo a equação:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k = \underline{y}_k + \underline{\underline{H}}_1 \underbrace{\Delta \underline{u}(k)}_{\text{Valor desconhecido}} + \underbrace{H_2 \Delta \underline{u}(k-1) + H_3 \Delta \underline{u}(k-2) + \dots}_{\text{Passado}}$$

Separando as ações de controle conhecidas, isto é, do passado, da ação de controle atual:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k = \underline{y}_k + \underline{\underline{H}}_1 \Delta \underline{u}(k) + \underbrace{\sum_{i=2}^N \underline{\underline{H}}_i \Delta \underline{u}(k+1-i)}_{\phi_1}$$

Da mesma forma que para o sistema SISO, podemos definir $\underline{\underline{S}}_1 = \underline{\underline{H}}_1$. Então,

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k = \underline{y}_k + \underline{\underline{S}}_1 \Delta \underline{u}(k) + \underbrace{\phi_1}_{P_1} \quad (3.19)$$

3.2.2.2. Intervalo de instante $j=2$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+2}^C \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \end{bmatrix}_k + \sum_{i=1}^N \underline{\underline{H}}_i \Delta \underline{u}(k+2-i)$$

Utilizando a equação (3.19):

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+2}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k) + \underline{\phi}_1 + \sum_{i=1}^N \underline{H}_i \Delta \underline{u}(k+2-i)$$

Desenvolvendo o somatório das ações de controle

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+2}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k) + \underline{\phi}_1 + \underline{H}_1 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{H}_2 \Delta \underline{u}(k) + \underline{H}_3 \Delta \underline{u}(k-1) + \dots$$

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+2}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{H}_1 \Delta \underline{u}(k+1) + (\underline{H}_1 + \underline{H}_2) \Delta \underline{u}(k) + \underline{\phi}_1 + \underline{H}_3 \Delta \underline{u}(k-1) + \dots$$

Separando as ações de controle conhecidas, isto é, do passado, das ações de controle atual e futura, e lembrando que, similar ao SISO, podemos escrever que $\underline{S}_2 = \underline{H}_1 + \underline{H}_2$:

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+2}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{S}_2 \Delta \underline{u}(k) + \underline{\phi}_1 + \underbrace{\sum_{i=3}^N \underline{H}_i \Delta \underline{u}(k+2-i)}_{\underline{\phi}_2}$$

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+2}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{S}_2 \Delta \underline{u}(k) + \underbrace{\underline{\phi}_1 + \underline{\phi}_2}_{E_2} \quad (3.20)$$

3.2.2.3. Intervalo de instante $j=3$

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+3}^C \right]_k = \left[\hat{\underline{y}}_{k+2}^C \right]_k + \sum_{i=1}^N \underline{H}_i \Delta \underline{u}(k+3-i)$$

Utilizando a equação (3.20)

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+3}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{S}_2 \Delta \underline{u}(k) + \underline{\phi}_1 + \underline{\phi}_2 + \sum_{i=1}^N \underline{H}_i \Delta \underline{u}(k+3-i)$$

Desenvolvendo o somatório das ações de controle

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+3}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{S}_2 \Delta \underline{u}(k) + \underline{\phi}_1 + \underline{\phi}_2 + \underline{H}_1 \Delta \underline{u}(k+2) + \underline{H}_2 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{H}_3 \Delta \underline{u}(k) + \dots + \underline{H}_4 \Delta \underline{u}(k-1) + \dots$$

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+3}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k+2) + \underline{S}_2 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{S}_3 \Delta \underline{u}(k) + \underline{\phi}_1 + \underline{\phi}_2 + \underline{H}_4 \Delta \underline{u}(k-1) + \dots$$

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+3}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k+2) + \underline{S}_2 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{S}_3 \Delta \underline{u}(k) + \underline{\phi}_1 + \underline{\phi}_2 + \underbrace{\sum_{i=4}^N \underline{H}_i \Delta \underline{u}(k+3-i)}_{\underline{\phi}_3}$$

$$\left[\hat{\underline{y}}_{k+3}^C \right]_k = \underline{y}_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k+2) + \underline{S}_2 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{S}_3 \Delta \underline{u}(k) + \underbrace{\underline{\phi}_1 + \underline{\phi}_2 + \underline{\phi}_3}_{E_3} \quad (3.21)$$

Generalizando as equações (3.19), (3.20) e (3.21):

$$\begin{aligned} \left[\hat{\underline{y}}_{-k+j}^C \right]_k &= \underline{y}_{-k} + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k+j-1) + \underline{S}_2 \Delta \underline{u}(k+j-2) + \underline{S}_3 \Delta \underline{u}(k+j-3) + \dots \\ &\quad + \underline{S}_i \Delta \underline{u}(k+j-i) + \dots + \underline{S}_j \Delta \underline{u}(k) + \dots + \underbrace{\phi_{-1} + \phi_{-2} + \phi_{-3} + \dots + \phi_{-j}}_{\underline{P}_j} \end{aligned}$$

Lembrando que o horizonte de controle m é menor que o horizonte de predição np , o que significa que ações de controle após o intervalo m serão nulas, podemos escrever a seguinte equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{-k+1}^C \\ \hat{\underline{y}}_{-k+2}^C \\ \hat{\underline{y}}_{-k+3}^C \\ \vdots \\ \hat{\underline{y}}_{-k+np-1}^C \\ \hat{\underline{y}}_{-k+np}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & \mathbf{0}_{ny \times nu} & \mathbf{0}_{ny \times nu} \\ \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & \mathbf{0}_{ny \times nu} \\ \underline{S}_3 & \underline{S}_2 & \underline{S}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \underline{S}_{np-3} & \dots & \underline{S}_{np-m+1} & \underline{S}_{np-m} \\ \underline{S}_{np} & \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \dots & \underline{S}_{np-m+2} & \underline{S}_{np-m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \Delta \underline{u}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-2) \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{y}_{-k} \\ \underline{y}_{-k} \\ \underline{y}_{-k} \\ \vdots \\ \underline{y}_{-k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \\ \vdots \\ \underline{P}_{np} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\underline{y}^C = \underline{S} \Delta \underline{u} + \overline{\underline{y}_k} + \overline{\underline{P}} \quad (3.23)$$

onde:

para um \underline{S}_k genérico:

$$\underline{S}_k = \sum_{l=1}^k \underline{H}_l, \quad \underline{H}_l = \begin{bmatrix} h_{11,l} & h_{12,l} & \dots & h_{1nu,l} \\ h_{21,l} & h_{22,l} & \dots & h_{2nu,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{ny1,l} & h_{ny2,l} & \dots & h_{nynu,l} \end{bmatrix}, \quad [\underline{S}_k] = ny \times nu, \quad \text{matriz que define a}$$

resposta de cada variável controlada para cada variável manipulada em um dado instante l .

$$\underline{P}_i = \sum_{n=1}^i \phi_n$$

$$\phi_n = \sum_{j=n+1}^N H_j \Delta \underline{u}(k+n-j)$$

Dimensão dos vetores e matrizes envolvidos

$$[\Delta \underline{u}(k)] = nu \times 1$$

$$\left[\hat{\underline{y}}_{-k}^C \right] = \left[\hat{\underline{y}}_{-k+j}^C \right] = [\underline{P}_i] = [\underline{S}_k] = ny \times 1$$

$$[\mathbf{0}_{ny \times nu}] = \text{matriz de zeros com } ny \text{ linhas e } nu \text{ colunas}$$

$$\underline{y}^C = ny.np \times 1$$

$$\underline{\Delta u} = nu.m \times 1$$

$$\underline{S} = ny.np \times nu.m$$

$$\underline{y}_k = \underline{P} = ny.np \times 1$$

Subtraindo do vetor \underline{y}^{SP} a equação (3.23):

$$\underline{y}^{SP} - \underline{y}^C = \underline{y}^{SP} - \underline{S} \underline{\Delta u} - \underline{y}_k - \underline{P}$$

$$\underline{e} = -\underline{S} \underline{\Delta u} + \underbrace{e_k}_{\underline{e}'} - \underline{P}$$

$$\underline{e} = -\underline{S} \underline{\Delta u} + \underline{e}' \quad (3.24)$$

onde:

e_k - erro no instante atual

$$\underline{e}' = \begin{bmatrix} e_{k=1}^1 & e_{k=1}^2 & e_{k=1}^3 & \dots & e_{k=1}^{ny} & e_{k=2}^1 & \dots & e_{k=2}^{ny} & \dots & e_{k=np}^1 & \dots & e_{k=np}^{ny} \end{bmatrix}$$

\underline{e} = $ny.np \times 1$ - erro nos instantes futuros de predição

\underline{e}' = $ny.np \times 1$ - erro atual projetado para todos instantes de predição

3.2.3. FUNÇÃO OBJETIVO DO DMC MIMO

O MPC tem como objetivo minimizar $J = \underline{e}'^T \underline{e} + \underline{\Delta u}^T \underline{R} \underline{\Delta u}$. Substituindo a equação 3.24 na função objetivo J :

$$J = \left(-\underline{S} \underline{\Delta u} + \underline{e}' \right)^T \left(-\underline{S} \underline{\Delta u} + \underline{e}' \right) + \underline{\Delta u}^T \underline{R} \underline{\Delta u}$$

3.2.3.1. Solução Analítica para a função objetivo

Desenvolvendo a expressão da função objetivo

$$J = \left(-\underline{S} \underline{\Delta u} + \underline{e}' \right)^T \left(-\underline{S} \underline{\Delta u} + \underline{e}' \right) + \underline{\Delta u}^T \underline{R} \underline{\Delta u} = \left(-\underline{\Delta u}^T \underline{S}^T + \underline{e}'^T \right) \left(-\underline{S} \underline{\Delta u} + \underline{e}' \right) + \underline{\Delta u}^T \underline{R} \underline{\Delta u}$$

$$J = \underline{\Delta u}^T \underline{S}^T \underline{S} \underline{\Delta u} - \underline{\Delta u}^T \underline{S}^T \underline{e}' - \underline{e}'^T \underline{S} \underline{\Delta u} + \underline{e}'^T \underline{e}' + \underline{\Delta u}^T \underline{R} \underline{\Delta u}$$

O ponto ótimo desta função em relação à variável u será obtido através do ponto de derivada nula

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 2 \underline{S}^T \underline{S} \underline{\Delta u} - \underline{S}^T \underline{e}' - \underline{e}'^T \underline{S} + 2 \underline{R} \underline{\Delta u} = 0$$

$$\underline{\Delta u} = \left(\underline{S}^T \underline{S} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^T \underline{e}' \quad (3.25)$$

Dimensões dos termos da equação (3.25)

$$[\underline{\Delta u}] = nu.m \times 1$$

$$[\underline{e}'] = ny.np \times 1$$

$$[\underline{S}] = ny.np \times nu.m$$

$$[\underline{R}] = nu.m \times nu.m$$

A matriz \underline{R} , chamada de fator de supressão das variáveis manipuladas, tem a seguinte estrutura para um problema multivariável:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{R}_k & 0_{nu \times nu} & \dots & 0_{nu \times nu} & \dots & 0_{nu \times nu} \\ 0_{nu \times nu} & \underline{R}_{k+1} & \dots & 0_{nu \times nu} & \dots & 0_{nu \times nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{nu \times nu} & 0_{nu \times nu} & \dots & \underline{R}_{k+j} & \dots & 0_{nu \times nu} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{nu \times nu} & 0_{nu \times nu} & \dots & 0_{nu \times nu} & \dots & \underline{R}_{k+m-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{R}_{k+j} = \begin{bmatrix} r_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{nu} \end{bmatrix}_{k+j}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

O vetor completo da solução desta equação (3.25) tem a seguinte estrutura

$$\underline{\Delta u} = \begin{bmatrix} \Delta u_k \\ \Delta u_{k+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+j} \\ \vdots \\ \Delta u_{k+m-1} \end{bmatrix}, \quad \Delta u_{k+j} = \begin{bmatrix} \Delta u_{1,k+j} \\ \Delta u_{2,k+j} \\ \vdots \\ \Delta u_{nu,k+j} \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.26)$$

Das m ações de controle calculadas, para cada variável manipulada, na equação (3.26), apenas as primeiras nu linhas, Δu_k , são implementadas.

No instante $k+1$ seguinte, todo processo é recalculado com a nova informação da planta disponível.

3.2.4. FUNÇÃO OBJETIVO MODIFICADA DO DMC MIMO

No caso de um problema MIMO existem variáveis controladas que devem ser priorizadas em relação a outras. Na função objetivo, penalizam-se as variáveis de maior importância, forçando o controlador a priorizar estas variáveis, através de um peso W , para cada variável de saída.

$$J = \underline{e}' \underline{W}^T \underline{W} \underline{e} + \underline{\Delta u}' \underline{R} \underline{\Delta u} \quad (3.27)$$

onde:

$$\underline{\underline{W}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{W}}^{k+1} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & \underline{\underline{W}}^{k+2} & \dots & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & \underline{\underline{W}}^{k+j} & \dots & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & \dots & \underline{\underline{W}}^{k+np} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{W}}^{k+j} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{ny} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, np$$

$[\underline{\underline{W}}] = np.ny \times np.ny$. A matriz $\underline{\underline{W}}$ é chamada de matriz de pesos ou, em inglês, “*equal concern*”.

Substituindo a equação (3.24) na equação (3.27):

$$J = (-\underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{e}}')^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} (-\underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{e}}') + \Delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{R}} \Delta \underline{\underline{u}}$$

$$J = (-\Delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{S}}^T + \underline{\underline{e}}'^T) \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} (-\underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{e}}') + \Delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{R}} \Delta \underline{\underline{u}}$$

$$J = \Delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{e}}'^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}} - \Delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{e}}' + \underline{\underline{e}}'^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{e}}' + \Delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{R}} \Delta \underline{\underline{u}}$$

$$J = \Delta \underline{\underline{u}}^T (\underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{R}}) \Delta \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{e}}'^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}} - \Delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{e}}' + \underline{\underline{e}}'^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{e}}'$$

$$\text{Temos que } \underline{\underline{e}}'^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}} = \Delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{e}}'$$

A solução analítica para o problema de otimização com esta função objetivo será:

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{u}}} = 2(\underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{R}}) \Delta \underline{\underline{u}} - 2 \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{e}}' = 0$$

$$\underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{R}} \Delta \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{e}}'$$

$$\Delta \underline{\underline{u}} (\underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{R}}) = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{e}}'$$

$$\Delta \underline{\underline{u}} = (\underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{R}})^{-1} \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{e}}'$$

Mais uma vez, esta solução obtida é para um problema sem restrições nas entradas ou saídas do processo.

3.3. QUADRATIC DYNAMIC MATRIX CONTROL (QDMC)

O QDMC utiliza a mesma equação de predição de saídas do DMC, conforme indicado na equação (3.24), e a mesma função objetivo, conforme indicado na equação (3.27), aqui repetidas para facilidade do leitor. A diferença é que o QDMC considerará restrições nas variáveis controladas e manipuladas e o uso de um *solver* QP (“*Quadratic Programming*”) para resolução do problema de otimização.

$$\underline{e} = -\underline{S} \Delta \underline{u} + \underline{e}' \quad (3.24)$$

$$J = \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e} + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u} \quad (3.27)$$

Substituindo a equação (3.24) na equação (3.27), obtém-se, conforme já desenvolvido, a equação:

$$J = \Delta \underline{u}^T \left(\underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} + \underline{R} \right) \Delta \underline{u} - \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} \Delta \underline{u} - \Delta \underline{u}^T \underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' + \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}'$$

Considerando a igualdade entre $\underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} \Delta \underline{u} = \Delta \underline{u}^T \underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}'$, pode-se escrever:

$$J = \Delta \underline{u}^T \left(\underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} + \underline{R} \right) \Delta \underline{u} - 2 \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} \Delta \underline{u} + \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}'$$

Para o problema de otimização, pode-se abandonar o “*bias*” desta equação, terceiro termo, e, portanto, a função objetivo pode ser tratada como:

$$J = \Delta \underline{u}^T \underbrace{\left(\underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} + \underline{R} \right)}_{\underline{H}} \Delta \underline{u} - 2 \underbrace{\underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S}}_{\underline{C}_f^T} \Delta \underline{u}$$

O QDMC minimiza o seguinte problema:

$$J = \Delta \underline{u}^T \underline{H} \Delta \underline{u} + 2 \underline{C}_f^T \Delta \underline{u}$$

s.a

$$-\Delta \underline{u}_{\max} \leq \Delta \underline{u} \leq \Delta \underline{u}_{\max} \quad (3.28)$$

$$\underline{u}_{\min} \leq \underline{u} \leq \underline{u}_{\max} \quad (3.29)$$

$$\underline{y}_{\min} \leq \underline{y}^C \leq \underline{y}_{\max} \quad (3.30)$$

onde $\underline{H} = \underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} + \underline{R}$ e $\underline{C}_f^T = -\underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S}$

O problema descrito é um problema de otimização com restrições das entradas e dos incrementos calculados para estas entradas. Também podem existir restrições nas variáveis controladas, embora pouco comum por tornar a solução da QP mais difícil, aumentando a possibilidade de uma solução inviável.

3.3.1. SOLVER DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA

O QDMC é resolvido por um “solver” QP que possui a seguinte estrutura básica:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{H} \underline{x} + \underline{C}_f^T \underline{x} \\ \text{s.a.} & \underline{A} \underline{x} - \underline{b} \leq 0 \end{aligned}$$

No *Matlab*, a função utilizada é o QUADPROG. Como o problema deve ser expresso neste formato, as restrições do controlador devem ser colocadas na forma $\underline{A} \underline{x} - \underline{b} \leq 0$.

3.3.1.1. Restrições nas variações das entradas

A restrição (3.28) pode ser dividida em duas restrições:

$$3.3.1.1.1. \quad \Delta \underline{u} \leq \Delta \underline{u}_{\max}$$

Expressando esta restrição no formato exigido pela instrução:

$$\underline{I}_{\text{nu}} \Delta \underline{u} - \Delta \underline{u}_{\max} \leq 0$$

Desta forma

$$\underline{I}_{\text{nu}} = \underline{A}$$

$$\Delta \underline{u}_{\max} = \underline{b}$$

$$\Delta \underline{u} = \underline{x}$$

$$3.3.1.1.2. \quad \Delta \underline{u} \geq -\Delta \underline{u}_{\max}$$

Expressando esta restrição no formato exigido pela instrução

$$-\underline{I}_{\text{nu}} \Delta \underline{u} - \Delta \underline{u}_{\max} \leq 0$$

Desta forma

$$-\underline{I}_{\text{nu}} = \underline{A}$$

$$\Delta \underline{u}_{\max} = \underline{b}$$

$$\Delta \underline{u} = \underline{x}$$

3.3.1.2. Restrições no valor final das entradas, $\underline{u}_{\min} \leq \underline{u} \leq \underline{u}_{\max}$

Para a restrição (3.29), deve-se expressar o valor de u em função de $\Delta \underline{u}$.

O vetor u é composto pelos seguintes m termos:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}(k) \\ \underline{u}(k+1) \\ \vdots \\ \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix}$$

Sabe-se que:

$$\Delta \underline{u}(k) = \underline{u}(k) - \underline{u}(k-1) \Rightarrow \underline{u}(k) = \underline{u}(k-1) + \Delta \underline{u}(k)$$

$$\Delta \underline{u}(k+1) = \underline{u}(k+1) - \underline{u}(k) \Rightarrow \underline{u}(k+1) = \underline{u}(k) + \Delta \underline{u}(k+1)$$

Substituindo a primeira equação, obtém-se:

$$\underline{u}(k+1) = \underline{u}(k-1) + \Delta\underline{u}(k) + \Delta\underline{u}(k+1)$$

Portanto, escrevendo de uma forma genérica:

$$\underline{u}(k+j) = \underline{u}(k-1) + \Delta\underline{u}(k) + \Delta\underline{u}(k+1) + \dots + \Delta\underline{u}(k+j)$$

Transformando as equações obtidas para a forma matricial:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}(k) \\ \underline{u}(k+1) \\ \vdots \\ \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u}(k-1) \\ \underline{u}(k-1) \\ \vdots \\ \underline{u}(k-1) \end{bmatrix}}_{\underline{\bar{u}}(k-1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{I}_{nu} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{I}_{nu} & \underline{I}_{nu} & 0 & \dots & 0 \\ \underline{I}_{nu} & \underline{I}_{nu} & \underline{I}_{nu} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{I}_{nu} & \underline{I}_{nu} & \underline{I}_{nu} & \dots & \underline{I}_{nu} \end{bmatrix}}_{\underline{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\underline{u}(k) \\ \Delta\underline{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta\underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix}}_{\Delta\underline{u}}$$

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}}(k-1) + \underline{N}\Delta\underline{u} \quad (3.31)$$

3.3.1.2.1. $\underline{u} \leq \underline{u}_{\max}$

Substituindo a equação (3.31) nesta restrição, vem

$$\underline{\bar{u}}(k-1) + \underline{N}\Delta\underline{u} \leq \underline{u}_{\max}$$

$$\underline{N}\Delta\underline{u} - (\underline{u}_{\max} - \underline{\bar{u}}(k-1)) \leq 0$$

Desta forma,

$$\underline{N} = \underline{A}$$

$$\underline{u}_{\max} - \underline{\bar{u}}(k-1) = \underline{b}$$

$$\Delta\underline{u} = \underline{x}$$

3.3.1.2.2. $\underline{u}_{\min} \leq \underline{u}$

Substituindo a equação (3.31) nesta restrição, vem

$$\underline{u}_{\min} \leq \underline{\bar{u}}(k-1) + \underline{N}\Delta\underline{u}$$

$$\underline{u}_{\min} - \underline{\bar{u}}(k-1) - \underline{N}\Delta\underline{u} \leq 0$$

$$(-\underline{N})\Delta\underline{u} + \underline{u}_{\min} - \underline{\bar{u}}(k-1) \leq 0$$

$$(-\underline{N})\Delta\underline{u} - [\underline{\bar{u}}(k-1) - \underline{u}_{\min}] \leq 0$$

Desta forma,

$$-\underline{N} = \underline{A}$$

$$\underline{\bar{u}}(k-1) - \underline{u}_{\min} = \underline{b}$$

$$\Delta\underline{u} = \underline{x}$$

3.3.1.3. Restrições nas variáveis controladas, $\underline{y}_{\min} \leq \underline{y}^C \leq \underline{y}_{\max}$

A predição das saídas ao longo do horizonte de predição é dada pela equação (3.23), repetida a seguir:

$$\underline{y}^C = \underline{S} \Delta \underline{u} + \overline{y}_k + \overline{P} \quad (3.23)$$

A restrição não QP foi representada pela equação (3.30).

$$\underline{y}_{\min} \leq \underline{y} \leq \underline{y}_{\max} \quad (3.30)$$

3.3.1.3.1. $\underline{y}^C \leq \underline{y}_{\max}$

Substituindo a equação (3.23) na restrição, vem:

$$\underline{y}^C = \underline{S} \Delta \underline{u} + \overline{y}_k + \overline{P} \leq \underline{y}_{\max}$$

$$\underline{S} \Delta \underline{u} + \overline{y}_k + \overline{P} - \underline{y}_{\max} \leq 0$$

$$\underline{S} \Delta \underline{u} - (\underline{y}_{\max} - \overline{y}_k - \overline{P}) \leq 0$$

Desta forma,

$$\underline{S} = \underline{A}$$

$$\underline{y}_{\max} - \overline{y}_k - \overline{P} = \underline{b}$$

$$\Delta \underline{u} = \underline{x}$$

3.3.1.3.2. $\underline{y}_{\min} \leq \underline{y}^C$

Substituindo a equação (3.23) na restrição,

$$\underline{y}_{\min} \leq \underline{y}^C = \underline{S} \Delta \underline{u} + \overline{y}_k + \overline{P}$$

$$\underline{y}_{\min} - \underline{S} \Delta \underline{u} - \overline{y}_k - \overline{P} \leq 0$$

$$-\underline{S} \Delta \underline{u} - (\overline{y}_k + \overline{P} - \underline{y}_{\min}) \leq 0$$

Desta forma,

$$-\underline{S} = \underline{A}$$

$$\overline{y}_k + \overline{P} - \underline{y}_{\min} = \underline{b}$$

$$\Delta \underline{u} = \underline{x}$$

Concatenando todas as restrições envolvidas, tem-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \underline{x}^T \underline{H} \underline{x} + \underline{C}_f^T \underline{x} \\ \underline{H} = & \underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} + \underline{R} \\ \underline{C}_f^T = & -\underline{e}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} \end{aligned}$$

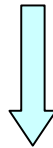
s.a.

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{nu} \\ -\underline{I}_{nu} \\ \underline{N} \\ -\underline{N} \\ \underline{S} \\ -\underline{S} \end{bmatrix} \Delta \underline{u} - \begin{bmatrix} \underline{\Delta u}_{\max} \\ \underline{\Delta u}_{\max} \\ \underline{u}_{\max} - \underline{u}(k-1) \\ \underline{u}(k-1) - \underline{u}_{\min} \\ \underline{y}_{\max} - \underline{y}_k - \underline{P} \\ \underline{y}_k + \underline{P} - \underline{y}_{\min} \end{bmatrix} \leq 0$$

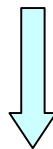
3.4. PREDIÇÃO DO DMC POR MATRIZ DE DESLOCAMENTO – HORIZONTE DE CONTROLE M = 1

Conforme equação (3.23), para a predição da saída, é necessário calcular os efeitos das ações passadas do controlador. Isso impacta em um esforço computacional considerável, devido à existência de um somatório sobre outro somatório, tornando inviável o controle em tempo real.

$$\underline{y}^c = \underline{S} \Delta \underline{u} + \underline{y}_k + \underline{P} \quad (3.23)$$

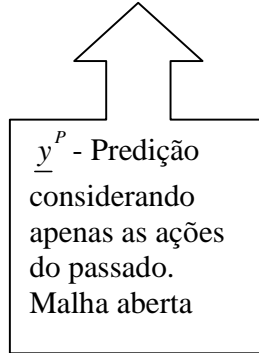


$$\underline{P}_i = \sum_{n=1}^i \phi_n$$



$$\phi_n = \sum_{j=n+1}^N \underline{H}_j \Delta \underline{u}(k+n-j)$$

$$\underline{y}^C = \underline{S} \Delta \underline{u} + \underbrace{\underline{y}_k + \underline{P}} \quad (3.23)$$



Conforme a equação (3.22), desenvolvida anteriormente:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+1}^C \\ \hat{\underline{y}}_{k+2}^C \\ \hat{\underline{y}}_{k+3}^C \\ \vdots \\ \hat{\underline{y}}_{k+np}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_3 & \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{S}_{np} & \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \cdots & \underline{S}_{np-m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \Delta \underline{u}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_k + \underline{P}_1 \\ \hat{\underline{y}}_k + \underline{P}_2 \\ \hat{\underline{y}}_k + \underline{P}_3 \\ \vdots \\ \hat{\underline{y}}_k + \underline{P}_{np} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Para evitar o somatório dentro de outro somatório, Cutler [3] propôs que a predição de $k+1$ no intervalo $k+1$ será a predição de $k+2$ no intervalo k .

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+1}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+2}^P \end{bmatrix}_k$$

Generalizando:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+j}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+j+1}^P \end{bmatrix}_k$$

Além disso, Cutler [3] inseriu a ação de controle, que foi aplicada neste instante k , nas predições futuras feitas a partir do instante seguinte, $k+1$.

Portanto, as predições para o intervalo $k+1$ futuro, considerando apenas a ação aplicada ao processo no instante k , podem ser expressas como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+1}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+2}^P \end{bmatrix}_k + \underline{S}_2 \Delta \underline{u}(k)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+2}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+3}^P \end{bmatrix}_k + \underline{\underline{S}}_3 \underline{\underline{\Delta u}}(k)$$

Generalizando:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+j+1}^P \end{bmatrix}_k + \underline{\underline{S}}_{j+1} \underline{\underline{\Delta u}}(k)$$

As ações que foram aplicadas ao processo no instante $k-1$ e demais instantes passados são consideradas no momento do deslocamento do vetor de predição do instante k para esse novo instante $k+1$.

Escrevendo numa notação matricial, a equação de predição fica expressa como:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \\ \hat{y}_{k+2}^P \\ \hat{y}_{k+3}^P \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+np}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}} \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \\ \hat{y}_{k+2}^P \\ \hat{y}_{k+3}^P \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+np}^P \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_1 \\ \underline{\underline{S}}_2 \\ \underline{\underline{S}}_3 \\ \vdots \\ \underline{\underline{S}}_{np} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{S}}} \underline{\underline{\Delta u}}(k) \quad (3.32 \text{ A})$$

$$\hat{y}_{k+1}^P = \underline{\underline{M}} \hat{y}_k^P + \underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\Delta u}}(k) \quad (3.33 \text{ A})$$

$\underline{\underline{M}}$ - matriz que translada o vetor \hat{y}_k^P do instante k para o instante $k+1$,

$$[\underline{\underline{M}}] = np.ny \times np.ny.$$

$\underline{\underline{S}}$ - “vetor” que considera o efeito da ação de controle no instante k em todos os instantes seguintes da predição. Esta ação, deslocada em um instante, é somada ao vetor de predição, também deslocado, $[\underline{\underline{S}}] = np.ny \times nu$.

$\underline{\underline{\Delta u}}(k)$ - vetor de entradas aplicadas no instante atual. Observe que, como esse item trata de $m = 1$, apenas o primeiro conjunto de entradas, dos m conjuntos calculados, é considerado, $[\underline{\underline{\Delta u}}(k)] = nu \times 1$. Mais a frente, será expandida para as m ações de controle futuras.

Pode-se observar na equação (3.32) que $\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+np}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+np-1}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+np}^P \end{bmatrix}_k$, pois a última linha é igual à penúltima linha. Esta aproximação é válida a partir do momento em que, ao final do horizonte de predição, as variáveis tenham atingido a estabilização, o que é válido para sistemas autorreguladores.

A equação (3.33) deve ser corrigida com relação a erros no modelo ou perturbações ocorridas na planta. Esta correção é feita a partir da diferença entre o valor estimado e o valor lido da planta no instante atual. Como se supõe que o instante atual seja $k+1$ e o vetor

predição dos instantes futuros para este intervalo ainda se encontra em construção, tem-se que:

$$\underline{d}_{k+1} = \hat{\underline{y}}_{k+1} - \left\{ \left[\hat{\underline{y}}_{k+1}^P \right]_k + \underline{S}_1 \underline{\Delta u}(k) \right\}$$

onde:

$\hat{\underline{y}}_{k+1}$ - valor lido da planta no instante $k+1$

$\left\{ \left[\hat{\underline{y}}_{k+1}^P \right]_k + \underline{S}_1 \underline{\Delta u}(k) \right\}$ - predição da planta, feita no instante anterior k , com a ação de

controle.

O DMC supõe que o erro seja o mesmo para todo horizonte de predição. Portanto,

$$\hat{\underline{y}}_{k+1}^C = \hat{\underline{y}}_{k+1}^P + \underline{d}(k+1) \quad (3.34)$$

Com a correção da predição, o deslocamento indicado na equação (3.32A) e (3.33A) passa a ser realizado no vetor corrigido do instante k , conforme equações (3.32) e (3.33):

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+1}^P \\ \hat{\underline{y}}_{k+2}^P \\ \hat{\underline{y}}_{k+3}^P \\ \vdots \\ \hat{\underline{y}}_{k+np}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+1}^C \\ \hat{\underline{y}}_{k+2}^C \\ \hat{\underline{y}}_{k+3}^C \\ \vdots \\ \hat{\underline{y}}_{k+np}^C \end{bmatrix}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ \underline{S}_2 \\ \underline{S}_3 \\ \vdots \\ \underline{S}_{np} \end{bmatrix}}_{\underline{S}} \Delta \underline{u}(k) \quad (3.32)$$

$$\hat{\underline{y}}_{k+1}^P = \underline{M} \hat{\underline{y}}_k^C + \underline{M} \underline{S} \underline{\Delta u}(k) \quad (3.33)$$

Substituindo a equação (3.33) na equação (3.34), vem:

$$\hat{\underline{y}}_{k+1}^C = \underline{M} \hat{\underline{y}}_k^C + \underline{M} \underline{S} \underline{\Delta u}(k) + \underline{d}(k+1) \quad (3.35)$$

onde:

$$\underline{d}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{d}_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{y}}_{k+1}^C = \underline{M} \left\{ \hat{\underline{y}}_k^C + \underline{S} \underline{\Delta u}(k) \right\} + \underline{d}(k+1)$$

Substituindo as matrizes $\underline{\underline{M}}$ e $\underline{\underline{S}}$, indicadas na equação (3.32), vem:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \\ \hat{y}_{k+2}^C \\ \hat{y}_{k+3}^C \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+np}^C \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \\ \hat{y}_{k+2}^C \\ \hat{y}_{k+3}^C \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+np}^C \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_1 \\ \underline{\underline{S}}_2 \\ \underline{\underline{S}}_3 \\ \vdots \\ \underline{\underline{S}}_{=np} \end{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) + \begin{bmatrix} \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{d}_{k+1} \end{bmatrix}$$

3.5. PREDIÇÃO DO DMC POR MATRIZ DE DESLOCAMENTO – HORIZONTE DE CONTROLE M GENÉRICO

Se considerarmos uma ação de controle, além da ação aplicada em k , ou seja, $m = 2$, essa ação adicional, na predição de $k+1$ em $k+1$, estará com uma resposta de processo igual a S_1 neste momento. Logo, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^P \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+2}^C \end{bmatrix}_k + \underline{\underline{S}}_2 \Delta \underline{u}(k) + \underline{\underline{S}}_1 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{d}_{k+1}$$

Escrevendo essa predição na forma matricial para diversos momentos de predição:

$$\text{onde } \bar{\underline{d}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{d}_{k+1} \end{bmatrix}$$

Se o horizonte de controle for m genérico e para um instante $j=m-1$ em relação ao tempo $k+1$, que em relação ao instante k atual representa o instante m , a predição será:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+m-1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+m} \end{bmatrix}_k + \underline{S}_{\underline{m}} \underline{\Delta u}(k) + \underline{S}_{\underline{m-1}} \underline{\Delta u}(k+1) + \underline{S}_{\underline{m-2}} \underline{\Delta u}(k+2) + \dots + \underline{S}_{\underline{1}} \underline{\Delta u}(k+m-1) + \underline{d}_{k+1}$$

Para o instante $j=m$:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+m} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+m+1} \end{bmatrix}_k + \underline{S}_{\underline{m+1}} \underline{\Delta u}(k) + \underline{S}_{\underline{m}} \underline{\Delta u}(k+1) + \underline{S}_{\underline{m-1}} \underline{\Delta u}(k+2) + \dots + \underline{S}_{\underline{2}} \underline{\Delta u}(k+m-1) + \underline{d}_{k+1}$$

De uma forma geral, o índice de S será o instante genérico $j+1$ subtraído do número da ordem com que a ação de controle é aplicada considerando o horizonte de controle m .

Para um instante genérico j :

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+j} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+j+1} \end{bmatrix}_k + \underline{S}_{\underline{j+1}} \underline{\Delta u}(k) + \underline{S}_{\underline{j}} \underline{\Delta u}(k+1) + \underline{S}_{\underline{j-1}} \underline{\Delta u}(k+2) + \dots + \underline{S}_{\underline{j-m+2}} \underline{\Delta u}(k+m-1) + \underline{d}_{k+1}$$

Portanto, para o instante $j=np-1$:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+np-1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+np} \end{bmatrix}_k + \underline{S}_{\underline{np}} \underline{\Delta u}(k) + \underline{S}_{\underline{np-1}} \underline{\Delta u}(k+1) + \underline{S}_{\underline{np-2}} \underline{\Delta u}(k+2) + \dots + \underline{S}_{\underline{np-m+1}} \underline{\Delta u}(k+m-1) + \underline{d}_{k+1}$$

Para o instante $j=np$, essa penúltima linha é copiada, de forma que:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+np} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+np+1} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}_{k+np} \end{bmatrix}_k$$

Dessa forma, para um conjunto genérico de m ações de controle, a predição do DMC de Cutler pode ser representada como:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \\ \hat{y}_{k+2}^C \\ \hat{y}_{k+3}^C \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+np}^C \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \\ \hat{y}_{k+2}^C \\ \hat{y}_{k+3}^C \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+np}^C \end{bmatrix}_k + \\
 \begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_3 & \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \underline{S}_{np-3} & \underline{S}_{np-4} & \cdots & \underline{S}_{np-m} \\ \underline{S}_{np} & \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \underline{S}_{np-3} & \cdots & \underline{S}_{np-m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \Delta \underline{u}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-2) \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{d}_{k+1} \end{bmatrix} \\
 (3.35B)
 \end{aligned}$$

Escrevendo a equação (3.35B) na forma vetorial:

$$\hat{y}_{k+1}^C = \underline{\underline{M}} \hat{y}_k^C + \underline{\underline{M}} \underline{\underline{D}} \Delta \underline{u}_k + \underline{\underline{d}}(k+1) \quad (3.35C)$$

onde:

$$\underline{\underline{D}}_M = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_3 & \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \underline{S}_{np-3} & \underline{S}_{np-4} & \cdots & \underline{S}_{np-m} \\ \underline{S}_{np} & \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \underline{S}_{np-3} & \cdots & \underline{S}_{np-m-1} \end{bmatrix}, \quad [\underline{\underline{D}}_M] = np.ny \times m.nu$$

$$\Delta \underline{u}_k = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1|k) \end{bmatrix},$$

$$\underline{d}_{k+1} = \hat{y}_{k+1}^C - \left\{ \left[\hat{y}_{k+1}^P \right]_k + \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k) \right\}, \quad \underline{\underline{d}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \underline{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{d}_{k+1} \end{bmatrix}$$

3.6. DMC COM O USO DE MATRIZ AUXILIAR $\underline{\theta}$

A predição da variável é feita até o horizonte de predição np . No entanto, independente do valor de sintonia de np , o tempo de estabilização das variáveis de controle é N , período de estabilização. E, no momento em que se levantam os modelos a partir da resposta ao degrau, aguarda-se a estabilização das variáveis levantadas. Dessa forma, a matriz dinâmica S tem, normalmente, a dimensão de N linhas.

O vetor de predição pode ser construído considerando todo o período de estabilização. No entanto, o intervalo $N-np$ será desconsiderado da predição, através do uso de uma matriz auxiliar $\underline{\theta}$, definida como:

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{np.ny} & \underline{0}_{np.ny \times (N-np).ny} \end{bmatrix}, \quad [\underline{\theta}] = np.ny \times N.ny$$

A matriz $\underline{\theta}$, portanto, faz uma compatibilização para adequar as dimensões das matrizes envolvidas na predição, permitindo um horizonte de predição no diferente do horizonte de estabilização N da planta.

Da equação (3.23):

$$[\underline{y}^C]_k = \underline{S} \Delta \underline{u} + \underbrace{[\underline{y}_k + \underline{P}]}_{[y^P]_k} \quad (3.23)$$

$$[\underline{y}^C]_k = \underline{S} \Delta \underline{u} + [y^P]_k \quad (3.36)$$

Utilizando a matriz auxiliar na equação (3.35):

$$[\underline{y}^C]_k = \underline{\theta} [\underline{S} \Delta \underline{u} + [y^P]_k] \quad (3.37)$$

Analisando as dimensões da equação (3.37):

$[\underline{S}] = N.ny \times m.nu$ - Note que a matriz dinâmica passa a ter a dimensão do período de estabilização, independente de valores sintonizados para np .

$$[\Delta \underline{u}] = m.nu \times 1$$

$$[y^P]_k = N.ny \times 1$$

$$[\underline{\theta}] = np.ny \times N.ny$$

$$[\underline{y}^C]_k = np.ny \times 1$$

A função erro, a ser calculada pela função objetivo, será:

$$\underline{e} = \underline{y}^{SP} - [\underline{y}^C]_k$$

Substituindo a equação (3.37) na definição do erro, vem:

$$\underline{e} = \underline{y}^{SP} - \underline{\theta} \left[\underline{S} \Delta \underline{u} + \left[y^P \right]_k \right] = \underline{y}^{SP} - \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} - \underline{\theta} \left[y^P \right]_k$$

$$\underline{e} = \underbrace{\underline{y}^{SP} - \underline{\theta} \left[y^P \right]_k}_{\underline{e}'} - \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u}$$

\underline{e}' - erros que independem da ação de controle

Logo,

$\underline{e} = \underline{e}' - \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u}$, que é similar a equação (3.24).

$$\left[\underline{\theta} \right] = np.ny \times N.ny$$

$$\left[\underline{S} \right] = N.ny \times m.nu$$

$$\left[\Delta \underline{u} \right] = m.nu \times 1$$

$$\left[\underline{e}' \right] = \left[\underline{e} \right] = np.ny \times 1 \quad (3.38)$$

3.6.1. FUNÇÃO OBJETIVO DO DMC COM O USO DA MATRIZ AUXILIAR θ

A função objetivo, como visto em (3.24), mas utilizando a equação (3.38):

$$\underline{e} = \underline{e}' - \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} \quad (3.38)$$

$$J = \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u} \quad (3.27)$$

Substituindo a equação (3.38) na equação (3.27), obtém-se:

$$J = \left(\underline{e}' - \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} \right)^T \underline{W}^T \underline{W} \left(\underline{e}' - \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} \right) + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u}$$

$$J = \left(\underline{e}'^T - \Delta \underline{u}^T \underline{S}^T \underline{\theta}^T \right) \underline{W}^T \underline{W} \left(\underline{e}' - \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} \right) + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u}$$

$$J = \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' - \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} - \Delta \underline{u}^T \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' + \Delta \underline{u}^T \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u}$$

Considerando a igualdade entre $\underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} = \Delta \underline{u}^T \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}'$, pode-se escrever:

$$J = \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' - 2 \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} + \Delta \underline{u}^T \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u}$$

$$J = \Delta \underline{u}^T \left(\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R} \right) \Delta \underline{u} - 2 \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} \Delta \underline{u} + \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' \quad (3.39)$$

Para o problema de otimização, pode-se abandonar o “bias” desta equação e, portanto, a função objetivo pode ser tratada como

$$J = \Delta \underline{u}^T \underbrace{\left(\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R} \right)}_{\underline{H}} \Delta \underline{u} - 2 \underbrace{\underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S}}_{\underline{c}_f'} \Delta \underline{u}$$

Consequentemente, o problema objetivo a ser resolvido pelo QDMC será:

$$J = \Delta \underline{u}^T \underline{H} \Delta \underline{u} + 2C_f^T \Delta \underline{u} \quad (3.40)$$

onde

$$\underline{H} = \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R}$$

$$C_f^T = -\underline{e}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S}$$

O controlador QDMC calcula a cada instante um conjunto de ações de controle m , $\Delta \underline{u} = [\Delta \underline{u}(k) \quad \dots \quad \Delta \underline{u}(k+m-1)]^T$, que minimizam a função objetivo J , sujeita a restrições nas entradas, definidas como $-\Delta \underline{u}_{\max} \leq \Delta \underline{u} \leq \Delta \underline{u}_{\max}$ e $\underline{u}_{\min} \leq \underline{u} \leq \underline{u}_{\max}$. Apenas a primeira ação é implementada no processo e, no instante $k+1$ seguinte, a sequência de cálculo é repetida.

O fluxograma indicado na figura (3.2) mostra esta sequência de ações do MPC.

Nesta sequência, e' representa o erro do instante atual entre setpoint e a predição das saídas. Este erro é levado à função objetivo e são calculados os valores de entrada da planta que minimizam esta função. O primeiro valor calculado para cada variável manipulada é aplicado ao processo e a predição, para os instantes futuros, é calculada considerando a ação de controle aplicada neste intervalo. No instante seguinte, é feita a leitura das variáveis controladas da planta e o erro entre a predição e os valores obtidos da planta é estendido ao longo de todo horizonte de predição np , atualizando a predição (\hat{y}_{k+1}^c).

O vetor predição é então deslocado em um instante, através da matriz auxiliar M e considerando a correção da predição do intervalo anterior.

3.7. LDMC – LINEAR DYNAMIC MATRIX CONTROL

Considerando a minimização da função objetivo J sem restrições, o valor ótimo estará no ponto de derivada nulo. A função objetivo foi definida para o QDMC como a indicada na equação (3.39), a seguir repetida:

$$J = \Delta \underline{u}^T \left(\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R} \right) \Delta \underline{u} - 2\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' \Delta \underline{u} + \underline{e}'^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' \quad (3.39)$$

Desta forma,

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{u}} = 2 \left(\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R} \right) \Delta \underline{u} - 2\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' \quad (3.41)$$

Se não houver restrições, o ponto ótimo estará nos valores de $\Delta \underline{u}$ que anulam esta derivada.

Com restrições nos valores de $\Delta \underline{u}$, o ponto ótimo, dentro da região viável, pode ficar fora do ponto de máximo ou mínimo, ponto de derivada nula. Nessa situação, esse ponto passa a se chamar de uma solução sub-ótima do problema de otimização.

Portanto, equação (3.41) passa a não ser mais nula e, pode-se escrever:

$$\left(\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R} \right) \Delta \underline{u} - \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' = \underline{\rho}$$

onde $\underline{\rho} = [\rho_1 \quad \rho_1 \quad \dots \quad \rho_{nu.m}]^T$ é definido como resíduo.

O LDMC terá como objetivo:

$$\min_{\Delta \underline{u}} \phi = \sum_{i=1}^{m.nu} v_i |\rho_i| \quad (3.42),$$

onde v_i são pesos associados a $\underline{\rho}$. Como $\underline{\rho}$ não tem um significado físico, os pesos associados v_i normalmente são definidos como valores unitários.

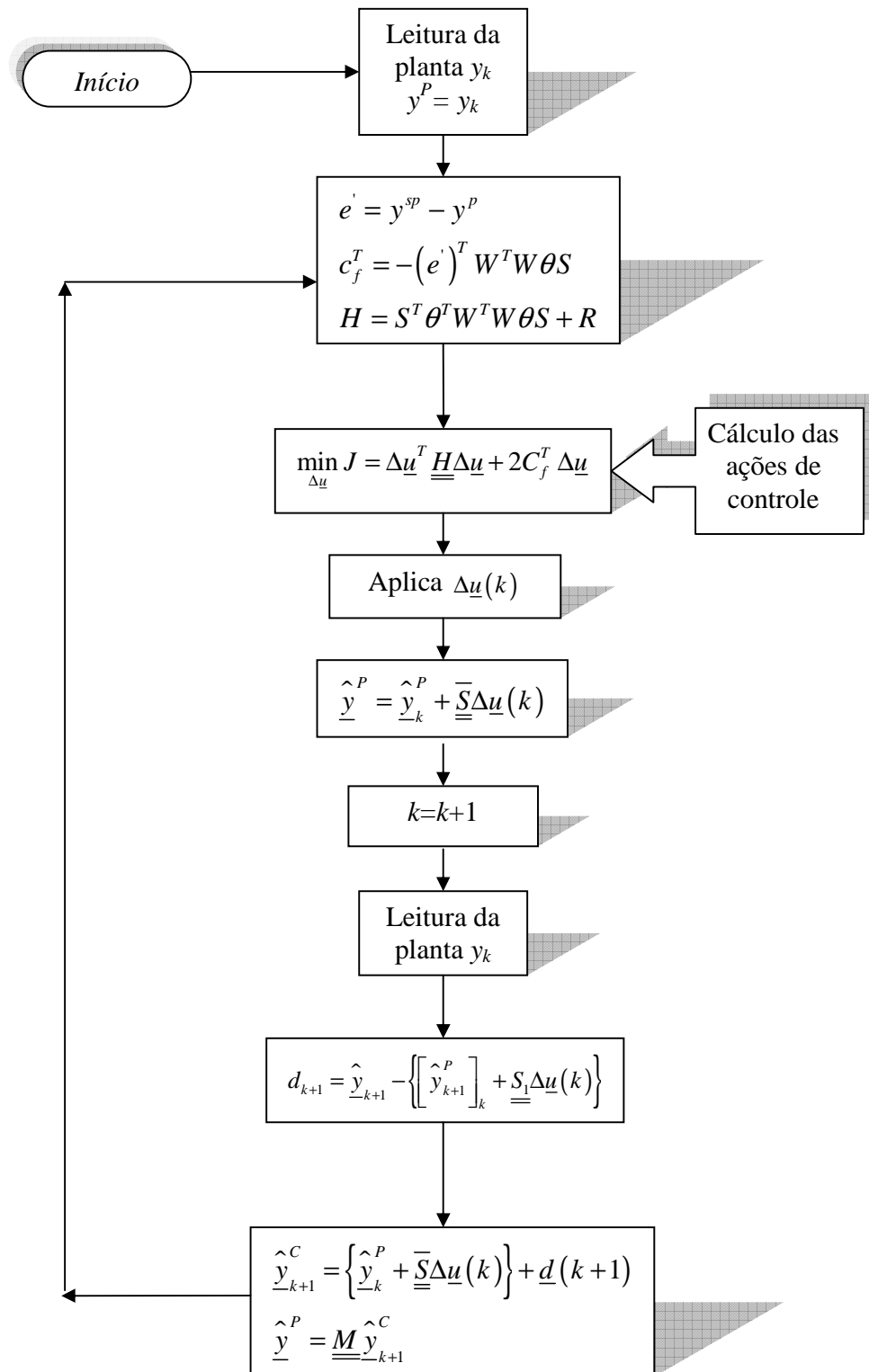


Figura 3.2 – Algoritmo para o QDMC

A função objetivo definida em (3.42) não é linear, por conta do operador de valor absoluto, não podendo, portanto, ser resolvida por um programa LP. Para tornar esta função linear, pode-se fazer uma mudança de variáveis da seguinte forma:

$$\rho_i = x_i - z_i \text{ onde } x_i \geq 0; z_i \geq 0;$$

Para as variáveis auxiliares x_i e z_i , adota-se a seguinte definição:

$$\rho_i \leq 0 \Rightarrow x_i = 0 \Rightarrow z_i = -\rho_i$$

$$\rho_i > 0 \Rightarrow z_i = 0 \Rightarrow x_i = \rho_i$$

Portanto, pode-se escrever:

$$|\rho_i| = x_i + z_i$$

Desta forma, a função objetivo, definida em (3.42), torna-se:

Problema

$$\min_{\Delta u} \phi = \sum_{i=1}^{m.nu} v_i (x_i + z_i)$$

sujeito a

$$\underline{\rho} = x_i - z_i = \left(\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R} \right) \Delta u - \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}'$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u \leq \Delta u_{\max}$$

$$\underline{u}_{\min} \leq \underline{u} \leq \underline{u}_{\max}$$

$$x_i \geq 0; z_i \geq 0;$$

Pode-se observar que, neste problema, as restrições e a função objetivo são lineares, caracterizando um problema de programação linear (LP).

Outra observação que pode ser feita é que se não ocorrer nenhuma restrição ativa, os resultados obtidos pelo DMC, QDMC e LDMC serão idênticos. Neste caso, o ganho do controlador, definido como K_{DMC} será:

$\underline{\rho} = x_i - z_i = \left(\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R} \right) \Delta u - \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' = 0$, pois não existem restrições ativas.

$$\left(\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R} \right) \Delta u = \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}'$$

$$\Delta u = \underbrace{\left(\underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{\theta} \underline{S} + \underline{R} \right)^{-1}}_{K_{DMC}} \underline{S}^T \underline{\theta}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}'$$

$$\Delta u = \underline{K}_{DMC} \underline{e}'$$

Como a lei de controle está expressa em função de Δu , um erro constante gera uma ação em rampa, característica de uma ação integradora do MPC.

Colocando a ação de controle em uma notação expandida:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} & \cdots & \underline{K}_{1N} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} & \cdots & \underline{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{K}_{m1} & \underline{K}_{m2} & \cdots & \underline{K}_{mN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}'(k+1) \\ \underline{e}'(k+2) \\ \vdots \\ \underline{e}'(k+N) \end{bmatrix}$$

A matriz de ganhos terá dimensão $m.nu \times N.ny$.

Apenas a primeira ação, $\Delta \underline{u}(k) = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} & \cdots & \underline{K}_{1N} \end{bmatrix} \underline{e}'$, é aplicada ao processo.

Normalmente o LDMC é mais lento que o QDMC devido à necessidade de linearização da função objetivo.

3.8. MPC EM MALHA FECHADA

Retornando a expressão da predição do DMC por matriz de realinhamento para um horizonte de controle unitário, representada na equação (3.35):

$$\hat{\underline{y}}_{k+1}^C = \underline{M} \hat{\underline{y}}_k^C + \underline{M} \underline{S} \Delta \underline{u}(k) + \underline{d}(k+1) \quad (3.35)$$

A equação (3.35) pode ser vista como uma representação em variáveis de estado do tipo:

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) = \underline{C} \underline{x}(k) \end{cases}$$

onde:

\underline{A} é definido como matriz de estados

\underline{B} é a matriz de entradas

\underline{C} é a matriz de saídas

Considerando que, através de uma comparação entre a equação (3.35) e a representação padronização da equação em espaço de estado, o estado possa ser representado pela predição das saídas controladas, a matriz de saídas será:

$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & 0_{ny} & \cdots & 0_{ny} \end{bmatrix}$, onde a dimensão de $[\underline{C}] = ny \times ny.ny$. Neste caso, apenas as primeiras ny posições do vetor de predição $\underline{x}(k)$ serão aproveitadas.

Escrevendo a equação de desvio para a correção em uma notação similar à do espaço de estado:

$$\underline{d}(k+1) = \underline{y}_{k+1} - \hat{\underline{y}}_{k+1}^C = \underline{C} \left(\underline{\bar{y}}_k + \underline{\bar{S}}_P \Delta \underline{u}(k) \right) - \underline{C} \left(\hat{\underline{y}}_k^C + \underline{\bar{S}} \Delta \underline{u}(k) \right)$$

onde:

$\underline{\bar{y}}_k$ - vetor dos valores atuais de saída da planta no instante k , estendido a todos os instantes do horizonte de predição, ou seja, $\underline{\bar{y}}_k = \begin{bmatrix} \underline{y}_k & \underline{y}_k & \cdots & \underline{y}_k \end{bmatrix}^T$, $[\underline{\bar{y}}_k] = ny \times N$

$\underline{\bar{S}}_P = \begin{bmatrix} \underline{S}_{P1} & \underline{S}_{P2} & \cdots & \underline{S}_{PN} \end{bmatrix}^T$ - modelo real da planta

$\underline{\underline{S}}$ - modelo da planta configurado no controlador

$\underline{\underline{y}}_k + \underline{\underline{S}}_P \Delta \underline{\underline{u}}(k)$ - valor lido da planta, considerando ação de controle do instante k , para predição da saída no instante $k+1$

$\underline{\underline{y}}_k^C + \underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}}(k)$ - predição do modelo do controlador considerando a ação de controle do instante k e a predição corrigida neste instante.

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}}_{ny} & \underline{\underline{0}}_{ny} & \dots & \underline{\underline{0}}_{ny} \end{bmatrix}$$

Substituindo o vetor desvio d pela equação (3.35):

$$\underline{\underline{y}}_{k+1}^C = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{y}}_k^C + \underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}}(k) + K_F \left\{ \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{y}}_k + \underline{\underline{S}}_P \Delta \underline{\underline{u}}(k)) - \underline{\underline{C}} (\underline{\underline{y}}_k^C + \underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}}(k)) \right\} \quad (3.36)$$

onde:

$K_F = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}}_{ny} & \underline{\underline{I}}_{ny} & \dots & \underline{\underline{I}}_{ny} \end{bmatrix}^T$ é o observador de estados, responsável por transformar as leituras da planta em estado. Neste caso, o observador de estados tem um ganho unitário, matriz identidade. $[K_F] = ny.N \times ny$

$$\underline{\underline{y}}_k^C - \text{predição das saídas no instante } k, \text{ ou seja, } \underline{\underline{y}}_k^C = \begin{bmatrix} \underline{\underline{y}}_{k+1}^C & \underline{\underline{y}}_{k+2}^C & \dots & \underline{\underline{y}}_{k+N}^C \end{bmatrix}^T$$

Manipulando algebricamente a equação (3.36):

$$\underline{\underline{y}}_{k+1}^C = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{y}}_k^C + \underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}} \Delta \underline{\underline{u}}(k) + K_F \underline{\underline{C}} \underline{\underline{y}}_k + K_F \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}_P \Delta \underline{\underline{u}}(k) - K_F \underline{\underline{C}} \underline{\underline{y}}_k^C - K_F \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}_P \Delta \underline{\underline{u}}(k)$$

$$\underline{\underline{y}}_{k+1}^C = (\underline{\underline{M}} - K_F \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{y}}_k^C + (\underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}} + K_F \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}_P - K_F \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}) \Delta \underline{\underline{u}}(k) + K_F \underline{\underline{C}} \underline{\underline{y}}_k$$

$$\underline{\underline{y}}_{k+1}^C = (\underline{\underline{M}} - K_F \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{y}}_k^C + (\underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}} - K_F \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}_P]) \Delta \underline{\underline{u}}(k) + K_F \underline{\underline{C}} \underline{\underline{y}}_k \quad (3.37)$$

Para a predição da planta, não há necessidade de correção. Portanto, a equação (3.36) fica simplificada a:

$$\underline{\underline{y}}_{k+1} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{y}}_k + \underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}}_P \Delta \underline{\underline{u}}(k) \quad (3.38)$$

O sistema completo, que engloba o controlador e a planta, considera as equações (3.37) e (3.38) e pode ser representado de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{y}}_k^C \\ \underline{\underline{y}}_k \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} (\underline{\underline{M}} - K_F \underline{\underline{C}}) & K_F \underline{\underline{C}} \\ 0 & \underline{\underline{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{y}}_k^C \\ \underline{\underline{y}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}} - K_F \underline{\underline{C}} [\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}_P] \\ \underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}}_P \end{bmatrix} \Delta \underline{\underline{u}}(k) \quad (3.39)$$

O sistema indicado na equação (3.39) representa, portanto, a planta e o modelo utilizado pelo DMC.

Subtraindo o vetor $\begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} & \underline{y}^{SP} \end{bmatrix}^T$ de ambos os membros da equação (3.39)

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} \\ \underline{y}^{SP} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} \\ \underline{y}^{SP} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\underline{M} - K_F \underline{C}) & K_F \underline{C} \\ 0 & \underline{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y} \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \underline{M} \underline{S} - K_F \underline{C} [\underline{S} - \underline{S}_P] \\ \underline{M} \underline{S}_P \end{bmatrix} \Delta \underline{u}(k)$$

Como $\underline{y}^{SP} = \underline{M} \underline{y}^{SP T}$, pode-se escrever essa igualdade da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} \\ \underline{y}^{SP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{M} - K_F \underline{C}) & K_F \underline{C} \\ 0 & \underline{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} \\ \underline{y}^{SP} \end{bmatrix}, \text{ pois, desenvolvendo essa multiplicação proposta,}$$

vem:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} \\ \underline{y}^{SP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{M} - K_F \underline{C}) & K_F \underline{C} \\ 0 & \underline{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} \\ \underline{y}^{SP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{M} - K_F \underline{C}) \underline{y}^{SP} + K_F \underline{C} \underline{y}^{SP} \\ \underline{M} \underline{y}^{SP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{M} \underline{y}^{SP} \\ \underline{M} \underline{y}^{SP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} \\ \underline{y}^{SP} \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} - \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}^{SP} - \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{M} - K_F \underline{C}) & K_F \underline{C} \\ 0 & \underline{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}^{SP} - \hat{\underline{y}}^C \\ \underline{y}^{SP} - \underline{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{M} \underline{S} - K_F \underline{C} [\underline{S} - \underline{S}_P] \\ \underline{M} \underline{S}_P \end{bmatrix} \Delta \underline{u}(k)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{e}' \\ \underline{e} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} (\underline{M} - K_F \underline{C}) & K_F \underline{C} \\ 0 & \underline{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}' \\ \underline{e} \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \underline{M} \underline{S} - K_F \underline{C} [\underline{S} - \underline{S}_P] \\ \underline{M} \underline{S}_P \end{bmatrix} \Delta \underline{u}(k)$$

Suponha que, para este sistema, fosse utilizado o DMC, onde não existem restrições ativas e a lei de controle é dada por $\Delta \underline{u} = \underline{K}_{DMC} \underline{e}'$. Substituindo essa lei de controle:

$$\begin{bmatrix} \underline{e}' \\ \underline{e} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} (\underline{M} - K_F \underline{C}) & K_F \underline{C} \\ 0 & \underline{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}' \\ \underline{e} \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \underline{M} \underline{S} - K_F \underline{C} [\underline{S} - \underline{S}_P] \\ \underline{M} \underline{S}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{K}_{DMC} \underline{e}' \\ \underline{K}_{DMC} \underline{e} \end{bmatrix}_k$$

$$\begin{bmatrix} \underline{e}' \\ \underline{e} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} (\underline{M} - K_F \underline{C}) & K_F \underline{C} \\ 0 & \underline{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}' \\ \underline{e} \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \{\underline{M} \underline{S} - K_F \underline{C} [\underline{S} - \underline{S}_P]\} \underline{K}_{DMC} & \{\underline{M} \underline{S} - K_F \underline{C} [\underline{S} - \underline{S}_P]\} \underline{K}_{DMC} \\ \underline{M} \underline{S}_P \underline{K}_{DMC} & \underline{M} \underline{S}_P \underline{K}_{DMC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}' \\ \underline{e} \end{bmatrix}_k$$

Colocando o vetor erro em evidência:

$$\begin{bmatrix} \underline{e}' \\ \underline{e} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} (\underline{M} - K_F \underline{C}) - \{\underline{M} \underline{S} - K_F \underline{C} [\underline{S} - \underline{S}_P]\} \underline{K}_{DMC} & K_F \underline{C} - \{\underline{M} \underline{S} - K_F \underline{C} [\underline{S} - \underline{S}_P]\} \underline{K}_{DMC} \\ -\underline{M} \underline{S}_P \underline{K}_{DMC} & \underline{M} - \underline{M} \underline{S}_P \underline{K}_{DMC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e}' \\ \underline{e} \end{bmatrix}_k \quad (3.40)$$

$$\underline{x}(k+1) = A_{CL} \underline{x}(k)$$

A equação representada por (3.40) representa o modelo em espaço de estado da malha fechada. Para estudar a estabilidade deste sistema em malha fechada, basta a análise dos autovalores da matriz A_{CL} . Se os autovalores estiverem dentro do círculo unitário, o sistema é estável. Para isso, devem-se ajustar K_F e K_{DMC} de forma a garantir esta estabilidade desejada.

CONCLUSÃO: O ganho do controlador e o observador de estados interferem na estabilidade da malha fechada.

4. CONTROLADOR MPC EM DUAS CAMADAS

Um MPC pode apresentar uma camada de otimização simples que define os objetivos da camada dinâmica, descrita anteriormente como DMC, QDMC e LDMC, e define os valores ideais para as variáveis manipuladas, aqui descrita como “*ideal resting value*” ou, simplesmente, *irv*. Esta camada de otimização define estados estacionários da planta enquanto que a camada interna de MPC define a dinâmica da planta para atingir um novo estado estacionário.

A figura 4.1 mostra a interação entre estas duas camadas.

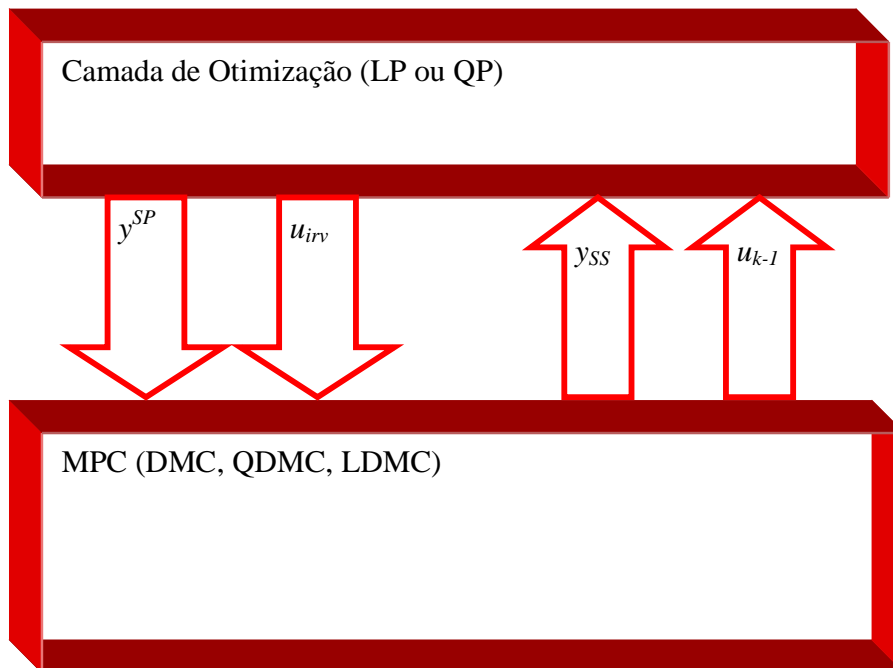


Figura 4.1

Na figura 4.1 pode-se definir:

y_{SS} : valor correspondente ao valor de y_{k+N}^p , ou seja, novos valores em regime permanente desejado para as variáveis controladas

u_{irv} : valor da variável manipulada que obtém a otimização. Esse valor é importante, pois, influencia no custo de operação da unidade, por exemplo.

A equação de previsão de saída de um MPC, mostrada no capítulo anterior na equação (3.22) e, para facilidade do leitor, rerepresentada abaixo, contém em sua última linha a informação de estado estacionário quando o parâmetro np tende a infinito.

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \\ \hat{y}_{k+2}^C \\ \hat{y}_{k+3}^C \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+np}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & \mathbf{0}_{ny \times nu} & \mathbf{0}_{ny \times nu} & \cdots & \mathbf{0}_{ny \times nu} \\ \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & \mathbf{0}_{ny \times nu} & \cdots & \mathbf{0}_{ny \times nu} \\ \underline{S}_3 & \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & \cdots & \mathbf{0}_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{S}_{np} & \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \cdots & \underline{S}_{np-m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \Delta \underline{u}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{y}_k + \underline{P}_1 \\ \hat{y}_k + \underline{P}_2 \\ \hat{y}_k + \underline{P}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_k + \underline{P}_{np} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\hat{y}_{k+np}^C = \begin{bmatrix} \underline{S}_{np} & \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \cdots & \underline{S}_{np-m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \Delta \underline{u}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \hat{y}_k + \underline{P}_{np}$$

No instante $k = \infty$:

$$\hat{y}_{k+\infty}^C = \begin{bmatrix} \underline{S}_{\infty} & \underline{S}_{\infty-1} & \underline{S}_{\infty-2} & \cdots & \underline{S}_{\infty-m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \Delta \underline{u}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \hat{y}_k + \underline{P}_{\infty}$$

Contudo $\underline{S}_{\infty} = \underline{S}_N$ e $\hat{y}_k + \underline{P}_{\infty} = \hat{y}_k + \underline{S}_N \Delta \underline{u} = \underline{y}_{k+N}^P$, que é a predição para as variáveis controladas sem as m ações futuras de controle, e considerando apenas as entradas aplicadas no passado ao processo.

Portanto:

$$\hat{y}_{k+\infty}^C = \begin{bmatrix} \underline{S}_N & \underline{S}_N & \underline{S}_N & \cdots & \underline{S}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \Delta \underline{u}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \underline{y}_{k+N}^P$$

Colocando-se \underline{S}_N em evidência:

$$\hat{y}_{k+\infty}^C = \underline{S}_N \sum_{i=0}^{m-1} \Delta \underline{u}(k+i) + \underline{y}_{k+N}^P$$

O somatório pode ser indicado como

$$\sum_{i=0}^{m-1} \Delta \underline{u}(k+i) = \Delta \underline{u}(k) + \Delta \underline{u}(k+1) + \cdots + \Delta \underline{u}(k+m-1) = \underline{u}(k+m-1) - \underline{u}(k-1)$$

Desta forma:

$$\hat{y}_{k+\infty}^C = \underline{S}_{\underline{N}} [\underline{u}(k+m-1) - \underline{u}(k-1)] + \underline{y}_{k+N}^P \quad (4.1)$$

A camada interna do MPC está preocupada com a dinâmica para se atingir o *setpoint* definido pela camada externa, tendo como índice o somatório quadrático dos erros durante o horizonte de predição do controlador.

A camada externa de otimização está preocupada em definir esse *setpoint*, também chamado de *target*, observando, normalmente, aspectos econômicos.

A equação (4.1) corresponde ao ganho estático do modelo do processo.

$$\hat{y}_{k+\infty}^C - \underline{y}_{k+N}^P = \underline{S}_{\underline{N}} [\underline{u}(k+m-1) - \underline{u}(k-1)] \quad (4.2)$$

$$\Delta \underline{y} = \underline{S}_{\underline{N}} \Delta \underline{u}$$

Dentro desta camada de otimização tem-se apenas a informação do ganho estático, visto que a dinâmica não é relevante para esta camada, enquanto que na camada do MPC a informação completa do processo, dinâmica e estática, é importante.

A equação (4.2) pode ser escrita

$$\hat{y}_{SS}^C - \underline{y}_{k+N}^P = \underline{S}_{\underline{N}} [\underline{u}_{SS} - \underline{u}_{k-1}]$$

onde

\hat{y}_{SS}^C : predição para o novo estado estacionário obtido de uma função objetivo econômica

\underline{y}_{k+N}^P : situação no futuro N caso nenhuma ação de controle seja tomada

$\underline{S}_{\underline{N}}$: ganho estático do processo

\underline{u}_{k-1} : valor atual das manipuladas

\underline{u}_{SS} : valor desejado para as variáveis manipuladas, \underline{u}_{irv}

Na figura 4.2 é indicado um sistema de separação.

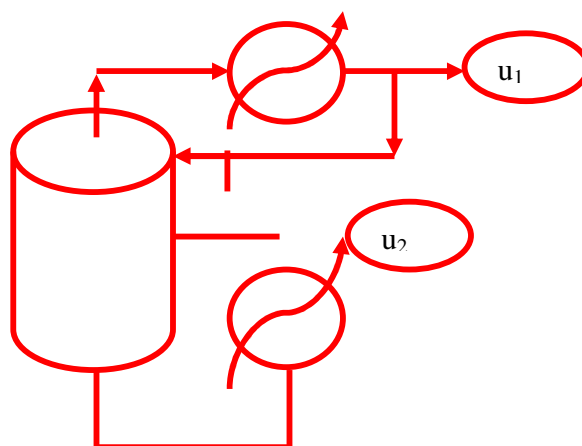


Figura 4.2

Suponha que para o sistema indicado na figura 4.2 exista um função objetivo linear associada a este processo do tipo:

$$\phi = \underline{p}_y^T \underline{y}_{SS} + \underline{p}_u^T \underline{u}_{SS}$$

onde

\underline{p}_y : preços de mercado associados aos produtos obtidos

\underline{p}_u : custos associados às utilidades empregadas

No exemplo da figura 4.2 podemos escrever simplesmente:

$$\phi = p_1 u_1 - p_2 u_2, \text{ onde } u_1 \text{ produto e } u_2 \text{ utilidades}$$

Portanto, uma programação linear resolveria o seguinte problema:

$$\min_{\underline{y}_{SS}^C, \underline{u}_{SS}} \phi = \underline{p}_y^T \underline{y}_{SS}^C + \underline{p}_u^T \underline{u}_{SS}$$

$$\text{sujeito a: } \hat{\underline{y}}_{SS}^C - \underline{y}_{k+N}^P = \underline{S}_N [\underline{u}_{SS} - \underline{u}_{k-1}]$$

$$\underline{u}_{\min} \leq \underline{u}_{SS} \leq \underline{u}_{\max}$$

$$\underline{y}_{\min}^C \leq \underline{y}_{SS}^C \leq \underline{y}_{\max}^C$$

Deste problema obtemos os valores de \underline{y}_{SS}^C e \underline{u}_{SS} que serão passados à camada inferior, camada do MPC, como \underline{y}^{SP} e \underline{u}_{irv} .

Se o modelo da planta fosse correto, o otimizador fornecendo \underline{y}_{SS}^C , o valor de \underline{u}_{SS} ficaria definido automaticamente por \underline{S}_N . Como existem erros no modelo, \underline{y}_{SS}^C não corresponde a \underline{u}_{SS} na camada do MPC. Desta forma, apenas um deles poderia ser atingido, ficando o outro na restrição ou fora do ponto desejado.

$$\hat{\underline{y}}_{SS}^C - \underline{y}_{k+N}^P = \underline{S}_N [\underline{u}_{SS} - \underline{u}_{k-1}]$$

Se o ganho estático \underline{S}_N do modelo for maior que o ganho estático \underline{S}_N real, teremos, para um determinado valor de \underline{y}_{SS}^C , um valor de \underline{u}_{SS} menor:

$$\underline{u}_{SS} = \frac{\hat{\underline{y}}_{SS}^C - \underline{y}_{k+N}^P}{\underline{S}_N} + \underline{u}_{k-1}$$

Isto corresponde a retirarmos, por exemplo, menos produto do topo (u_1).

Para resolver este problema, a função objetivo do MPC em duas camadas pode ser alterada para o exposto na equação 4.3.

$$J = \underline{e}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e} + (\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{R}_u (\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv}) + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u} \quad (4.3)$$

onde \underline{R}_u na equação (4.3) corresponde ao grau de importância que a variável possui de se aproximar do valor desejado \underline{u}_{irv} .

4.1. FUNÇÃO OBJETIVO QP DE UM MPC QUE OPERA EM DUAS CAMADAS

A função objetivo expressa na equação (4.3) pode ser expressa na forma convencional de um problema QP.

Primeiramente, representa-se a função objetivo em termos incrementais, lembrando que:

$$\underline{u}_{k+m-1} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{nu} & \underline{I}_{nu} & \cdots & \underline{I}_{nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \underline{u}_{k-1} = \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1}$$

Portanto:

$$J = \underline{e}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e} + (\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{R}_{uu} (\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv}) + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u} = J = \underline{e}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e} +$$

$$\left(\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right)^T \underline{R}_{uu} \left(\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right) + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u}$$

A parcela referente à importância do valor desejado para \underline{u}_{irv} , pode ser desenvolvido como mostrado a seguir:

$$\left(\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right)^T \underline{R}_{uu} \left(\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right) = \left(\Delta \underline{u}^T \bar{\underline{I}}^T + \left[\underline{u}_{k-1}^T - \underline{u}_{irv}^T \right] \right) \underline{R}_{uu} \left(\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \left[\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right] \right)$$

$$\left(\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right)^T \underline{R}_{uu} \left(\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right) = \Delta \underline{u}^T \bar{\underline{I}}^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \left(\underline{u}_{k-1}^T - \underline{u}_{irv}^T \right) \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \Delta \underline{u}^T \bar{\underline{I}}^T \underline{R}_{uu} \left(\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right) + \left(\underline{u}_{k-1}^T - \underline{u}_{irv}^T \right) \underline{R}_{uu} \left(\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right)$$

$$\left(\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right)^T \underline{R}_{uu} \left(\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right) = \Delta \underline{u}^T \bar{\underline{I}}^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + 2 \left(\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right)^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} +$$

$$\left(\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right)^T \underline{R}_{uu} \left(\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right)$$

Dessa forma, a função objetivo da segunda camada de um MPC fica, na forma de solução de uma QP:

$$J = \Delta \underline{u}^T \left(\underline{H} + \bar{\underline{I}}^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \right) \Delta \underline{u} + 2 \left(\underline{C}_f^T + \left(\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv} \right)^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \right) \Delta \underline{u}$$

onde:

$$\underline{H} = \underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} + \underline{R}$$

$$\underline{C}_f^T = -\underline{e}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S}$$

4.2. CONTROLE DAS SAÍDAS POR FAIXA

Um processo real possui, normalmente, um número de variáveis manipuladas (n_u) menor que o número de variáveis controladas (n_y). Desta forma, o grau de liberdade do sistema fica limitado a n_u , o que torna inviável a possibilidade de se controlar todas variáveis controladas.

Desta forma, o mais conveniente para estas situações, é manter os *setpoints* para as manipuladas (\underline{u}_{irv}) e permitir um maior grau de liberdade para as variáveis controladas. Para isso, o MPC deve ser modificado.

Por outro lado, nos processos a serem controlados, a maioria das saídas não tem um *setpoint* bem definido e sim uma faixa onde a saída, variável controlada, tem que ser mantida. Essa faixa é conhecida como restrição leve ou, do inglês, “*soft constraints*”.

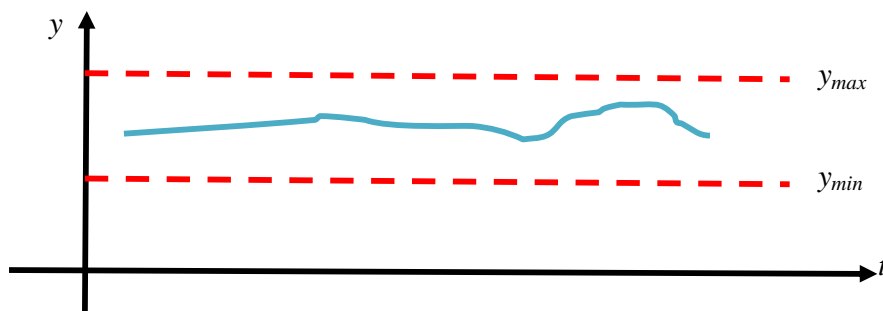


Figura 4.3

Desta forma, permite-se um grau de liberdade para as controladas, o que “relaxa” o problema de otimização. Estas variáveis só passam a ser efetivamente controladas pelas manipuladas disponíveis quando uma das restrições for atingida (y_{max} , y_{min}). O controlador ignora as saídas que estão dentro da faixa admissível pelo controle.

Para tal, a função objetivo apresentada em (4.3) é modificada da seguinte forma:

$$J = \sum_{j=1}^{np} \left[\underline{y}_{k+j}^C - \underline{y}_{k+j}^b \right]^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \left[\underline{y}_{k+j}^C - \underline{y}_{k+j}^b \right] + (\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{\underline{R}}_u (\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv}) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \underline{u}_{k+j}^T \underline{\underline{R}} \Delta \underline{u}_{k+j} \quad (4.4)$$

Nesta expressão pode-se observar que a parcela intermediária da função objetivo, $(\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{\underline{R}}_u (\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv})$, tende a tornar \underline{u}_{k+m-1} o mais próximo possível de \underline{u}_{irv} , como já visto anteriormente, e, na primeira parcela, o valor de \underline{y}_{k+j}^b será função da situação atual da variável controlada. Se esta variável estiver acima de \underline{y}^{\max} , este será o valor de \underline{y}_{k+j}^b . Caso se encontre abaixo de \underline{y}^{\min} , o valor de \underline{y}_{k+j}^b será este limite inferior.

Portanto, a estratégia a ser adotada no controle das saídas por faixa será:

- (i) Se $\underline{y}^{\min} \leq \underline{y}_{k+j}^P \leq \underline{y}^{\max}$, ou seja, dentro da faixa, a saída y_i será ignorada no instante $k+j$. Para isso, força-se que o peso $W_{i,k+j}$ da variável em questão seja nulo.
- (ii) Se $\underline{y}_{i,k+j}^P > \underline{y}_i^{\max}$, ou seja, a restrição máxima foi atingida, o controlador deve retornar esta variável controlada para dentro da faixa admissível. Para isso,

automaticamente, o peso $W_{i,k+j}$ associado a esta variável é habilitado para o valor ajustado durante a sintonia do controlador e o valor de $y_{i,k+j}^b$ é ajustado para y_i^{\max} .

- (iii) Se $y_{i,k+j}^p < y_i^{\min}$, ou seja, a restrição mínima foi atingida, o controlador deve retornar esta variável controlada para dentro da faixa admissível. Para isso, automaticamente, o peso $W_{i,k+j}$ associado a esta variável é habilitado para o valor ajustado durante a sintonia do controlador e o valor de $y_{i,k+j}^b$ é ajustado para y_i^{\min} .

Lembrando que:

$$\underline{u}_{k+m-1} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{nu} & \underline{I}_{nu} & \dots & \underline{I}_{nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \underline{u}_{k-1} = \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1}$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{nu} & \underline{I}_{nu} & \dots & \underline{I}_{nu} \end{bmatrix} = nu \times m.nu = \bar{\underline{I}}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix} = m.nu \times 1$$

O segundo termo da expressão da função objetivo descrita em (4.4), pode ser escrito da seguinte forma:

$$(\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{R}_{uu} (\underline{u}_{k+m-1} - \underline{u}_{irv}) = (\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{R}_{uu} (\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv})$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} & (\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{R}_{uu} (\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv}) = \Delta \underline{u}^T \bar{\underline{I}}^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1}^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} - \underline{u}_{irv}^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \\ & + \Delta \underline{u}^T \bar{\underline{I}}^T \underline{R}_{uu} \underline{u}_{k-1} + \underline{u}_{k-1}^T \underline{R}_{uu} \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv}^T \underline{R}_{uu} \underline{u}_{k-1} - \Delta \underline{u}^T \bar{\underline{I}}^T \underline{R}_{uu} \underline{u}_{irv} - \underline{u}_{k-1}^T \underline{R}_{uu} \underline{u}_{irv} + \underline{u}_{irv}^T \underline{R}_{uu} \underline{u}_{irv} \\ & (\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{R}_{uu} (\bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv}) = \Delta \underline{u}^T \bar{\underline{I}}^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + (\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{R}_{uu} \bar{\underline{I}} \Delta \underline{u} + \\ & + \Delta \underline{u}^T \bar{\underline{I}}^T \underline{R}_{uu} (\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv}) + (\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{R}_{uu} \underline{u}_{k-1} - (\underline{u}_{k-1} - \underline{u}_{irv})^T \underline{R}_{uu} \underline{u}_{irv} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\bar{I}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{u}_{irv} \right)^T \underline{\underline{R}}_{\mathbf{u}} \left(\bar{I}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{u}_{irv} \right) = \Delta\mathbf{u}^T \bar{I}^T \underline{\underline{R}}_{\mathbf{u}} \bar{I} \Delta\mathbf{u} + 2 \left(\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{u}_{irv} \right)^T \underline{\underline{R}}_{\mathbf{u}} \bar{I} \Delta\mathbf{u} + \\
 & + \left(\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{u}_{irv} \right)^T \underline{\underline{R}}_{\mathbf{u}} \left(\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{u}_{irv} \right) \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

A função objetivo de um QDMC, vista no capítulo anterior, e repetida a seguir:

$$J = \Delta\mathbf{u}^T \underline{\underline{H}} \Delta\mathbf{u} + 2C_f^T \Delta\mathbf{u} \quad (3.40)$$

Substituindo a expressão em (4.5) na função objetivo indicada em (4.4), esta função objetivo do QDMC pode ser rerepresentada, portanto, com a presença de \mathbf{u}_{irv} da seguinte forma:

$$J = \Delta\mathbf{u}^T \left(\underline{\underline{H}} + \bar{I}^T \underline{\underline{R}}_{\mathbf{u}} \bar{I} \right) \Delta\mathbf{u} + 2 \left(C_f^T + \left(\mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{u}_{irv} \right)^T \underline{\underline{R}}_{\mathbf{u}} \bar{I} \right) \Delta\mathbf{u} \quad (4.6)$$

onde:

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{\theta}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{\theta}} \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{R}}$$

$$C_f^T = -\underline{\underline{e}}^T \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{W}} \underline{\underline{\theta}} \underline{\underline{S}}$$

4.3. FUNÇÃO OBJETIVO ECONÔMICA COMO SAÍDA CONTROLADA

Ao invés de termos uma camada de otimização integrada ao MPC, uma equação matemática que represente um custo ou lucro econômico pode ser definida como uma das saídas controladas do controlador preditivo.

Seja a função objetivo

$$\phi = \underline{\underline{p}}_y^T \underline{\underline{y}}_{SS} + \underline{\underline{p}}_u^T \underline{\underline{u}}_{SS}$$

que é uma função linear em termos de entradas e saídas.

Pode-se definir para o controlador uma saída controlada adicional, além das exigidas pelo processo da forma indicada na equação (4.7).

$$\phi = y_{ny+1} = \underline{\underline{p}}_y^T \underline{\underline{y}}^C + \underline{\underline{p}}_u^T \underline{\underline{u}} \quad (4.7)$$

O modelo para esta nova variável pode ser obtido através de variações em degrau nas entradas e acompanhamento destas variações nas saídas, efetuando o cálculo da função objetivo com os resultados obtidos.

E qual será o valor desejado para esta nova saída controlada?

- (i) Se a função objetivo deve ser maximizada, podemos definir o *setpoint* como

$$\phi^{SET} = 1,01 \phi^{ATUAL}$$

A definição deste *setpoint* leva a um aumento da função objetivo até uma restrição ser atingida.

- (ii) Supondo que todas as saídas tenham faixa de operação máxima e mínima, ou seja, um controle de saídas por faixa, pode-se utilizar a seguinte estratégia, para evitar conflitos da função objetivo com as demais saídas:

- a. O número de saídas ativas, saídas que atingiram o máximo ou o mínimo da faixa controlada, é contabilizado como ny_a
- b. Se ny_a for maior ou igual a nu , ou seja, temos mais variáveis controladas do que manipuladas, a saída adicional $\phi = y_{ny+1}$ é desativada. Essa desativação é feita anulando-se os pesos associados a esta saída.
 - c. Se ny_a for menor do nu , ou seja, temos mais variáveis manipuladas do que controladas, a saída adicional $\phi = y_{ny+1}$ é ativada, como o setpoint definido na equação (4.7).

5. MPC COM AÇÕES DE CONTROLE NÃO IGUALMENTE ESPAÇADAS

Para processos com período de estabilização N muito grande, o horizonte de controle m tende ao valor unitário, pois tudo se passa como, apesar de ter ocorrido várias ações de controle, esta ação fosse única. Se a ação de controle fosse executada em tempos maiores, mais espaçados, teríamos uma ação mais eficaz do controlador, conforme mostrado na figura 5.1.

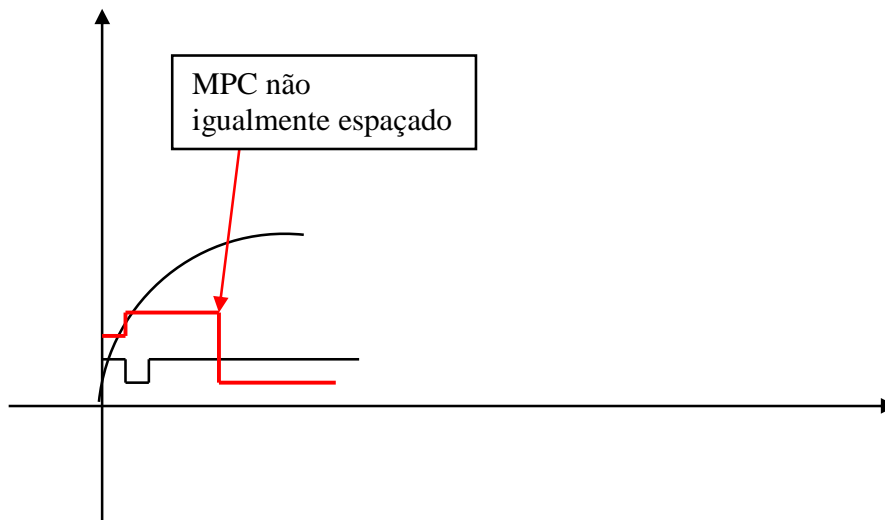


Figura 5.1

Para um horizonte de controle igual a 3, as ações não igualmente espaçadas poderiam ser representadas como $\Delta u(k), \Delta u(k+n_1), \Delta u(k+n_2)$, onde $n_1 < n_2$.

5.1. EQUAÇÃO DE PREDIÇÃO DA SAÍDA PARA ENTRADAS NÃO IGUALMENTE ESPAÇADAS

Supondo, por exemplo, um controlador com horizonte de controle igual a 3, as equações de predição, para este caso, podem ser expressas como:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1}^C \\ \hat{y}_{k+2}^C \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+n_1+1}^C \\ \hat{y}_{k+n_1+2}^C \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+n_2+1}^C \\ \hat{y}_{k+n_2+2}^C \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+np}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_2 & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{S}_{n_1+1} & \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_{n_1+2} & \underline{S}_2 & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{S}_{n_2+1} & \underline{S}_{n_2-n_1} & \underline{S}_1 \\ \underline{S}_{n_2+2} & \underline{S}_{n_2-n_1+1} & \underline{S}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{S}_{np} & \underline{S}_{np-n_1} & \underline{S}_{np-n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+n_1) \\ \Delta \underline{u}(k+n_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{y}_k + \underline{P}_1 \\ \hat{y}_k + \underline{P}_2 \\ \hat{y}_k + \underline{P}_3 \\ \vdots \\ \hat{y}_k + \underline{P}_{np} \end{bmatrix}$$

Uma boa regra para a sintonia do controlador é adotar o período de predição np igual ao horizonte de estabilização N e as ações de controle espaçadas na ordem do dobro com relação a ação anterior, com exceção da última ação, que pode acontecer um pouco antes.

Assim, se o horizonte de controle m for igual a 5, por exemplo, $n_1 = \frac{np}{20}$,

$$n_2 = \frac{np}{10} (n_2 = 2n_1), \quad n_3 = \frac{np}{5} (n_3 = 2n_2) \text{ e } n_4 = \frac{np}{3}.$$

6. SISTEMAS INTEGRADORES

Um sistema integrador é caracterizado por um processo que possua uma função de transferência em relação a uma dada entrada com um polo localizado em zero, ou um polo no círculo unitário, no domínio discreto.

Este sistema, portanto, apresenta uma função de transferência do tipo:

$$G_p(s) = \frac{N(s)}{s} \text{ ou } HG_p(z) = \frac{N(z)}{1-z^{-1}}$$

A resposta deste sistema em malha aberta a uma excitação na entrada de um degrau é uma rampa crescente.

Na predição do DMC, modelo de deslocamento, para uma planta estável a um degrau, admitiu-se que a predição do processo no intervalo N é a mesma predição no instante imediatamente anterior, $k+N-1$. Essa afirmativa é válida para um sistema autorregulador. No entanto, essa hipótese deixa de ser válida para um sistema integrador.

6.1. MÉTODO DE EXTRAPOLAÇÃO DE SAÍDA DO MODELO

A predição das variáveis controladas no modelo DMC com planta estável era obtida pela equação (3.35) repetida a seguir:

$$\hat{\underline{y}}_{k+1}^C = \underline{\underline{M}} \hat{\underline{y}}_k^P + \underline{\underline{M}} \tilde{\underline{S}} \Delta \underline{u}(k) + \underline{d}(k+1) \quad (3.35)$$

Nesta equação a matriz $\underline{\underline{M}}$ era definida como

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{I}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \cdots & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} \\ \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{I}_{ny \times ny} & \cdots & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} \\ \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \cdots & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \cdots & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{I}_{ny \times ny} \\ \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \cdots & \mathbf{0}_{ny \times ny} & \mathbf{I}_{ny \times ny} \end{bmatrix}$$

Essa matriz, por apresentar as duas últimas linhas iguais, admite a hipótese que:

$$\left[\underline{y}_{k+N}^P \right]_{k+1} = \left[\underline{y}_{k+N-1}^P \right]_{k+1} = \left[\underline{y}_{k+N}^P \right]_k$$

Esta hipótese não pode ser empregada em um processo integrador.

O método de extrapolação de saída do modelo considera uma resposta linear do processo no instante próximo ao de estabilização, conforme indicado na figura (6.1).

Portanto, supõe-se que, próximo ao período de estabilização, o comportamento da saída será aproximadamente uma reta e $\Delta_1 = \Delta_2$.

Esses valores incrementais podem ser escritos da seguinte forma:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N} - \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N+1} - \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N} - \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N-1} = \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N+1} - \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N}$$

$$\begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N+1} = \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N} - \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N-1} + \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N} = 2 \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N} - \begin{bmatrix} y^P \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}_{k+N-1} \quad (6.1)$$

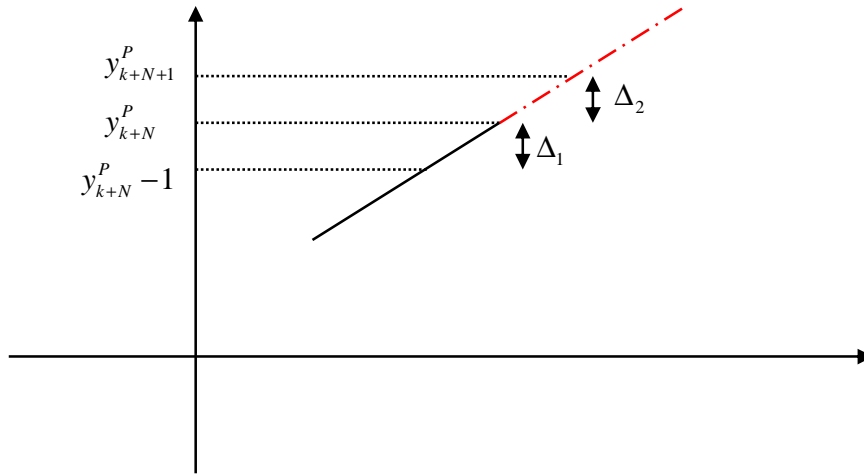


Figura 6.1

A expressão indicada na equação (6.1) é geral e também atende aos sistemas estáveis, não integradores, indicado na equação (3.35).

A matriz M passa a ser escrita da forma indicada na equação (6.2):

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & -I_{ny \times ny} & 2I_{ny \times ny} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

No entanto, utilizando a matriz M indicada na equação (6.2) para predição das saídas em um controlador DMC, o sistema em malha fechada se mostra instável, conforme será demonstrado a seguir.

6.2. ANÁLISE DA INSTABILIDADE PROVOCADA COM O USO DA NOVA MATRIZ \underline{M}

A predição de $\left[\underline{y}_{k+1}^P \right]_k$, que foi feita no instante k , já pode ser corrigida pela leitura da planta nesse instante $k+1$, que é obtida a partir da equação (3.35), rerepresentada a seguir:

$$\underline{\hat{y}}_{k+1}^C = \underline{M} \underline{\hat{y}}_k^P + \underline{M} \underline{\bar{S}} \underline{\Delta u}(k) + \underline{d}(k+1) \quad (3.35)$$

O desvio deste instante $k+1$ será considerado o mesmo para todos instantes do horizonte de predição np .

Substituindo esse desvio por sua definição:

$$\underline{\hat{y}}_{k+1}^C = \underline{M} \underline{\hat{y}}_k^P + \underline{M} \underline{\bar{S}} \underline{\Delta u}(k) + \underline{K}_F \left\{ \underline{y}_{k+1} - \underline{C} \left(\underline{\hat{y}}_k^P + \underline{\bar{S}} \underline{\Delta u}(k) \right) \right\} \quad (6.3)$$

onde:

$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & \underline{0}_{ny} & \dots & \underline{0}_{ny} \end{bmatrix}$ - apenas o primeiro elemento da predição é selecionado para gerar o vetor de desvio

$\underline{K}_F = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & \underline{I}_{ny} & \dots & \underline{I}_{ny} \end{bmatrix}^T$ - observador de estados utilizado na estratégia do DMC

$\underline{\bar{S}}$: matriz dinâmica considerada na predição pelo controlador

Expandindo a equação (6.3):

$$\begin{aligned} \underline{\hat{y}}_{k+1}^C &= \underline{M} \underline{\hat{y}}_k^P + \underline{M} \underline{\bar{S}} \underline{\Delta u}(k) + \underline{K}_F \underline{y}_{k+1} - \underline{K}_F \underline{C} \underline{\hat{y}}_k^P - \underline{K}_F \underline{C} \underline{\bar{S}} \underline{\Delta u}(k) \\ \underline{\hat{y}}_{k+1}^C &= (\underline{M} - \underline{K}_F \underline{C}) \underline{\hat{y}}_k^P + (\underline{M} - \underline{K}_F \underline{C}) \underline{\bar{S}} \underline{\Delta u}(k) + \underline{K}_F \underline{y}_{k+1} \quad (6.4) \end{aligned}$$

A expressão indicada em (6.4) pode ser escrita como equação em espaço de estado.

$$\underbrace{\underline{\hat{y}}_{k+1}^C}_{x(k+1)} = \underbrace{(\underline{M} - \underline{K}_F \underline{C})}_{A} \underbrace{\underline{\hat{y}}_k^P}_{x(k)} + \underbrace{(\underline{M} - \underline{K}_F \underline{C}) \underline{\bar{S}}}_{B} \underline{\Delta u}(k) + \underline{K}_F \underline{y}_{k+1}$$

Para analisar a estabilidade da equação de estados obtida, basta verificar os autovalores da matriz de estado A. Se todos autovalores estiverem dentro do círculo unitário, o sistema em malha fechada é estável.

6.2.1. Análise de estabilidade para a matriz \underline{M} do sistema estável

$$\underline{M} - \underline{K}_F \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{I}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \dots & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} \\ \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{I}_{ny \times ny} & \dots & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} \\ \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \dots & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \dots & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{I}_{ny \times ny} \\ \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \dots & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{I}_{ny \times ny} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny \times ny} \\ \underline{I}_{ny \times ny} \\ \underline{I}_{ny \times ny} \\ \vdots \\ \underline{I}_{ny \times ny} \\ \underline{I}_{ny \times ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} & \dots & \underline{0}_{ny \times ny} & \underline{0}_{ny \times ny} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}_F \underline{\underline{C}} &= \begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \end{bmatrix} \\
 \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}_F \underline{\underline{C}} &= \begin{bmatrix} -I_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix} \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Obtendo os autovalores da matriz indicada em (6.5):

$$\begin{aligned}
 \det [\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}_F \underline{\underline{C}} - \lambda I] &= 0 \\
 \det \left\{ \begin{bmatrix} -I_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & \lambda & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \lambda & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \lambda & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \lambda \end{bmatrix} \right\} &= 0 \\
 \det \left\{ \begin{bmatrix} -I_{ny \times ny} - \lambda & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & -\lambda & I_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & -\lambda & \dots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & -\lambda & I_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \dots & 0_{ny \times ny} & -\lambda \end{bmatrix} \right\} &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto, a expressão para $\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}_F \underline{\underline{C}}$ possui todos os autovalores em zero, o que caracteriza um sistema estável.

6.2.2. Análise de estabilidade para a matriz M do sistema integrador

$$\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}_F \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & -I_{ny \times ny} & 2I_{ny \times ny} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{ny \times ny} \\ I_{ny \times ny} \\ I_{ny \times ny} \\ \vdots \\ I_{ny \times ny} \\ I_{ny \times ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}_F \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & -I_{ny \times ny} & 2I_{ny \times ny} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}_F \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -I_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & -I_{ny \times ny} & 2I_{ny \times ny} \end{bmatrix}$$

Analisando os autovalores associados

$$\det[\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{K}}_F \underline{\underline{C}} - \lambda I] = 0$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} -I_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & I_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & -I_{ny \times ny} & 2I_{ny \times ny} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & \lambda & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \lambda & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \lambda & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \lambda \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} -I_{ny \times ny} - \lambda & I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & -\lambda & I_{ny \times ny} & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & -\lambda & \cdots & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & -\lambda & I_{ny \times ny} \\ -I_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & 0_{ny \times ny} & \cdots & -I_{ny \times ny} & 2I_{ny \times ny} - \lambda \end{bmatrix} \right\} = 0$$

Pode-se verificar que, utilizando esta matriz M para a estratégia de extrapolação de modelo, encontra-se ny autovalores em $+1$ e os demais em zero. Portanto, o sistema obtido com esta matriz é instável em malha fechada.

Na prática foi verificado que um observador que utilize apenas 10% do erro ocorrido no instante atual como correção para o instante $N+1$, é capaz de estabilizar o sistema proposto.

$$\underline{\underline{K}}_F = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & \underline{I}_{ny} & \dots & 1,1\underline{I}_{ny} \end{bmatrix}^T$$

6.3. REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADO E MODELO DE REALINHAMENTO

Neste caso, a predição é baseada na extrapolação dos dados obtidos da planta e não a partir do modelo, como descrito no item anterior.

6.3.1. Predição para um instante imediatamente superior

Para o integrador puro, o modelo de predição pode ser definido como:

$$y(k+1) = y(k) + \underbrace{\left[y(k) - y(k-1) \right]}_{\substack{\text{quanto } y \text{ aumentou no período} \\ \text{atual e no período anterior}}} + \underline{S}_1 \Delta u(k) \quad (6.6)$$

Desenvolvendo a equação (6.6)

$$y(k+1) = 2y(k) - y(k-1) + \underline{S}_1 \Delta u(k) \quad (6.7)$$

Considerando que, na equação (6.7), as saídas controladas aparecem em três instantes de tempo, pode-se definir um estado para a planta da seguinte forma:

$$\underline{x}(k) = \begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \\ \underline{y}(k-2) \end{bmatrix}$$

Com essa definição para o estado, pode-se deduzir que a relação entre o estado e a saída será:

$$\underline{y}(k) = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} \end{bmatrix} \underline{x}(k)$$

A equação (6.7) pode ser escrita como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{y}(k+1) \\ \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \end{bmatrix}}_{\underline{x}(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2\underline{I}_{ny} & -\underline{I}_{ny} & 0 \\ \underline{I}_{ny} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{I}_{ny} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \\ \underline{y}(k-2) \end{bmatrix}}_{\underline{x}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \Delta u(k) \quad (6.8)$$

$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\Delta u(k)$, que é a representação em espaço de estados.

A equação (6.8) não considerou a correção da leitura da planta,

Para correção da planta, pode-se utilizar o seguinte estimador de estados $\underline{\underline{K}}_F = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, e que a cada instante k o valor estimado de $y(k)$ seja atualizado com o valor real $y_{planta}(k)$.

Desta forma, o vetor de estados $x(k)$ no instante $k+1$ será:

$$\underline{x}(k) = \begin{bmatrix} \underline{y}_{planta}(k) \\ \underline{y}_{planta}(k-1) \\ \underline{y}_{planta}(k-2) \end{bmatrix}, \text{ que correspondem as últimas leituras da planta.}$$

Para obtenção do próximo vetor de estados, $x(k+1)$, já considerando a correção da planta neste instante, cujo valor estaria disponível:

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{calculo} \\ y_{planta}(k) \\ y_{planta}(k-1) \end{bmatrix} + K_F \begin{bmatrix} y_{planta}(k+1) - \underbrace{y^P(k+1)}_{\text{Predicao feita no instante k}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{planta}(k+1) \\ y_{planta}(k) \\ y_{planta}(k-1) \end{bmatrix}$$

Passando para a notação matricial em espaços de estados:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\Delta u(k) + \underline{K}_F (\underline{y}_{k+1} - C(\underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\Delta u(k))) \quad (6.9),$$

onde \underline{y}_{k+1} é a leitura obtida da planta no instante $k+1$.

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\Delta u(k) + \underline{K}_F \underline{y}_{k+1} - \underline{K}_F C \underline{A}\underline{x}(k) - \underline{K}_F C \underline{B}\Delta u(k)$$

$$\underline{x}(k+1) = [\underline{A} - \underline{K}_F C \underline{A}] \underline{x}(k) + [\underline{B} - \underline{K}_F C \underline{B}] \Delta u(k) + \underline{K}_F \underline{y}_{k+1} \Delta u(k) \quad (6.10)$$

Para estudar a estabilidade do sistema obtido, basta verificar a locação dos autovalores de $[\underline{A} - \underline{K}_F C \underline{A}]$

$$[\underline{A} - \underline{K}_F C \underline{A}] = [\underline{I} - \underline{K}_F C] \underline{A}$$

$$[\underline{A} - \underline{K}_F C \underline{A}] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Pode-se verificar facilmente que a matriz indicada em (6.11) possui todos os autovalores em zero e, portanto, o sistema é estável.

6.3.2. Equação da predição para um horizonte de predição np a partir da equação de espaço de estados

Em um instante k , momento atual, o vetor de estados $x(k)$ é conhecido e igual a, por exemplo, $\underline{x}(k) = [y(k) \quad y(k-1) \quad y(k-2)]^T$, para um sistema integrador puro, e com a matriz de saída $C = [I_{ny} \quad 0 \quad 0]$.

Para a predição das saídas do instante $k+1$ até o instante np , podemos utilizar o modelo de espaço de estados e, através de um processo recursivo, obter os valores de predição das variáveis de saída.

$$\underline{y}(k+1) = \underline{C}\underline{x}(k+1) \quad \text{onde } \underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k)$$

Portanto, escrevendo $y(k+1)$ em função de $x(k)$ e $\Delta u(k)$

$$\underline{y}(k+1) = \underline{C}[\underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k)] = \underline{C}\underline{A}\underline{x}(k) + \underline{C}\underline{B}\underline{\Delta u}(k)$$

Para o instante $k+2$

$$\underline{y}(k+2) = \underline{C}\underline{x}(k+2)$$

$$\text{onde } \underline{x}(k+2) = \underline{A}\underline{x}(k+1) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+1)$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k)$$

$$\Rightarrow \underline{x}(k+2) = \underline{A}[\underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k)] + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+1)$$

$$\underline{x}(k+2) = \underline{A}^2 \underline{x}(k) + \underline{A}\underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+1)$$

$$\underline{y}(k+2) = \underline{C}[\underline{A}^2 \underline{x}(k) + \underline{A}\underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+1)]$$

$$\underline{y}(k+2) = \underline{C}\underline{A}^2 \underline{x}(k) + \underline{C}\underline{A}\underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{C}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+1)$$

Para o instante $k+3$

$$\underline{y}(k+3) = \underline{C}\underline{x}(k+3)$$

$$\text{onde } \underline{x}(k+3) = \underline{A}\underline{x}(k+2) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+2)$$

$$\underline{x}(k+2) = \underline{A}^2 \underline{x}(k) + \underline{A}\underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+1)$$

$$\Rightarrow \underline{x}(k+3) = \underline{A}[\underline{A}^2 \underline{x}(k) + \underline{A}\underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+1)] + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+2)$$

$$\underline{x}(k+3) = \underline{A}^3 \underline{x}(k) + \underline{A}^2 \underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{A}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+1) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+2)$$

$$\underline{y}(k+3) = \underline{C}[\underline{A}^3 \underline{x}(k) + \underline{A}^2 \underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{A}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+1) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k+2)]$$

$$\underline{y}(k+3) = \underline{C}\underline{A}^3 \underline{x}(k) + \underline{C}\underline{A}^2 \underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{C}\underline{A}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+1) + \underline{C}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+2)$$

Para o instante $k+np$:

$$\begin{aligned} \underline{y}(k+np) = & \underline{C}\underline{A}^{np} \underline{x}(k) + \underline{C}\underline{A}^{np-1} \underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{C}\underline{A}^{np-2} \underline{B}\underline{\Delta u}(k+1) + \underline{C}\underline{A}^{np-3} \underline{B}\underline{\Delta u}(k+2) + \\ & + \dots + \underline{C}\underline{A}^{np-m} \underline{B}\underline{\Delta u}(k+m-1) \end{aligned}$$

Passando as equações de predição para a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(k+1) \\ \underline{y}(k+2) \\ \underline{y}(k+3) \\ \vdots \\ \underline{y}(k+np) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{CA} \\ \underline{CA}^2 \\ \underline{CA}^3 \\ \vdots \\ \underline{CA}^{np} \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} \underline{CB} & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{CAB} & \underline{CB} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{CA}^2 \underline{B} & \underline{CAB} & \underline{CB} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{CA}^{np-1} \underline{B} & \underline{CA}^{np-2} \underline{B} & \underline{CA}^{np-3} \underline{B} & \cdots & \underline{CA}^{np-m} \underline{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta u}(k) \\ \underline{\Delta u}(k+1) \\ \underline{\Delta u}(k+2) \\ \vdots \\ \underline{\Delta u}(k+m-1) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

A expressão indicada em (6.12) é válida para qualquer modelo do tipo:

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}(k) \\ \underline{y}(k) = \underline{C}\underline{x}(k) \end{cases}$$

Portanto, se for conhecido um estado inicial e o modelo do processo definido, a predição das variáveis de saída pode ser realizada para qualquer horizonte np de predição definido na sintonia do controlador. Nesta predição, o estado $x(k+1)$ será atualizado com os valores reais da planta de processo, garantindo convergência, menor dependência com incertezas de modelos e com as perturbações ocorridas.

6.4. ENFOQUE DO SICON PARA SISTEMAS INTEGRADORES

O SICON é o controlador preditivo da Petrobras e é baseado no DMC.

A equação da predição das variáveis de saída no controlador DMC é dada pela equação apresentada em (3.22) e abaixo repetida:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_{k+1}^C \\ \hat{\underline{y}}_{k+2}^C \\ \hat{\underline{y}}_{k+3}^C \\ \vdots \\ \hat{\underline{y}}_{k+np}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & 0_{ny \times nu} & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \underline{S}_3 & \underline{S}_2 & \underline{S}_1 & \cdots & 0_{ny \times nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{S}_{np} & \underline{S}_{np-1} & \underline{S}_{np-2} & \cdots & \underline{S}_{np-m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta u}(k) \\ \underline{\Delta u}(k+1) \\ \underline{\Delta u}(k+2) \\ \vdots \\ \underline{\Delta u}(k+m-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}_k + \underline{P}_1 \\ \hat{\underline{y}}_k + \underline{P}_2 \\ \hat{\underline{y}}_k + \underline{P}_3 \\ \vdots \\ \hat{\underline{y}}_k + \underline{P}_{np} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ou, de forma simplificada,

$$\left[\underline{y}^C \right]_k = \underline{S} \underline{\Delta u} + \left[\underline{y}^P \right]_k$$

Relembrando:

Na filosofia do DMC clássico, a predição das variáveis de saída para o instante seguinte $k+1$, é obtida considerando a ação de controle do instante anterior, o desvio apresentado entre a leitura da planta corrente e o valor predito para esse instante k e o efeito de ações passadas na planta de processo (\underline{P}_j).

Para evitar a soma envolvida em valores passados, foi proposto um realinhamento do vetor de predição, onde um deslocamento é feito nessa predição, junto com uma correção devido à diferença que foi verificada neste instante $k+1$ entre a predição e o valor real lido

da planta de processo. Essa correção é propagada para todo intervalo de predição e um novo vetor é construído, conforme indicado na equação (3.35).

$$\underline{\hat{y}}_{k+1}^C = \underline{M} \underline{\hat{y}}_k^C + \underline{M} \underline{\bar{S}} \Delta \underline{u}(k) + \underline{\bar{d}}(k+1) \quad (3.35)$$

A matriz M indicada em (6.2) para sistemas integradores apresenta a última linha da matriz diferente da penúltima, pois um sistema integrador não estabiliza. Ao se fazer a análise da estabilidade deste sistema em malha fechada com o uso dessa matriz M , foi demonstrado que o sistema é instável. Para estabilizar esse sistema com essa matriz M , foi proposta uma alteração no observador de estados.

Uma segunda abordagem, utilizada pelo SICON para esses sistemas, é apresentada neste momento.

Pode-se utilizar o modelo de realinhamento combinado com os dados anteriores que, a partir de uma extrapolação, obtém o próximo valor a ser obtido do processo:

$$\underline{y}_{k+1}^P = \underline{y}_k + \Delta \underline{y} = \underline{y}_k + \underline{y}_k - \underline{y}_{k-1} = 2\underline{y}_k - \underline{y}_{k-1}$$

Essa ideia foi utilizada anteriormente apenas na última linha da matriz M . Nessa abordagem, ela será usada ao longo de toda a predição.

Transformando em uma forma de espaço de estado, onde o estado foi definido como estado mínimo capaz de representar o sistema e igual a $[y(k) \ y(k-1) \ y(k-2)]^T$, tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{y}(k+1) \\ \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2I_{ny} & -I_{ny} & 0_{ny} \\ I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} \\ 0_{ny} & I_{ny} & 0_{ny} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \\ \underline{y}(k-2) \end{bmatrix}}_{x(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \Delta \underline{u}(k) \quad (6.8)$$

$$\underline{y}(k) = [1 \ 0 \ 0] x(k)$$

Considerando o estado $x(k)$ conhecido, os valores das variáveis de saída para os instantes futuros pode ser obtida por processo recursivo, conforme mostrado no item (6.3) e resumido na equação (6.12), abaixo transcrita:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(k+1) \\ \underline{y}(k+2) \\ \underline{y}(k+3) \\ \vdots \\ \underline{y}(k+np) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{CA} \\ \underline{CA}^2 \\ \underline{CA}^3 \\ \vdots \\ \underline{CA}^{np} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{CB} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \underline{CAB} & \underline{CB} & 0 & \cdots & 0 \\ \underline{CA}^2 \underline{B} & \underline{CAB} & \underline{CB} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{CA}^{np-1} \underline{B} & \underline{CA}^{np-2} \underline{B} & \underline{CA}^{np-3} \underline{B} & \cdots & \underline{CA}^{np-m} \underline{B} \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \Delta \underline{u} \quad (6.12)$$

$$[\underline{y}^C] = \underline{\bar{A}} x(k) + \underline{\bar{B}} \Delta \underline{u} \quad (6.13)$$

Destaca-se como vantagem da representação em espaço de estado, conforme indicado em (6.13), uma notação mais compacta, pois, ao invés de se operar com $\left[\underline{y}^p \right]_k$, bastar guardar $x(k)$, que é um vetor normalmente mais enxuto. Este vetor $x(k)$ deve ser atualizado e corrigido, a cada instante, com a última ação de controle e a leitura da planta.

A predição e a correção dos valores obtidos no DMC por deslocamento foram calculadas pela equação (3.36), abaixo rerepresentada:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}^C = \underline{A} \hat{\underline{x}}_k^C + \underline{B} \Delta \underline{u}(k) + \underline{K}_F \left\{ \underline{C} \left(\underline{y}_k + \underline{S}_P \Delta \underline{u}(k) \right) - \underline{C} \left(\hat{\underline{y}}_k^C + \underline{S} \Delta \underline{u}(k) \right) \right\} \quad (3.36)$$

Pode-se realizar a multiplicação na equação (3.36) na parcela referente ao desvio, lembrando que $\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & \underline{0}_{ny} & \dots & \underline{0}_{ny} \end{bmatrix}$:

$$\underline{K}_F \left\{ \underline{C} \left(\underline{y}_k + \underline{S}_P \Delta \underline{u}(k) \right) - \underline{C} \left(\hat{\underline{y}}_k^C + \underline{S} \Delta \underline{u}(k) \right) \right\} = \underline{K}_F \left\{ \underline{C} \underline{y}_k + \underline{C} \underline{S}_P \Delta \underline{u}(k) - \underline{C} \hat{\underline{y}}_k^C - \underline{C} \underline{S} \Delta \underline{u}(k) \right\}$$

onde:

$$\left[\underline{C} \underline{y}_k \right] = [ny \times ny.np] \times [ny.np \times 1] = [ny \times 1],$$

$$\underline{K}_F \left[\underline{C} \underline{y}_k \right] = [ny.np \times ny] \times [ny \times 1] = [ny.np \times 1]$$

Multiplicando por C e lembrando que $\underline{y}_k + \underline{S}_P \Delta \underline{u}(k)$ é a leitura da planta no instante $k+1$ seguinte:

$$\underline{K}_F \left\{ \underline{y}_k + \underline{S}_P \Delta \underline{u}(k) - \hat{\underline{y}}_k^C - \underline{S} \Delta \underline{u}(k) \right\} = \underline{K}_F \left\{ \underline{y}_{k+1} - \hat{\underline{y}}_k^C - \underline{S} \Delta \underline{u}(k) \right\}$$

Substituindo em (3.36), vem:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}^C = \underline{A} \hat{\underline{x}}_k^C + \underline{B} \Delta \underline{u}(k) + \underline{K}_F \left\{ \underline{y}_{k+1} - \hat{\underline{y}}_k^C - \underline{S} \Delta \underline{u}(k) \right\}$$

Para um modelo em espaço de estados:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \Delta \underline{u}(k) + \underline{K}_F \left\{ \underline{y}_{k+1} - \underline{C} \left[\underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \Delta \underline{u}(k) \right] \right\} \quad (6.9)$$

onde:

\underline{K}_F : observador ou estimador de estados

\underline{y}_{k+1} : valor lido da planta

$\hat{\underline{y}}_k^C + \underline{S} \Delta \underline{u}(k)$: predição considerando a ação de controle implementada no instante k imediatamente anterior

$\underline{C} \left[\underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \Delta \underline{u}(k) \right]$: valores para as variáveis de saída previstas em k para o instante $k+1$

$$\hat{\underline{y}}_k^C = \underline{x}(k)$$

Desenvolvendo a expressão (6.9) obtemos a expressão indicada em (6.10):

$$\underline{x}(k+1) = \left[\underline{A} - \underline{K}_F \underline{C} \underline{A} \right] \underline{x}(k) + \left[\underline{B} - \underline{K}_F \underline{C} \underline{B} \right] \Delta \underline{u}(k) + \underline{K}_F \underline{y}_{k+1} \Delta \underline{u}(k) \quad (6.10)$$

O observador de estados deve ter um ganho \underline{K}_F que coloque todos os autovalores da matriz $\left[\underline{A} - \underline{K}_F \underline{C} \underline{A} \right]$ dentro do círculo unitário, garantindo a estabilidade do sistema em malha fechada.

Um observador que tenha como ganho $\underline{K}_F = \begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} \end{bmatrix}^T$ posiciona todos os autovalores de $\left[\underline{A} - \underline{K}_F \underline{C} \underline{A} \right]$ em zero, garantindo estabilidade da malha.

Utilizando o estado $\underline{x}(k) = \begin{bmatrix} y(k) & y(k-1) & y(k-2) \end{bmatrix}^T$ e aplicando na equação (6.9), com o observador escolhido:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \Delta \underline{u}(k) + \underline{K}_F \left\{ \underline{y}_{k+1} - \underline{C} \left[\underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \Delta \underline{u}(k) \right] \right\} \quad (6.9)$$

Substituindo a equação (6.8) na equação (6.9):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{y}(k+1) \\ \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 2_{ny} & -1_{ny} & 0_{ny} \\ 1_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} \\ 0_{ny} & 1_{ny} & 0_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \\ \underline{y}(k-2) \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ 0_{ny} \\ 0_{ny} \end{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) + \\ &+ \begin{bmatrix} I_{ny} \\ 0_{ny} \\ 0_{ny} \end{bmatrix} \left\{ \underline{y}_{k+1} - \begin{bmatrix} I_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2_{ny} & -1_{ny} & 0_{ny} \\ 1_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} \\ 0_{ny} & 1_{ny} & 0_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \\ \underline{y}(k-2) \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ 0_{ny} \\ 0_{ny} \end{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \right\} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Desenvolvendo a expressão indicada em (6.14)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{y}(k+1) \\ \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 2_{ny} & -1_{ny} & 0_{ny} \\ 1_{ny} & 0_{ny} & 0_{ny} \\ 0_{ny} & 1_{ny} & 0_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \\ \underline{y}(k-2) \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k) \\ 0_{ny} \\ 0_{ny} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{y}_{k+1} - 2_{ny} \underline{y}(k) + \underline{y}(k-1) - \underline{S}_1 \Delta \underline{u}(k) \\ 0_{ny} \\ 0_{ny} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{y}(k+1) \\ \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 2_{ny} \underline{y}(k) - \underline{y}(k-1) \\ \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{y}_{k+1} - 2_{ny} \underline{y}(k) + \underline{y}(k-1) \\ 0_{ny} \\ 0_{ny} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{y}(k+1) \\ \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \underline{y}_{k+1} \\ \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.15)$$

A expressão indicada em (6.15) mostra que o observador escolhido atualiza o vetor de estados com os dados da planta, equivalente ao modelo de realinhamento.

7. MODELO DE REALINHAMENTO EM UM SISTEMA COM DINÂMICA GERAL E ORDEM GENÉRICA N_A E N_B

Pode-se transformar a equação diferencial de um modelo genérico em equações de

diferenças do tipo:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{i=nb} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{i=na} a_i z^{-i}}, \text{ onde } a_0 \text{ é igual a 1 e } b_0 \text{ normalmente igual a zero, pois uma entrada}$$

aplicada no instante k atual ainda não teria impacto sobre as saídas em um sistema causal.

Portanto,

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na}) = (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb})U(z)$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \dots + a_{na} z^{-na} Y(z) = b_1 z^{-1} U(z) + b_2 z^{-2} U(z) + \dots + b_{nb} z^{-nb} U(z) \quad (7.1)$$

Transformando a equação (7.1) em equação de diferenças:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_{na} y(k-na) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{nb} u(k-nb)$$

Estendendo ao problema multivariável, vem:

$$\underline{y}(k) + \sum_{i=1}^{na} \underline{A}_i \underline{y}(k-i) = \sum_{i=1}^{nb} \underline{B}_i \underline{u}(k-i) \quad (7.2)$$

Maciejowski [5] propôs definir um estado não mínimo composto das últimas n_a leituras da saída da planta e das últimas n_b entradas aplicadas à esta planta.

$$\underline{x}(k) = \left[\underline{y}(k) \quad \underline{y}(k-1) \quad \dots \quad \underline{y}(k-na+1) \quad \underline{u}(k-1) \quad \dots \quad \underline{u}(k-nb+1) \right]^T$$

A vantagem da escolha deste estado não mínimo é que o mesmo é sempre observável.

Convém lembrar ao leitor que o estado mínimo é definido como o estado que contém o menor número de variáveis que permite a representação correta do sistema.

A predição para um intervalo de tempo genérico k será:

$$\underline{y}(k) = -\underline{A}_1 \underline{y}(k-1) - \underline{A}_2 \underline{y}(k-2) - \dots - \underline{A}_{na} \underline{y}(k-na) + \underline{B}_1 \underline{u}(k-1) + \underline{B}_2 \underline{u}(k-2) + \dots + \underline{B}_{nb} \underline{u}(k-nb) \quad (7.3)$$

Escrevendo a equação (7.3) para a forma matricial e lembrando que as informações de estado referente ao passado podem ser reaproveitadas do estado anterior, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k-1) \\ \underline{y}(k-2) \\ \vdots \\ \underline{y}(k-na+1) \\ \underline{u}(k-1) \\ \underline{u}(k-2) \\ \vdots \\ \underline{u}(k-nb+1) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} -\underline{A}_1 & -\underline{A}_2 & -\underline{A}_3 & \cdots & -\underline{A}_{na-1} & -\underline{A}_{na} & \underline{B}_2 & \cdots & \underline{B}_{nb-2} & \underline{B}_{nb-1} & \underline{B}_{nb} \\ \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \vdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \vdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}(k-1) \\ \underline{y}(k-2) \\ \underline{y}(k-3) \\ \vdots \\ \underline{y}(k-na) \\ \underline{u}(k-2) \\ \underline{u}(k-3) \\ \vdots \\ \underline{u}(k-nb) \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \\ \underline{I} \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{u}(k-1) \quad (7.4)$$

$$\underline{x}(k) = \underline{A}\underline{x}(k-1) + \underline{B}\underline{u}(k-1)$$

A primeira linha compõe a predição de $y(k)$ a partir dos modelos A , matriz de estados, e B , matriz de entradas. As linhas seguintes permitem o deslocamento das informações do instante anterior para o instante seguinte.

A desvantagem do uso deste modelo seria o fato de ser posicional. Perez e Odloak [6] transformaram este modelo em incremental e aplicaram em um controlador preditivo robusto.

7.1. CASO GERAL DA ESTRATÉGIA DE REALINHAMENTO

Um processo pode ser representado por uma função de transferência que pode ser expressa na forma de equações de diferenças, conforme indicado na equação (7.2):

$$\begin{aligned} \underline{y}(z) &= \underline{HG}_p(x)\underline{u}(z) \\ \underline{y}(k) + \sum_{i=1}^{na} \underline{A}_i \underline{y}(k-i) &= \sum_{i=1}^{nb} \underline{B}_i \underline{u}(k-i) \quad (7.2) \end{aligned}$$

No caso padrão, este modelo é transformado para variáveis de estado e usado para fazer a predição, conforme mostrado anteriormente no capítulo 6. Ou seja, conhecido $x(0)$ e o modelo da planta, a predição indicada em (6.13) permite calcular todo vetor de predição.

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^c \end{bmatrix} = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\Delta\underline{u} \quad (6.13)$$

A função de um observador é estimar os estados a partir das saídas da planta de processo. Conforme as variáveis de estado escolhidas, necessita-se de um observador para estimar o estado $x(k)$ com a leitura feita a partir da planta.

Uma boa escolha de variáveis de estado pode ser a que utiliza diretamente o modelo indicado na equação (7.2) utilizando, como variáveis os resultados lidos da planta, que seriam o estado descrito por Maciejowski [5].

Como exemplo, pode-se considerar um sistema de segunda ordem, sem tempo morto, descrita na equação (7.5)

$$\underline{y}(k) + \underline{A}_1 \underline{y}(k-1) + \underline{A}_2 \underline{y}(k-2) = \underline{B}_1 \underline{u}(k-1) \quad (7.5)$$

$$\text{onde } \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \end{bmatrix} = ny \times ny; \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \end{bmatrix} = ny \times nu$$

Equação de predição das saídas para o instante $k+1$

$$\underline{y}^c(k+1) = -\underline{A}_1 \underline{y}^c(k) - \underline{A}_2 \underline{y}^c(k-1) + \underline{B}_1 \underline{u}(k) \quad (7.6)$$

Na predição indicada na equação (7.6) supõe-se que $\underline{y}^c(k)$ sejam as leituras da planta.

Equação de predição das saídas para o instante $k+2$:

$$\underline{y}^c(k+2) = -\underline{A}_1 \underline{y}^c(k+1) - \underline{A}_2 \underline{y}^c(k) + \underline{B}_1 \underline{u}(k+1) \quad (7.7)$$

Substituindo a equação (7.6) na equação (7.7)

$$\underline{y}^c(k+2) = -\underline{A}_1 \left[-\underline{A}_1 \underline{y}^c(k) - \underline{A}_2 \underline{y}^c(k-1) + \underline{B}_1 \underline{u}(k) \right] - \underline{A}_2 \underline{y}^c(k) + \underline{B}_1 \underline{u}(k+1)$$

$$\underline{y}^c(k+2) = \underline{A}_1^2 \underline{y}^c(k) + \underline{A}_1 \underline{A}_2 \underline{y}^c(k-1) - \underline{A}_1 \underline{B}_1 \underline{u}(k) - \underline{A}_2 \underline{y}^c(k) + \underline{B}_1 \underline{u}(k+1)$$

$$\underline{y}^c(k+2) = \left[\underline{A}_1^2 - \underline{A}_2 \right] \underline{y}^c(k) + \underline{A}_1 \underline{A}_2 \underline{y}^c(k-1) - \underline{A}_1 \underline{B}_1 \underline{u}(k) + \underline{B}_1 \underline{u}(k+1)$$

De forma similar, pode-se calcular a predição para os diversos intervalos de tempo até o horizonte de predição np .

7.2. MPC POSICIONAL E MPC INCREMENTAL

Adotando a predição das variáveis de estados via modelo em espaço de estados na forma posicional:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^c \end{bmatrix} = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \underline{u}(k)$$

O DMC procura minimizar a função objetivo indicada na equação (3.27) adaptada para o controlador posicional:

$$J = \underline{e}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}$$

$$J = \left(\underline{y}^c - \underline{y}^{SP} \right)^T \underline{W}^T \underline{W} \left(\underline{y}^c - \underline{y}^{SP} \right) + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}$$

Se o problema for sem restrições, a solução deste problema é dada pela equação:

$$\underline{u} = \left(\underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' = \underline{K}_{DMC} \underline{e}'$$

Desta forma, se o erro for constante, não serão geradas novas ações de controle, admitindo, por isso, *offset* ou desvio permanente entre *setpoint* e variável de processo.

Se o modelo for obtido com equações na forma incremental, a equação (6.13) mostra o cálculo para obtenção da predição:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}^c \end{bmatrix} = \underline{B}^* \underline{x}(k) + \underline{S}^* \Delta \underline{u} \quad (6.13)$$

O DMC procura minimizar a função objetivo indicada na equação (3.27), abaixo transcrita:

$$J = \underline{e}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e} + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u} \quad (3.27)$$

$$J = \left(\underline{y}^c - \underline{y}^{SP} \right)^T \underline{W}^T \underline{W} \left(\underline{y}^c - \underline{y}^{SP} \right) + \Delta \underline{u}^T \underline{R} \Delta \underline{u}$$

Se o problema for sem restrições, a solução deste problema é dada pela equação:

$$\Delta \underline{u} = \left(\underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{S} + \underline{R} \right)^{-1} \underline{S}^T \underline{W}^T \underline{W} \underline{e}' = \underline{K}_{DMC} \underline{e}' \Rightarrow \underline{u}_k = \underline{u}_{k-1} + \underline{K}_{DMC} \underline{e}'$$

Desta forma, se o erro for constante, haverá um incremento em cada interação nas ações de controle, perseguindo o erro até eliminação do *offset*. Esta é uma das vantagens de modelos na forma incremental.

A outra vantagem destes modelos é que dispensam o uso de um valor inicial para as entradas.

7.3. MODELO DE VARIÁVEIS DE ESTADO NA FORMA INCREMENTAL

Seja um modelo de variáveis em espaço de estados descrita como

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) = \underline{C}\underline{x}(k) \end{cases} \quad (7.8)$$

Deseja-se transformar este modelo posicional para a forma incremental, do tipo:

$$\begin{cases} \tilde{\underline{x}}(k+1) = \underline{A}\tilde{\underline{x}}(k) + \tilde{\underline{B}}\Delta\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) = \tilde{\underline{C}}\tilde{\underline{x}}(k) \end{cases}$$

Pode-se, para isso, adotar os seguintes métodos:

7.3.1. Aplicando a mesma equação (7.8) para predição do instante k , ou seja,

$\underline{x}(k) = \underline{A}\underline{x}(k-1) + \underline{B}\underline{u}(k-1)$, e subtraindo desta mesma equação (7.8), vem:

$$\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) = \underline{A}\underline{x}(k) - \underline{A}\underline{x}(k-1) + \underline{B}\underline{u}(k) - \underline{B}\underline{u}(k-1)$$

$$\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) - \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{A}\underline{x}(k-1) = \underline{B}\underline{u}(k) - \underline{B}\underline{u}(k-1)$$

$$\underline{x}(k+1) - [\underline{I} + \underline{A}]\underline{x}(k) + \underline{A}\underline{x}(k-1) = \underline{B}[\underline{u}(k) - \underline{u}(k-1)]$$

$$\underline{x}(k+1) - [\underline{I} + \underline{A}]\underline{x}(k) + \underline{A}\underline{x}(k-1) = \underline{B}[\Delta\underline{u}(k)]$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{B}[\Delta\underline{u}(k)] + [\underline{I} + \underline{A}]\underline{x}(k) - \underline{A}\underline{x}(k-1)$$

Definindo dois novos estados como:

$$\tilde{\underline{x}}_1(k) = \underline{x}(k)$$

$$\tilde{\underline{x}}_2(k) = [\underline{I} + \underline{A}]\underline{x}(k) - \underline{A}\underline{x}(k-1)$$

Desta forma, para o instante seguinte:

$$\tilde{\underline{x}}_1(k+1) = \underline{x}(k+1) = \underline{B}[\Delta\underline{u}(k)] + \tilde{\underline{x}}_2(k)$$

$$\tilde{\underline{x}}_2(k+1) = [\underline{I} + \underline{A}]\underline{x}(k+1) - \underline{A}\underline{x}(k) = [\underline{I} + \underline{A}]\{\underline{B}[\Delta\underline{u}(k)] + \tilde{\underline{x}}_2(k)\} - \underline{A}\tilde{\underline{x}}_1(k)$$

Passando para a notação matricial

$$\begin{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_1(k+1) \\ \tilde{\underline{x}}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{A} & \underline{I} + \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_1(k) \\ \tilde{\underline{x}}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ (\underline{I} + \underline{A})\underline{B} \end{bmatrix} \Delta\underline{u}(k)$$

$$\tilde{\underline{x}}(k+1) = \tilde{\underline{A}}\tilde{\underline{x}}(k) + \tilde{\underline{B}}\Delta\underline{u}(k)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x}(k) = \underline{C} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_1(k) \\ \tilde{\underline{x}}_2(k) \end{bmatrix} = \tilde{\underline{C}}\tilde{\underline{x}}(k)$$

Pode-se verificar que a matriz $\underline{\tilde{A}}$ tem os mesmos polos de A e, adicionalmente, nx polos, que é a dimensão dos vetores $\underline{\tilde{x}}_1(k)$ e $\underline{\tilde{x}}_2(k)$ no círculo unitário (+1).

Estes polos têm que ser estabilizados através de uma escolha adequada para o observador de estado, ou seja, a matriz $\underline{\tilde{A}} - K_F \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{A}}$ tem que apresentar todos os autovalores, polos, dentro do círculo unitário.

7.3.2.

A segunda opção de transformação de modelo posicional para incremental pode ser obtida a partir da definição de incremento $\Delta \underline{u}(k) = \underline{u}(k) - \underline{u}(k-1) \Rightarrow \underline{u}(k) = \underline{u}(k-1) + \Delta \underline{u}(k)$ (7.9), e voltando a equação (7.8), vem:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{u}(k)$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}[\underline{u}(k-1) + \Delta \underline{u}(k)] \quad (7.10)$$

Passando as equações (7.9) e (7.10) para a forma matricial, vem:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{u}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \Delta \underline{u}(k)$$

$$\underline{\tilde{x}}(k+1) = \underline{\tilde{A}}\underline{\tilde{x}}(k) + \underline{\tilde{B}}\Delta \underline{u}(k)$$

$$\underline{y} = \underline{C} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix} = \underline{\tilde{C}}\underline{\tilde{x}}(k)$$

Pode-se verificar que a matriz $\underline{\tilde{A}}$ tem os mesmos polos de A e, adicionalmente, $nx+nu$ polos, que é a dimensão dos vetores $\underline{x}(k)$ e $\underline{u}(k)$ no círculo unitário (+1).

Estes polos têm que ser estabilizados através de uma escolha adequada para o observador de estado, ou seja, a matriz $\underline{\tilde{A}} - K_F \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{A}}$ tem que apresentar todos os autovalores, polos, dentro do círculo unitário.

8. MELHORIAS NOS ALGORITMOS DE CONTROLE PREDITIVO

Os aspectos desfavoráveis do controlador preditivo impulsionaram a busca da melhoria dos algoritmos de controle preditivo. Destes aspectos, pode-se citar:

- (i) Engenharia de Software – problemas com muitas matrizes e dimensões de grande valor.
- (ii) Sintonia – busca-se a redução do número de parâmetros a serem ajustados, mantendo a performance do controlador aceitável.
- (iii) Melhoria da robustez quanto à estabilidade do controlador, principalmente quando:
 - a. o modelo real da planta não coincidir com o modelo previsto no controlador, que é considerado o caso nominal;
 - b. quando uma saída do processo se tornar ativa ou inativa no controle de faixas;
 - c. quando uma entrada do processo comutar da condição de restrição para a condição de não restrição, ou vice-versa;

Portanto, a robustez quanto à estabilidade deve ser analisada em 3 condições distintas:

- (i) Chaveamento das variáveis controladas da situação ativa para a situação inativa, ou da condição inativa para a condição ativa.
- (ii) Chaveamento das variáveis manipuladas da situação disponível para a situação indisponível ou da situação indisponível para a situação disponível.
- (iii) Incerteza de modelo – um controlador sintonizado para a condição nominal é robusto para variações em torno de 20% do modelo esperado pelo controlador. Além disso, a estabilidade pode ficar comprometida.

Os problemas indicados em (i) e (ii) foram resolvidos para os sistemas estáveis e para os sistemas integradores. O problema indicado em (iii) foi resolvido apenas para o problema estável.

8.1. CONTROLADORES NOMINALMENTE ESTÁVEIS

A literatura fornece diversos controladores nominalmente estáveis, mas, devido a incertezas de modelo ou restrições nas entradas de processo, tornam-se instáveis.

Como a estabilidade de um controlador pode ser garantida para o caso nominal?

- (i) Introdução de restrições que garantam que o estado final do sistema seja nulo.

Supondo um controlador com modelo em espaço de estados do tipo:

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) = \underline{C}\underline{x}(k) \end{cases}$$

A restrição de $\underline{x}(k+np) = 0$ pode ser incluída no problema de otimização do MPC. Essa restrição é válida para o problema regulatório, onde espera-se que o estado retorne à condição inicial após uma perturbação.

Esta técnica denomina-se *contração de estados*.

- (ii) Introdução de restrições que levem o estado final a um conjunto de estados onde existe um controlador estável, ver figura 8.1.

Neste caso o MPC leva o estado atual $x(k)$ para um dos possíveis conjuntos de estados A que, por sua vez, através de um DMC estável sem restrições, atinge o ponto ideal. Na prática, os processos possuem restrições e, portanto, este ponto ideal não é obtido. O processo fica limitado ao ponto de restrição.

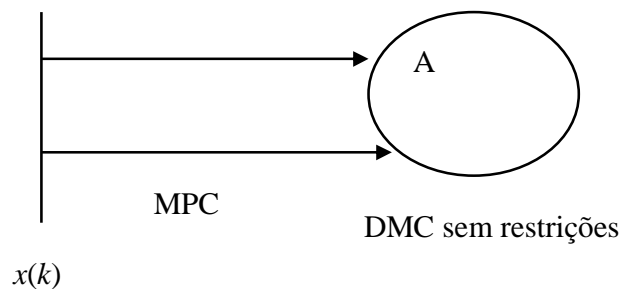


Figura 8.1

8.2. ESTABILIDADE VIA FUNÇÃO DE LYAPUNOV

Seja um sistema representado por:

$x(k+1) = f(x(k))$, onde f é uma função que correlaciona o estado anterior com o próximo estado.

Se a este sistema for possível associar uma função $V(x) \geq 0$, chamada de função de Lyapunov, tal que a norma do estado a cada instante leve a uma contração dessa função de Lyapunov, ou seja, $\|x(1)\| \geq \|x(2)\| \geq \|x(3)\| \dots$ implicar que $V(x_1) \geq V(x_2) \geq V(x_3) \dots$ e $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, então, o sistema é estável, ou seja, $x(k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

8.3. MPC DE HORIZONTE INFINITO (IHMP) [7]

Seja o sistema:

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) = \underline{C}\underline{x}(k) \end{cases}$$

onde C é a matriz identidade, ou, em outras palavras, o estado é medido.

Neste sistema, x e u representam variáveis incrementais.

Portanto, para um sistema estável, $x(\infty) \rightarrow 0$, o que traz, como consequência, **desde que não hajam perturbações**, $u(\infty) \rightarrow 0$, ou simplesmente, $u(k+m) = 0$.

Considerando o problema de otimização resolvido pelo MPC:

$$\min_{u(k), u(k+1), \dots, u(k+m-1)} J_k = \sum_{j=1}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{Q} \underline{x}(k+j) \quad (8.1) \quad + \sum_{j=0}^{m-1} \underline{u}^T(k+j) \underline{R} \underline{u}(k+j) \quad (8.2)$$

sujeito a:

$$\underline{u}_{\min} \leq \underline{u}(k+j) \leq \underline{u}_{\max}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

$$\underline{u}(k+j) = 0 \quad j \geq m$$

$$\text{onde } \underline{x} = \underline{e} = \underline{y} - \underline{y}^{SP}$$

Esta expressão indicada nas equações (8.1) e (8.2) assemelham-se as equações do MPC, com exceção que, a equação (8.1) representa um somatório infinito, quando na expressão original do controlador, esta soma estava limitada ao horizonte de predição np , finito.

O somatório indicado na equação (8.1) da função objetivo pode ser separado em duas parcelas:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{Q} \underline{x}(k+j) = \sum_{j=1}^{m-1} \underline{x}^T(k+j) \underline{Q} \underline{x}(k+j) + \sum_{j=m}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{Q} \underline{x}(k+j) \quad (8.3)$$

Com o objetivo de substituir a segunda parcela indicada em (8.3) por uma expressão equivalente, mas realizável:

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{Q} \underline{x}(k+j) = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{x}^T(k+m+j) \underline{Q} \underline{x}(k+m+j) \quad (8.4)$$

Mas, pela expressão do modelo em espaço de estados, pode-se escrever:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \underline{u}(k)$$

Para os instantes após o horizonte de controle m , $u(k+m+j)$ é nulo. Portanto,

$$\underline{x}(k+m+1) = \underline{A} \underline{x}(k+m) + \underline{B} \underline{u}(k+m) = \underline{A} \underline{x}(k+m)$$

$$\underline{x}(k+m+2) = \underline{A} \underline{x}(k+m+1) + \underline{B} \underline{u}(k+m+1) = \underline{A} \underline{x}(k+m+1) = \underline{A}^2 \underline{x}(k+m)$$

⋮

$$\underline{x}(k+m+j) = \underline{A}^j \underline{x}(k+m)$$

Portanto, a expressão em (8.4) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{Q} \underline{x}(k+j) = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{x}^T(k+m+j) \underline{Q} \underline{x}(k+m+j) = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{x}^T(k+m) \left[\underline{A}^j \right]^T \underline{Q} \underline{A}^j \underline{x}(k+m)$$

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{Q} \underline{x}(k+j) = \underline{x}^T(k+m) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left[\underline{A}^j \right]^T \underline{Q} \underline{A}^j \right) \underline{x}(k+m)$$

Se a matriz \underline{A} é estável, ou seja, autovalores dentro do círculo unitário, pode-se afirmar que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \underline{A}^j = 0$$

Definindo $\underline{\underline{P}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} [\underline{\underline{A}}^j]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^j \right)$, tem-se:

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{\underline{x}}^T(k+j) \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{x}}(k+j) = \underline{\underline{x}}^T(k+m) \underline{\underline{P}} \underline{\underline{x}}(k+m) \quad (8.5)$$

$$\underline{\underline{P}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} [\underline{\underline{A}}^j]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^j \right) = \underline{\underline{Q}} + [\underline{\underline{A}}]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}} + [\underline{\underline{A}}^2]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^2 + [\underline{\underline{A}}^3]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^3 + \dots + [\underline{\underline{A}}^{\infty}]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^{\infty} \quad (8.6)$$

Multiplicando-se a expressão indicada em (8.6) por $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{P}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}} + [\underline{\underline{A}}^2]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^2 + [\underline{\underline{A}}^3]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^3 + [\underline{\underline{A}}^4]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^4 + \dots + [\underline{\underline{A}}^{\infty+1}]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^{\infty+1} \quad (8.7)$$

Subtraindo a equação (8.6) da equação (8.7), vem:

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{P}} \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{P}} = [\underline{\underline{A}}^{\infty+1}]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^{\infty+1} - \underline{\underline{Q}} \quad (8.8)$$

Como foi admitida a hipótese de sistemas estáveis, a primeira parcela do lado direito da equação (8.8) é nula, e:

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{P}} \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{Q}} \quad (8.9)$$

A equação (8.9) é conhecida como equação de estabilidade de Lyapunov e pode ser calculada no Matlab através do comando *dlyap*.

Substituindo a equação (8.5) na equação (8.3), vem:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underline{\underline{x}}^T(k+j) \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{x}}(k+j) = \sum_{j=1}^{m-1} \underline{\underline{x}}^T(k+j) \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{x}}(k+j) + \underline{\underline{x}}^T(k+m) \underline{\underline{P}} \underline{\underline{x}}(k+m)$$

Portanto, o problema de controle com horizonte infinito se transforma em um problema de horizonte finito, onde np se resume a m , e o estado final passa a ter um peso diferente dos outros estados de transição.

Problema P

$$\min_{u(k), u(k+1), \dots, u(k+m-1)} J_k = \sum_{j=1}^{m-1} \underline{\underline{x}}^T(k+j) \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{x}}(k+j) + \underline{\underline{x}}^T(k+m) \underline{\underline{P}} \underline{\underline{x}}(k+m) + \sum_{j=0}^{m-1} \underline{\underline{u}}^T(k+j) \underline{\underline{R}} \underline{\underline{u}}(k+j)$$

sujeito a:

$$\underline{\underline{u}}_{\min} \leq \underline{\underline{u}}(k+j) \leq \underline{\underline{u}}_{\max}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

$$\underline{\underline{u}}(k+j) = 0 \quad j \geq m$$

onde $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{y}} - \underline{\underline{y}}^{SP}$

As seguintes observações podem ser feitas sobre o controlador do problema P

- (i) A função J_k é uma função de Lyapunov para o sistema $\underline{\underline{x}}(k+1) = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}(k) + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}(k)$, ou seja, se o problema P for viável no instante k , ele será viável em $k+1, k+2, \dots$ e a norma de $\underline{\underline{x}}(k+j)$ converge para a origem, ou seja, o sistema é estável.
- (ii) O controlador indicado no problema P exige o conhecimento do estado estacionário, $\underline{\underline{u}}$.

- (iii) Este controlador é estável para quaisquer valores de horizonte de controle m , horizonte de previsão np , fator de supressão R e peso das variáveis controladas W . O próximo subitem demonstra a estabilidade do controlador.

8.3.1. Prova da Estabilidade do Controlador

Suponha que no instante k , o problema P seja viável e a solução ótima, nesta iteração seja $[\underline{u}^*(k), \underline{u}^*(k+1), \dots, \underline{u}^*(k+m-1)]$. O controlador aplica a entrada $\underline{u}^*(k)$ ao processo e aguarda o próximo intervalo de tempo $k+1$ para resolver, novamente, o problema P de otimização. Ver figura 8.2.

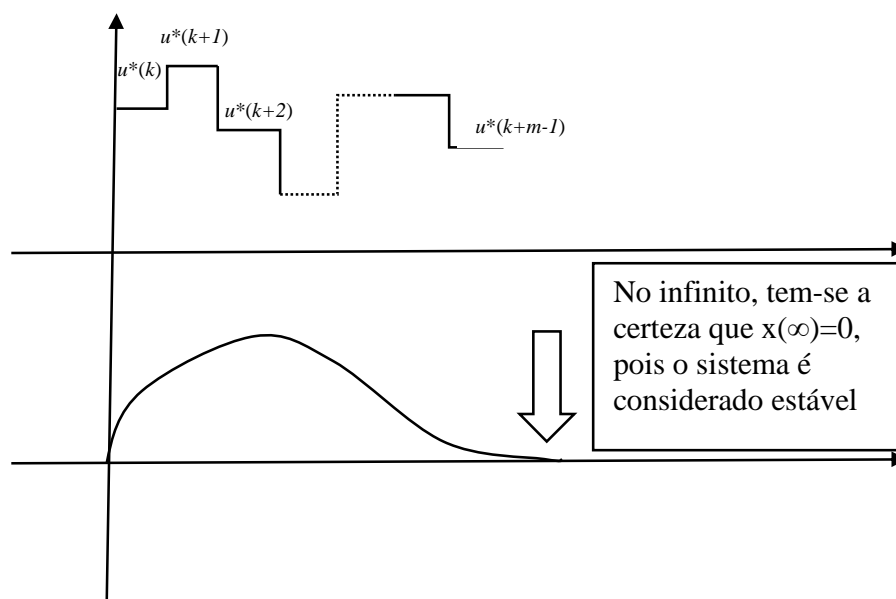


Figura 8.2

No instante $k+1$, supondo não haver perturbações, a sequência $[\underline{u}^*(k+1), \underline{u}^*(k+2), \dots, \underline{u}^*(k+m-1), 0]$ é uma solução viável para o problema P de otimização, embora, não necessariamente, a solução ótima. A função objetivo, neste instante $k+1$, pode ser expressa como:

$$J_k = \underbrace{\sum_{j=1}^{m-1} \underline{x}^T(k+j) \underline{Q} \underline{x}(k+j) + \underline{x}^T(k+m) \underline{P} \underline{x}(k+m)}_{\text{Retira-se o instante } k} + \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} \underline{u}^T(k+j) \underline{R} \underline{u}(k+j)}_{\text{Retira-se o instante } k}$$

$$J_{k+1} = J_k^* - \underline{x}^T(k) \underline{Q} \underline{x}(k) - \underline{u}^T(k) \underline{R} \underline{u}(k) \quad (8.10)$$

Desta forma, analisando a equação (8.10), pode-se afirmar que $J_{k+1} < J_k^*$, pois as matrizes \underline{Q} e \underline{R} são matrizes positivas e definidas, matrizes que satisfazem $\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} > 0 \quad \forall x \neq 0$ e $\underline{x}^T \underline{R} \underline{x} > 0 \quad \forall x \neq 0$, e, conseqüentemente, a solução ótima para este intervalo $k+1$ será menor que a solução do instante anterior k .

$$\left. \begin{array}{l} J_{k+1} < J_k^* \\ J_{k+1}^* < J_{k+1} \end{array} \right\} J_{k+1}^* < J_k^*$$

Como a função J_k é positiva, pois representa uma soma quadrática, então, a solução do problema P é uma função de Lyapunov para o sistema considerado, pois é positiva e sempre decrescente.

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0 \Rightarrow \|x(k)\| \rightarrow 0$.

O IHMPC é um controlador estável para qualquer horizonte de predição np , para qualquer horizonte de controle m , para qualquer peso de variável W e para qualquer fator de supressão R definidos.

8.4. LIMITAÇÕES DO MPC DE HORIZONTE INFINITO (IHMPC)

O IHMPC é um controlador estável para problemas nominais e para plantas estáveis, conforme mostrado no desenvolvimento anterior onde uma soma ilimitada foi transformada em uma soma limitada.

Pode-se citar como limitações do IHMPC proposto por Rawlings e Muske [7], os seguintes aspectos:

- (i) Não engloba o caso em que o sistema tem perturbações desconhecidas, pois neste caso, $x(\infty) \rightarrow 0$ não significa que $u(\infty) \rightarrow 0$, podendo, devido a estas perturbações, obter valores diferentes das variáveis manipuladas.
- (ii) O IHMPC apresenta o modelo posicional, ao invés do modelo incremental. Se for convertido o modelo posicional para o modelo incremental, como visto no capítulo 7, obtendo um modelo do tipo $\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\Delta u(k)$, a matriz \tilde{A} tem autovalores em 1 e, portanto, para o IHMPC implementado no modelo incremental, não se pode garantir que $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{A}^j = 0$.

8.5. MPC DE HORIZONTE INFINITO (IHMPC) COM MODELO INCREMENTAL

Conforme visto no capítulo 7, toda vez que é feita uma transformação para o modo incremental, aparecem nx polos em 1, além dos polos do sistema original.

Seja um sistema representado na forma incremental:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\Delta u(k)$$

A matriz de estados A pode ser fatorada da seguinte forma

$\underline{A} = \underline{V}\underline{D}\underline{V}^{-1}$, onde D é uma matriz que separa os polos estáveis dos polos em +1, do tipo:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

onde λ_i $i=1\dots n$ representam os autovalores com módulos menores que 1, portanto, os polos estáveis do sistema.

Desta forma, pode-se definir um novo estado da seguinte forma:

$$\underline{x}(k) = \underline{V}\underline{z}(k) \quad (8.11)$$

onde $\underline{z}(k)$ representa o novo estado.

Substituindo este novo estado nos sistema inicial

$$\underline{V}\underline{z}(k+1) = \underline{A}\underline{V}\underline{z}(k) + \underline{B}\Delta\underline{u}(k)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por \underline{V}^{-1}

$$\underline{z}(k+1) = \underline{V}^{-1}\underline{A}\underline{V}\underline{z}(k) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\Delta\underline{u}(k)$$

Mas:

$$\underline{\underline{D}} = \underline{V}^{-1}\underline{A}\underline{V}$$

Logo

$$\underline{z}(k+1) = \underline{\underline{D}}\underline{z}(k) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\Delta\underline{u}(k) \quad (8.12)$$

Da função objetivo do IHMPC, indicadas nas equações (8.1) e (8.2), e reescritas para a forma incremental:

$$\min_{\Delta\underline{u}(k), \Delta\underline{u}(k+1), \dots, \Delta\underline{u}(k+m-1)} J_k = \sum_{j=1}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{\underline{Q}}\underline{x}(k+j) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta\underline{u}^T(k+j) \underline{\underline{R}}\Delta\underline{u}(k+j)$$

A equação (8.1) pode ser escrita conforme a equação (8.3), aqui também repetida:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{\underline{Q}}\underline{x}(k+j) = \sum_{j=1}^{m-1} \underline{x}^T(k+j) \underline{\underline{Q}}\underline{x}(k+j) + \sum_{j=m}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{\underline{Q}}\underline{x}(k+j) \quad (8.3)$$

A segunda parcela da equação (8.3) pode ser escrita, em função do novo estado definido em (8.11), como:

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{\infty} \underline{x}^T(k+j) \underline{\underline{Q}}\underline{x}(k+j) &= \sum_{j=m}^{\infty} \underline{z}(k+j)^T \underline{V}^T \underline{\underline{Q}}\underline{V}\underline{z}(k+j) \\ \sum_{j=m}^{\infty} \underline{z}(k+j)^T \underline{V}^T \underline{\underline{Q}}\underline{V}\underline{z}(k+j) &= \sum_{j=0}^{\infty} \underline{z}(k+j+m)^T \underline{V}^T \underline{\underline{Q}}\underline{V}\underline{z}(k+j+m) \quad (8.13) \end{aligned}$$

A partir do instante m , $\Delta\underline{u}(k+m) = 0$. Portanto, a predição do novo estado depois deste instante m fica:

$$\begin{aligned} \underline{z}(k+m+1) &= \underline{D}\underline{z}(k+m) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\Delta u(k+m) = \underline{D}\underline{z}(k+m) \\ \underline{z}(k+m+2) &= \underline{D}^2\underline{z}(k+m) \\ &\vdots \\ \underline{z}(k+m+j) &= \underline{D}^j\underline{z}(k+m) \quad (8.14) \end{aligned}$$

Portanto, substituindo a expressão (8.14) na equação (8.13), vem

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \underline{z}(k+j+m)^T \underline{V}^T \underline{Q}\underline{V}\underline{z}(k+j+m) &= \sum_{j=0}^{\infty} \underline{z}(k+m)^T (\underline{D}^j)^T \underline{V}^T \underline{Q}\underline{V}\underline{D}^j \underline{z}(k+j+m) = \\ &= \underline{z}(k+m)^T \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\underline{D}^j)^T \underline{V}^T \underline{Q}\underline{V}\underline{D}^j \right) \underline{z}(k+m) \quad (8.15) \end{aligned}$$

A soma indicada em (8.15) não é limitada, tendo em vista que a matriz D tem autovalores iguais a 1.

Reescrevendo o novo estado z como composto de:

$$\underline{z} = [\underline{z}_e \quad \underline{z}_i]^T$$

onde

\underline{z}_e : n_e autovalores estáveis

\underline{z}_i ; n_i autovalores iguais a 1

Se for utilizado uma matriz auxiliar N tal que os autovalores localizados em +1 sejam anulados ou, de outra forma que, $\underline{z}_i(k+m) = 0$, pode-se definir esta matriz como:

$$\underline{N} = \text{diag} [0_{n_e \times n_e} \quad I_{n_i \times n_i}]$$

Desta forma, a restrição (8.16) garante que todos os autovalores instáveis sejam anulados.

$$\underline{N}\underline{z}(k+m) = 0 \quad (8.16)$$

$$[N] = (n_e + n_i) \times (n_e + n_i)$$

$$[z] = (n_e + n_i) \times 1$$

Do modelo descrito pela equação (8.12), abaixo repetida, pode-se inferir o valor do estado z no instante $k+2$, mais uma vez por processo recursivo:

$$\underline{z}(k+1) = \underline{D}\underline{z}(k) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\Delta u(k) \quad (8.12)$$

↓

$$\underline{z}(k+2) = \underline{D}\underline{z}(k+1) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\Delta u(k+1)$$

$$\underline{z}(k+2) = \underline{D} \left[\underline{D}\underline{z}(k) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\Delta u(k) \right] + \underline{V}^{-1}\underline{B}\Delta u(k+1)$$

$$\underline{z}(k+2) = \underline{D}^2\underline{z}(k) + \underline{D}\underline{V}^{-1}\underline{B}\Delta u(k) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\Delta u(k+1)$$

Para o instante $k+3$ tem-se:

$$\underline{z}(k+3) = \underline{D}\underline{z}(k+2) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+2)$$

$$\underline{z}(k+3) = \underline{D}\left[\underline{D}^2\underline{z}(k) + \underline{D}\underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+1)\right] + \underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+2)$$

$$\underline{z}(k+3) = \underline{D}^3\underline{z}(k) + \underline{D}^2\underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{D}\underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+1) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+2)$$

Generalizando para o instante $k+m$:

$$\underline{z}(k+m) = \underline{D}^m\underline{z}(k) + \underline{D}^{m-1}\underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k) + \underline{D}^{m-2}\underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+1) + \dots + \underline{V}^{-1}\underline{B}\underline{\Delta u}(k+m-1) \quad (8.17)$$

Compactando a expressão indicada em (8.17) através do uso de uma notação vetorial:

$$\underline{z}(k+m) = \underline{D}^m\underline{z}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u} \quad (8.18)$$

onde:

$$\underline{B} = \left[\underline{D}^{m-1}\underline{V}^{-1}\underline{B} \quad \underline{D}^{m-2}\underline{V}^{-1}\underline{B} \quad \dots \quad \underline{V}^{-1}\underline{B} \right]$$

$$\underline{\Delta u} = \left[\underline{\Delta u}(k) \quad \underline{\Delta u}(k+1) \quad \dots \quad \underline{\Delta u}(k+m-1) \right]^T$$

Substituindo a equação (8.18) na restrição (8.16):

$$\underline{N}\underline{z}(k+m) = \underline{N}\left[\underline{D}^m\underline{z}(k) + \underline{B}\underline{\Delta u}\right] = 0$$

$$\underline{N}\underline{D}^m\underline{z}(k) + \underline{N}\underline{B}\underline{\Delta u} = 0 \quad (8.19)$$

Reescrevendo a restrição (8.19) em função do estado original $x(k)$, pois $\underline{x}(k) = \underline{V}\underline{z}(k) \rightarrow \underline{z}(k) = \underline{V}^{-1}\underline{x}(k)$, tem-se que:

$$\underline{N}\underline{D}^m\underline{V}^{-1}\underline{x}(k) + \underline{N}\underline{B}\underline{\Delta u} = 0 \quad (8.20)$$

Desta forma, se a restrição (8.20) for atendida, pode-se reescrever a equação (8.15) separando-se em campos referentes aos polos estáveis e aos polos instáveis, aqui representados por zero ainda por conta da ação da restrição (8,20), de forma que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \underline{z}(k+j+m)^T \underline{V}^T \underline{QV} \underline{z}(k+j+m) = \underline{z}(k+m)^T \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\underline{D}^j)^T \underline{V}^T \underline{QV} \underline{D}^j \right) \underline{z}(k+m) =$$

$$\left[\underline{z}_e(k+m)^T \quad 0 \right] \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{\tilde{D}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^j \right\}^T \underline{V}^T \underline{QV} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{D}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{z}_e(k+m) \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde:

$\underline{z}_e(k+m)$: autovalores estáveis

$\underline{\tilde{D}}$: porção da matriz D associada aos autovalores estáveis, ou seja,

$$\underline{\tilde{D}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^j \right\}^T \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{V}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^j$$

Logo, a equação (8.15) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \underline{\underline{z}}(k+j+m)^T \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{V}} \underline{\underline{z}}(k+j+m) = \underline{\underline{z}}(k+m)^T \underline{\underline{P}} \underline{\underline{z}}(k+m) \quad (8.21)$$

Retornando a equação (8.21) ao estado original x do sistema, pois, $\underline{\underline{z}}(k) = \underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\underline{x}}(k)$, vem:

$$\underline{\underline{z}}(k+m)^T \underline{\underline{P}} \underline{\underline{z}}(k+m) = \underline{\underline{x}}(k+m)^T \left[\underline{\underline{V}}^{-1} \right]^T \underline{\underline{P}} \underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\underline{x}}(k+m) \quad (8.22)$$

Conforme visto na equação (8.12), abaixo reescrita, o sistema pode ser representado como:

$$\underline{\underline{z}}(k+1) = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{z}}(k) + \underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\underline{B}} \Delta \underline{\underline{u}}(k) \quad (8.12)$$

A equação de Lyapunov, conforme apresentada na equação (8.9), para o estado original $x(k)$ podia ser escrita como:

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{P}} \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{Q}} \quad (8.9)$$

onde a matriz P é, conforme indicado na equação (8.6):

$$\underline{\underline{P}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left[\underline{\underline{A}}^j \right]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^j \right) = \underline{\underline{Q}} + \left[\underline{\underline{A}} \right]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}} + \left[\underline{\underline{A}}^2 \right]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^2 + \left[\underline{\underline{A}}^3 \right]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^3 + \dots + \left[\underline{\underline{A}}^{\infty} \right]^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}^{\infty} \quad (8.6)$$

Para escrever a equação de Lyapunov para o novo estado $z(k)$, necessita-se obter a correlação entre o fator de peso Q do estado original e o fator de peso do novo estado $z(k)$. Observando a equação (8.21):

$$\sum_{j=0}^{\infty} \underline{\underline{z}}(k+j+m)^T \underbrace{\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{V}}}_{\underline{\underline{Q}}_z} \underline{\underline{z}}(k+j+m) = \underline{\underline{z}}(k+m)^T \underline{\underline{P}} \underline{\underline{z}}(k+m) \quad (8.21)$$

é possível concluir, por comparação, que:

$$\underline{\underline{Q}}_z = \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{V}}$$

Portanto, a equação de Lyapunov para o novo estado pode ser representada conforme equação (8.23)

$$\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{P}} \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{P}} = -\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{V}} \quad (8.23)$$

8.6. FUNÇÃO OBJETIVO DO MPC DE HORIZONTE INFINITO (IHMP) COM MODELO INCREMENTAL

Concluindo o que foi apresentado no item anterior, a função objetivo do IHMP pode ser representada como:

$$\min_{\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+m-1)} J_k = \sum_{j=1}^{m-1} \underline{\underline{x}}^T(k+j) \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{x}}(k+j) + \sum_{j=m}^{\infty} \underline{\underline{x}}^T(k+j) \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{x}}(k+j) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \underline{\underline{u}}^T(k+j) \underline{\underline{R}} \Delta \underline{\underline{u}}(k+j)$$

A parcela que apresenta a soma infinita, por sua vez, pode ser expressa, conforme equação (8.22),
 como:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \underline{z}(k+j+m)^T \underline{V}^T \underline{Q} \underline{V} \underline{z}(k+j+m) = \underline{z}(k+m)^T \underline{P} \underline{z}(k+m) = \underline{x}(k+m)^T \left[\underline{V}^{-1} \right]^T \underline{P} \underline{V}^{-1} \underline{x}(k+m) \quad (8.22)$$

Mas, conforme equação (8.18):

$$\underline{z}(k+m) = \underline{D}^m \underline{z}(k) + \underline{B} \underline{\Delta u} \quad (8.18)$$

Escrevendo a equação (8.18) em função do estado original e lembrando que:

$$\underline{z}(k) = \underline{V}^{-1} \underline{x}(k)$$

$$\underline{V}^{-1} \underline{x}(k+m) = \underline{D}^m \underline{V}^{-1} \underline{x}(k) + \underline{B} \underline{\Delta u}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por \underline{V} :

$$\underline{x}(k+m) = \underline{V} \underline{D}^m \underline{V}^{-1} \underline{x}(k) + \underline{V} \underline{B} \underline{\Delta u}$$

Desta forma o problema de otimização que representa um controlador de horizonte de predição infinito é:

$$\min_{\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+m-1)} J_k = \sum_{j=1}^{m-1} \underline{x}^T(k+j) \underline{Q} \underline{x}(k+j) + \left[\underline{V} \underline{D}^m \underline{V}^{-1} \underline{x}(k) + \underline{V} \underline{B} \underline{\Delta u} \right]^T \left[\underline{V}^{-1} \right]^T \underline{P} \underline{V}^{-1} \left[\underline{V} \underline{D}^m \underline{V}^{-1} \underline{x}(k) + \underline{V} \underline{B} \underline{\Delta u} \right] + \sum_{j=0}^{m-1} \underline{\Delta u}^T(k+j) \underline{R} \underline{\Delta u}(k+j)$$

sujeito a:

$$\underline{u}_{\min} \leq \underline{u}(k+j) \leq \underline{u}_{\max}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

$$-\underline{\Delta u}_{\max} \leq \underline{\Delta u}(k+j) \leq \underline{\Delta u}_{\max}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

$$\underline{N} \underline{D}^m \underline{V}^{-1} \underline{x}(k) + \underline{N} \underline{B} \underline{\Delta u} = 0 \quad (8.20)$$

onde $\underline{x} = \underline{e} = \underline{y} - \underline{y}^{SP}$

Lembrando que a condição de restrição indicada em (8.20) tem que ser satisfeita para serem cancelados os autovalores da matriz D que aparecem no círculo unitário por conta do modelo incremental.

A solução deste problema é um controlador MPC estável desde que a restrição em (8.20) seja satisfeita. É uma restrição rigorosa, podendo tornar o controlador não realizável.

9. MPC EM VARIÁVEIS DE ESTADO NA FORMA OPOM [8]

Em 2003, Rodrigues e Odloak [8] apresentaram um estado definido como OPOM, abreviatura para Output Predictive Oriented Module.

9.1. OPOM PARA O SISTEMA SISO

Seja um sistema 1x1 contínuo. Este sistema pode ser representado no domínio de Laplace por uma função polinomial do tipo:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{nb}s^{nb}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{na}s^{na}}$$

Este sistema também pode ser representado na forma de polos como:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{nb}s^{nb}}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_{na})}$$

onde $p_1, p_2 \dots p_{na}$ são os polos do sistema.

Admitindo a hipótese que o sistema é não integrador, ou seja, não possui polos em zero e, portanto, $p_1, p_2 \dots p_{na} \neq 0$ e aplicando um degrau unitário a entrada $u(s)$

$$Y(s) = G_p(s)U(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{nb}s^{nb}}{s(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_{na})}$$

Definindo a variável de saída $y(t)$ como $s(t)$, resposta ao degrau unitário:

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{nb}s^{nb}}{s(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_{na})} \right]$$

Separando em frações parciais e obtendo a inversa da transformada de Laplace

$$s(t) = \underbrace{C_0 + C_1e^{p_1t}}_{\text{1a ordem}} + \underbrace{C_2e^{p_2t} + \dots + C_{na}e^{p_{na}t}}_{\text{2a ordem}}$$

onde C_0, C_1, \dots, C_{na} são os coeficientes obtidos a partir da expansão em frações parciais.

Abaixo seguem dois exemplos para esta expansão:

(i) Exemplo 1: Seja $G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1 + 2s}{s^2 + 1,7s + 0,72} = \frac{1 + 2s}{(s + 0,8)(s + 0,9)}$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 + 2s}{s(s + 0,8)(s + 0,9)} \right] = L^{-1} \left[\frac{1,389}{s} + \frac{7,5}{(s + 0,8)} - \frac{8,889}{(s + 0,9)} \right]$$

Obtendo a transformada inversa de Laplace

$$s(t) = 1,389 + 7,5e^{-0,8t} - 8,889e^{-0,9t}$$

(ii) Exemplo 2: Seja um sistema com polos complexos. Neste caso, os coeficientes C_0, C_1, \dots, C_{na} também serão complexos.

$$G_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 1,6s + 1,28} = \frac{1}{(s + 0,8 + 0,8j)(s + 0,8 - 0,8j)}$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s + 0,8 + 0,8j)(s + 0,8 - 0,8j)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1/1,28}{s} - \frac{(1+j)/1,6^2}{(s + 0,8 + 0,8j)} - \frac{(1-j)/1,6^2}{(s + 0,8 - 0,8j)} \right]$$

$$s(t) = \frac{1}{1,28} - \frac{(1+j)}{1,6^2} e^{-(0,8+0,8j)t} - \frac{(1-j)}{1,6^2} e^{-(0,8-0,8j)t}$$

Suponha que, no instante kT atual, a predição da saída, sem considerar as ações de controle futuras, para um dado instante futuro t , seja dada por:

$$\left[y(kT + t) \right]_k = [P_0]_k + [P_1]_k e^{P_1 t} + [P_2]_k e^{P_2 t} + \dots + [P_{na}]_k e^{P_{na} t} \quad (9.1)$$

Esta predição pode ser separada em duas parcelas: a parcela estática, representada por $[P_0]_k$, e a parcela dinâmica, representada por $[P_1]_k e^{P_1 t} + [P_2]_k e^{P_2 t} + \dots + [P_{na}]_k e^{P_{na} t}$, onde $[P_i]_k$, onde i varia de 0 até na , é o vetor de predição.

No instante seguinte, $(k+1)T$, esta predição pode ser atualizada com a ação de controle aplicada no instante kT anterior à planta. Esta ação só terá consequências sobre a variável controlada a partir deste instante $(k+1)T$.

$$\begin{aligned} \left[y(kT + t) \right]_k^C &= [P_0]_k + [P_1]_k e^{P_1 t} + [P_2]_k e^{P_2 t} + \dots + [P_{na}]_k e^{P_{na} t} + \\ &+ \left[[C_0]_k + [C_1]_k e^{P_1 t} + [C_2]_k e^{P_2 t} + \dots + [C_{na}]_k e^{P_{na} t} \right] \Delta u(k) \end{aligned} \quad (9.2)$$

onde a primeira parcela da soma indica a predição sem a ação de controle desse instante k atual (embora existam as ações de controle dos instantes passados) enquanto que a segunda parcela desta mesma soma, a resposta ao degrau da planta.

$P_j, j = 1 \dots na$: Coeficientes da resposta ao degrau sem considerar a ação de controle do instante k

$C_j, j = 1 \dots na$: Coeficientes da resposta ao degrau considerando a ação de controle do instante k

A equação (9.2) pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} \left[y(kT + t) \right]_k^C &= \left\{ [P_0]_k + [C_0]_k \Delta u(k) \right\} + \left\{ [P_1]_k + [C_1]_k \Delta u(k) \right\} e^{P_1 t} + \left\{ [P_2]_k + [C_2]_k \Delta u(k) \right\} e^{P_2 t} + \dots \\ &+ \left\{ [P_{na}]_k + [C_{na}]_k \Delta u(k) \right\} e^{P_{na} t} \end{aligned}$$

Como já visto anteriormente, a predição, sem a ação de controle, do instante futuro $k+1$ neste instante $k+1$ é a predição do instante $k+2$ no instante k , efeito de translação do tempo. Ou seja, de forma genérica:

$[y(kT+t)]_{k+1} = [y(kT+t+T)]_k \rightarrow$ a predição de t feita no instante $k+1$ é a predição de $t+T$, onde T é o período de amostragem, feita no instante anterior.

Por exemplo, $[y(kT+1)]_{k+1} = [y(kT+2)]_k$

Desta forma:

$$[y(kT+t)]_{k+1} = [y(kT+t+T)]_k = \{[P_0]_k + [C_0]_k \Delta u(k)\} + \{[P_1]_k + [C_1]_k \Delta u(k)\} e^{P_1(t+T)} + \{[P_2]_k + [C_2]_k \Delta u(k)\} e^{P_2(t+T)} + \dots + \{[P_{na}]_k + [C_{na}]_k \Delta u(k)\} e^{P_{na}(t+T)}$$

$$[y(kT+t)]_{k+1} = \{[P_0]_k + [C_0]_k \Delta u(k)\} + \{[P_1]_k + [C_1]_k \Delta u(k)\} e^{P_1 T} e^{P_1 t} + \{[P_2]_k + [C_2]_k \Delta u(k)\} e^{P_2 T} e^{P_2 t} + \dots + \{[P_{na}]_k + [C_{na}]_k \Delta u(k)\} e^{P_{na} T} e^{P_{na} t}$$

Definindo:

$$\left. \begin{aligned} \{[P_0]_k + [C_0]_k \Delta u(k)\} &= [P_0]_{k+1} \\ \{[P_1]_k + [C_1]_k \Delta u(k)\} e^{P_1 T} &= [P_1]_{k+1} \\ &\vdots \\ \{[P_{na}]_k + [C_{na}]_k \Delta u(k)\} e^{P_{na} T} &= [P_{na}]_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Portanto:

$$[y(kT+t)]_{k+1} = [P_0]_{k+1} + [P_1]_{k+1} e^{P_1 t} + [P_2]_{k+1} e^{P_2 t} + \dots + [P_{na}]_{k+1} e^{P_{na} t} \quad (9.4)$$

onde $[y(kT+t)]_{k+1}$ é a predição feita no instante $k+1$ para o instante futuro t , sem considerar as ações de controle. Note que a equação (9.4) mostra que os coeficientes $P_j, j=1 \dots na$ são coeficientes que incluem ações passadas, mas não inclui a ação do instante atual.

Este vetor P , sendo atualizado a cada instante pela ação de controle do instante anterior, se assemelha a uma variável de estado, $\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\Delta u(k)$, e, portanto, este vetor pode ser considerado como um novo conceito de estado.

Transformando para notação matricial as definições do estado P indicadas nas equações (9.3), tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{na} \end{bmatrix}}_{x(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{P_1 T} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{P_2 T} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{P_{na} T} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{na} \end{bmatrix}}_{x(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 e^{P_1 T} \\ C_2 e^{P_2 T} \\ \vdots \\ C_{na} e^{P_{na} T} \end{bmatrix}}_B \Delta u(k) \quad (9.5)$$

onde se pode definir a matriz F , matriz que contém as componentes dinâmicas do sistema, como:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} e^{p_1 T} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{p_2 T} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{p_{na} T} \end{bmatrix}$$

Para se estimar, a partir do estado criado P , a variável de saída, tem-se a equação (9.4) que, escrita na forma matricial:

$$y(kT+t) = Cx(k) = \begin{bmatrix} 1 & e^{p_1 t} & e^{p_2 t} & \dots & e^{p_{na} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{na} \end{bmatrix}_K \quad (9.6)$$

A equação indicada em (9.6) é uma expressão geral, válida para qualquer instante t . Para o instante $t=0$, por exemplo, esta equação se transforma em:

$$y(kT+t) = x^T(k) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]}_C x(k)$$

9.2. OPOM PARA O SISTEMA MIMO

Seja um sistema MIMO representado por nu variáveis manipuladas e ny variáveis controladas, $ny \times nu$, contínuo. Este sistema pode ser representado no domínio de Laplace por uma função polinomial do tipo

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \text{ onde}$$

$$\underline{G}_p(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1nu}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2nu}(s) \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ G_{ny1}(s) & G_{ny2}(s) & \dots & G_{nynu}(s) \end{bmatrix}$$

Admitindo como hipótese que, para qualquer par $(y_i, u_j), i=1 \dots ny, j=1 \dots nu$, a função de transferência que correlaciona esta saída i com a entrada j , tem ordem na com polos distintos e diferentes de zero.

Portanto, a resposta ao degrau unitário, associado a este par ij , será:

$$s_{i,j}(t) = C_{i,j}^0 + C_{i,j,1}^d e^{p_{i,j,1}t} + C_{i,j,2}^d e^{p_{i,j,2}t} + \dots + C_{i,j,na}^d e^{p_{i,j,na}t} = C_{i,j}^0 + \sum_{l=1}^{na} C_{i,j,l}^d e^{p_{i,j,l}t} \quad (9.7)$$

onde:

$C_{i,j}^0$ componente estático da resposta ao degrau aplicado na variável manipulada j sobre a variável controlada i

$C_{i,j,l}^d e^{p_{i,j,l}t}$ componente dinâmica da resposta ao degrau aplicado na variável manipulada j sobre a variável controlada i

Mais uma vez, supondo que, num instante genérico kT , a predição para o instante futuro t , sem considerar ações de controles futuras, seja dada pela equação (9.1):

$$\left[y(kT+t) \right]_k = \left[P_0 \right]_k + \left[P_1 \right]_k e^{p_1 t} + \left[P_2 \right]_k e^{p_2 t} + \dots + \left[P_{na} \right]_k e^{p_{na} t} \quad (9.1)$$

Pode-se considerar cada parcela desta soma como um estado x_i . Assim,

$$\left[P_0 \right]_k = \left[x_1 \right]_k$$

$$\left[P_1 \right]_k e^{p_1 t} = \left[x_2 \right]_k$$

$$\left[P_2 \right]_k e^{p_2 t} = \left[x_3 \right]_k$$

⋮

$$\left[P_{na} \right]_k e^{p_{na} t} = \left[x_{na+1} \right]_k$$

Na verdade, este é o estado mostrado no item 9.1, definido na equação (9.5), apenas definindo cada ação de cada polo como um estado x_i .

Como é de conhecimento geral, se o sistema é estável, todos os polos estarão posicionados no plano semi-lateral esquerdo do plano complexo, o que permite afirmar que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[y(kT+t) \right]_k = \left[P_0 \right]_k = \left[x_1 \right]_k \quad (9.8)$$

Esta equação (9.8) mostra que o estado estacionário previsto faz parte da variável de estado e, portanto, mensurável, o que é uma vantagem.

A partir da equação da resposta ao degrau, indicada na equação (9.7), para o sistema multivariável, pode-se montar as seguintes matrizes, assim definidas:

$$\underline{\underline{C}}^0 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 & \dots & C_{1nu}^0 \\ C_{21}^0 & C_{22}^0 & \dots & C_{2nu}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{ny1}^0 & C_{ny2}^0 & \dots & C_{nynu}^0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{C}}^0 \in \mathbb{R}^{ny \times nu}$$

$$\underline{\underline{C}}^d = \begin{bmatrix} C_{111}^d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{112}^d & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & C_{11na}^d & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C_{121}^d & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & C_{122}^d & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{12na}^d & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_{1nu1}^d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & C_{1nu2}^d & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & C_{1nua}^d & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{211}^d & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & C_{212}^d & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{21na}^d & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_{ny1a}^d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & C_{ny1b}^d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & C_{nyma}^d \end{bmatrix}$$

Em uma notação compacta, pode-se escrever:

$$\underline{\underline{C}}^d = \text{diag} \left(C_{111}^d, C_{112}^d, \dots, C_{11na}^d, C_{121}^d, C_{122}^d, \dots, C_{12na}^d \dots C_{211}^d, C_{212}^d \dots C_{21na}^d \dots C_{ny11}^d \dots C_{ny1na}^d, \dots, C_{nymu1}^d \dots C_{nymuna}^d \right)$$

onde

$C_{ik1}^d \dots C_{ikna}^d$: coeficientes dinâmicos da resposta da variável controlada de número i ao degrau unitário aplicado à variável manipulada de número k

$$\underline{\underline{C}}^d \in \mathbb{C}^{ny.nu.na \times ny.nu.na}$$

A partir do estado definido em (9.5), $x(k) = [P_0 \ P_1 \ P_2 \ \dots \ P_{na}]^T$, podemos definir a equação em espaço de estados definida na equação (9.9), onde a componente estática é segregada da componente dinâmica.

$$\begin{bmatrix} \underline{x}^s(k+1) \\ \underline{x}^d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^s(k) \\ \underline{x}^d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C}^0 \\ \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} \end{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \quad (9.9)$$

$$\Rightarrow \underline{x}^s(k+1) = \underline{x}^s(k) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k)$$

$$\Rightarrow \underline{x}^d(k+1) = \underline{F} \underline{x}^d(k) + \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} \Delta \underline{u}(k)$$

$$\underline{y}(k) = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & \underline{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^s(k) \\ \underline{x}^d(k) \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

onde:

$\underline{x}^s(k) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{ny}]^T$, $\underline{x}^s \in \mathbb{R}^{ny \times 1}$, é a componente estática de cada variável controlada,

x_1 : predição para a saída controlada de número 1, quando o tempo tende a infinito. Equivalente ao $[P_0]_k$, ver equação (9.8).

x_2 : predição para a saída controlada de número 2, quando o tempo tende a infinito. Equivalente ao $[P_0]_k$, ver equação (9.8).

x_{ny} : predição para a última saída controlada, quando o tempo tende a infinito. Equivalente ao $[P_0]_k$, ver equação (9.8).

$\underline{x}^d(k) = [x_{ny+1} \quad x_{ny+2} \quad \cdots \quad x_{ny.nu.na+ny}]^T$, $\underline{x}^d \in \mathbb{R}^{ny.nu.na \times 1}$. São as componentes dinâmicas de cada variável de saída para cada variável de entrada. Correspondem as componentes dinâmicas da equação (9.1), ou seja, $[P_1]_k, [P_2]_k, \dots, [P_{na}]_k$,

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} e^{p_{11}T} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{p_{12}T} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{p_{ny.nu.na}T} \end{bmatrix},$$

ou, de forma compacta, $\underline{\underline{F}} = \text{diag}(e^{p_{11}T} \dots e^{p_{1na}T} e^{p_{121}T} \dots e^{p_{12na}T} \dots e^{p_{ny11}T} \dots e^{p_{ny.nu.na}T})$, onde $\underline{\underline{F}} \in \mathbb{C}^{ny.nu.na \times ny.nu.na}$.

A equação (9.9) mostra que as primeira ny linhas compõem o estado estacionário da planta e as demais linhas, $(ny-1).nu.na$, o estado dinâmico do sistema.

$$\underline{\underline{N}} = \left. \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}} \\ \underline{\underline{J}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{J}} \end{bmatrix} \right\} ny, \text{ onde } \underline{\underline{J}} = \left. \begin{bmatrix} \left. \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\} nu \\ \hline \left. \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\} nu \end{bmatrix} \right\} na, \underline{\underline{J}} \in \mathbb{R}^{nu.na \times nu}, \underline{\underline{N}} \in \mathbb{R}^{ny.nu.na \times nu}$$

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} \underline{\phi} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \underline{\phi} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \underline{\phi} \end{bmatrix}, [\underline{\underline{\phi}}] = ny \times nu.na.ny, \text{ onde } \underline{\phi} = \underbrace{[1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]}_{nu.na}$$

Exemplo: Seja um sistema de $ny=2$, $nu=2$ e $na=2$:

$$\underline{\underline{C}}^0 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ C_{21}^0 & C_{22}^0 \end{bmatrix}, C^d = \begin{bmatrix} C_{111}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{112}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{121}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{122}^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{211}^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{212}^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{221}^d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{222}^d \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} e^{p_{111}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{p_{112}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{p_{121}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{p_{122}T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{211}T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{212}T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{221}T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{222}T} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}^d \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} C_{111}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{112}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{121}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{122}^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{211}^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{212}^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{221}^d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{222}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{p_{111}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{p_{112}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{p_{121}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{p_{122}T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{211}T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{212}T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{221}T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{222}T} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}^d \underline{\underline{FN}} = \begin{bmatrix} C_{111}^d e^{p_{111}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{112}^d e^{p_{112}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{121}^d e^{p_{121}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{122}^d e^{p_{122}T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{211}^d e^{p_{211}T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{212}^d e^{p_{212}T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{221}^d e^{p_{221}T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{222}^d e^{p_{222}T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{111}^d e^{p_{111}T} & 0 \\ C_{112}^d e^{p_{112}T} & 0 \\ C_{121}^d e^{p_{121}T} & 0 \\ C_{122}^d e^{p_{122}T} & 0 \\ 0 & C_{211}^d e^{p_{211}T} \\ 0 & C_{212}^d e^{p_{212}T} \\ 0 & C_{221}^d e^{p_{221}T} \\ 0 & C_{222}^d e^{p_{222}T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^s \\ x_2^s \\ x_{111}^d \\ x_{112}^d \\ x_{121}^d \\ x_{122}^d \\ x_{211}^d \\ x_{212}^d \\ x_{221}^d \\ x_{222}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{p_{111}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{p_{112}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{121}T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{122}T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{211}T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{212}T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{221}T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{p_{222}T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^s \\ x_2^s \\ x_{111}^d \\ x_{112}^d \\ x_{121}^d \\ x_{122}^d \\ x_{211}^d \\ x_{212}^d \\ x_{221}^d \\ x_{222}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ C_{21}^0 & C_{22}^0 \\ C_{111}^d e^{p_{111}T} & 0 \\ C_{112}^d e^{p_{112}T} & 0 \\ C_{121}^d e^{p_{121}T} & 0 \\ C_{122}^d e^{p_{122}T} & 0 \\ 0 & C_{211}^d e^{p_{211}T} \\ 0 & C_{212}^d e^{p_{212}T} \\ 0 & C_{221}^d e^{p_{221}T} \\ 0 & C_{222}^d e^{p_{222}T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \end{bmatrix}$$

9.3. IHMPC com OPOM

Seja um sistema MIMO representado por nu variáveis manipuladas e ny variáveis e pelas equações definidas em (9.9) e (9.10).

A função objetivo a ser minimizada será:

$$\min_{\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+m-1)} J_k = \sum_{j=1}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \underline{u}^T(k+j) \underline{R} \Delta \underline{u}(k+j) \quad (9.11)$$

$$\text{onde } \underline{e}(k+j) = \underline{y}(k+j) - \underline{y}^{SP} = \underline{C} \underline{x}(k+j) - \underline{y}^{SP}$$

Como já visto anteriormente, o somatório infinito da função objetivo representada pela equação (9.11), problema do controlador com horizonte de predição infinito, pode ser decomposto em dois somatórios:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) = \sum_{j=1}^{m-1} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) + \sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) \quad (9.12)$$

O segundo somatório da equação (9.12) pode ser expresso como:

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) = \sum_{j=m}^{\infty} \left[\underline{y}(k+j) - \underline{y}^{SP} \right]^T \underline{Q} \left[\underline{y}(k+j) - \underline{y}^{SP} \right] \quad (9.13)$$

Pela equação (9.10), a seguir repetida:

$$\underline{y}(k) = \begin{bmatrix} \underline{I}_{ny} & \underline{\varphi} \\ & \underline{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^s(k) \\ \underline{x}^d(k) \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{I}_{ny} \underline{x}^s(k) + \underline{\varphi} \underline{x}^d(k) = \underline{x}^s(k) + \underline{\varphi} \underline{x}^d(k) \quad (9.14)$$

Substituindo a equação (9.14) na equação (9.13), vem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) &= \sum_{j=m}^{\infty} \left[\underline{x}^s(k) + \underline{\varphi} \underline{x}^d(k) - \underline{y}^{SP} \right]^T \underline{Q} \left[\underline{x}^s(k) + \underline{\varphi} \underline{x}^d(k) - \underline{y}^{SP} \right] \\ \sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\underline{x}^s(k+m+j) + \underline{\varphi} \underline{x}^d(k+m+j) - \underline{y}^{SP} \right]^T \underline{Q} \left[\underline{x}^s(k+m+j) + \underline{\varphi} \underline{x}^d(k+m+j) - \underline{y}^{SP} \right] \end{aligned} \quad (9.15)$$

Este somatório ocorre após o horizonte de controle, onde $\Delta \underline{u} = 0$.

Pelo modelo (9.9), a expressão para o componente estacionário do estado x a partir do instante de $k+m$, será:

$$j = 1 \rightarrow \underline{x}^s(k+m+1) = \underline{x}^s(k+m) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k) = \underline{x}^s(k+m) + \underline{C}^0 \times 0 = \underline{x}^s(k+m)$$

$$j = 2 \rightarrow \underline{x}^s(k+m+2) = \underline{x}^s(k+m+1) = \underline{x}^s(k+m)$$

Pelo modelo (9.9), a expressão para o componente dinâmico do estado x a partir do instante de $k+m$, será:

$$j = 1 \rightarrow \underline{x}^d(k+m+1) = \underline{F} \underline{x}^d(k+m) + \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} \Delta \underline{u}(k) = \underline{F} \underline{x}^d(k+m) + \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} 0 = \underline{F} \underline{x}^d(k+m)$$

$$j = 2 \rightarrow \underline{x}^d(k+m+2) = \underline{F} \underline{x}^d(k+m+1) = \underline{F}^2 \underline{x}^d(k+m)$$

⋮

$$j \rightarrow \underline{x}^d(k+m+j) = \underline{F}^j \underline{x}^d(k+m)$$

Substituindo estes resultados na expressão (9.15):

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\underbrace{\underline{x}^s(k+m+j)}_{\underline{x}^s(k+m)} + \underbrace{\underline{\varphi} \underline{x}^d(k+m+j)}_{\underline{F}^j \underline{x}^d(k+m)} - \underline{y}^{SP} \right]^T \underline{Q} \left[\underbrace{\underline{x}^s(k+m+j)}_{\underline{x}^s(k+m)} + \underbrace{\underline{\varphi} \underline{x}^d(k+m+j)}_{\underline{F}^j \underline{x}^d(k+m)} - \underline{y}^{SP} \right] \\ \sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\underline{x}^s(k+m) + \underline{\varphi} \underline{F}^j \underline{x}^d(k+m) - \underline{y}^{SP} \right]^T \underline{Q} \left[\underline{x}^s(k+m) + \underline{\varphi} \underline{F}^j \underline{x}^d(k+m) - \underline{y}^{SP} \right] \end{aligned} \quad (9.16)$$

Na expressão indicada pela equação (9.16), pode-se concluir que $\underline{\varphi} \underline{F}^j \underline{x}^d(k+m)$ tende a zero à medida que o tempo avança, pois o sistema é considerável estável e $\lim_{j \rightarrow \infty} \underline{F}^j = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\text{diag } e^{r_{ij} T} \right]^j = 0$. A componente estática $\underline{x}^s(k+m)$ mantém-se constante. Isso poderia significar que a função objetivo tenderia a infinito.

Para que a função objetivo seja limitada, deve-se impor a seguinte restrição ao problema do IHMPC com estado OPOM:

$$\underline{x}^s(k+m) - \underline{y}^{SP} = 0 \quad (9.17),$$

ou seja, a parte estática, que representa o valor final da variável, deve tender ao *set point*.

A restrição (9.17) deve ser reescrita em função do estado atual e as ações futuras. Para isso, a partir da equação (9.9) e, por processo recursivo, obtêm-se os valores de predição da componente estática para os diversos instantes de tempo:

$$\underline{x}^s(k+1) = \underline{x}^s(k) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k)$$

$$\underline{x}^s(k+2) = \underline{x}^s(k+1) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k+1) = \underline{x}^s(k) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k+1)$$

$$\underline{x}^s(k+3) = \underline{x}^s(k+2) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k+2) = \underline{x}^s(k) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k+2)$$

Logo, para o instante $k+m$

$$\underline{x}^s(k+m) = \underline{x}^s(k) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k+2) \dots + \underline{C}^0 \Delta \underline{u}(k+m-1) \quad (9.18)$$

Escrevendo a equação (9.18) para a notação matricial, vem:

$$\underline{x}^s(k+m) = \underline{x}^s(k) + \begin{bmatrix} \underline{C}^0 & \underline{C}^0 & \underline{C}^0 & \dots & \underline{C}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \Delta \underline{u}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+m-1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^s(k+m) = \underline{x}^s(k) + \underline{\tilde{C}}^0 \Delta \underline{u} \quad (9.19)$$

Substituindo a equação (9.19) na restrição (9.17), vem:

$$\underline{x}^s(k) + \underline{\tilde{C}}^0 \Delta \underline{u} - y^{SP} = 0$$

Definindo a função erro como $\underline{e}^s = \underline{x}^s(k) - y^{SP}$:

$$\underline{e}^s + \underline{\tilde{C}}^0 \Delta \underline{u} = 0 \quad (9.20)$$

Com a restrição (9.20) satisfeita, a soma infinita expressa na equação (9.16) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\underbrace{\underline{x}^s(k+m) - y^{SP}}_{=0} + \underline{\varphi} \underline{F}^j \underline{x}^d(k+m) \right]^T \underline{Q} \left[\underbrace{\underline{x}^s(k+m) - y^{SP}}_{=0} + \underline{\varphi} \underline{F}^j \underline{x}^d(k+m) \right]$$

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\underline{\varphi} \underline{F}^j \underline{x}^d(k+m) \right]^T \underline{Q} \left[\underline{\varphi} \underline{F}^j \underline{x}^d(k+m) \right]$$

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\underline{x}^d(k+m) \right]^T \left[\underline{F}^j \right]^T \underline{\varphi}^T \underline{Q} \underline{\varphi} \underline{F}^j \underline{x}^d(k+m)$$

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) = \left[\underline{x}^d(k+m) \right]^T \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left[\underline{F}^j \right]^T \underline{\varphi}^T \underline{Q} \underline{\varphi} \underline{F}^j \right] \underline{x}^d(k+m)$$

$$\text{Definindo } \underline{P} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\underline{F}^j \right]^T \underline{\varphi}^T \underline{Q} \underline{\varphi} \underline{F}^j \quad (9.21),$$

$$\sum_{j=m}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) = \left[\underline{x}^d(k+m) \right]^T \underline{P} \underline{x}^d(k+m) \quad (9.22)$$

Multiplicando a equação (9.21) por $\underline{F}^T \underline{F}$:

$$\underline{F}^T \underline{P} \underline{F} = \underline{F}^T \underline{\varphi}^T \underline{Q} \underline{\varphi} \underline{F} + \left(\underline{F}^2 \right)^T \underline{\varphi}^T \underline{Q} \underline{\varphi} \underline{F}^2 + \left(\underline{F}^3 \right)^T \underline{\varphi}^T \underline{Q} \underline{\varphi} \underline{F}^3 + \dots \quad (9.23)$$

Subtraindo (9.23) da equação (9.21) vem:

$$\underline{F}^T \underline{P} \underline{F} - \underline{P} = -\underline{\varphi}^T \underline{Q} \underline{\varphi} \quad (9.24)$$

A equação (9.24) é a equação de Lyapunov para este sistema.

Combinando as equações (9.11), (9.12) e (9.22), a função objetivo passa a ser expressa como:

$$\min_{\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+m-1)} J_k = \sum_{j=1}^{m-1} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) + \left[\underline{x}^d(k+m) \right]^T \underline{P} \underline{x}^d(k+m) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \underline{u}^T(k+j) \underline{R} \Delta \underline{u}(k+j)$$

onde $\underline{e}(k+j) = \underline{x}^s(k+j) + \underline{\varphi} \underline{x}^d(k+j) - y^{SP}$

Da equação (9.18) e para intervalos j inferiores ao horizonte de controle m

$$\underline{x}^s(k+j) = \underline{x}^s(k) + \underline{C}^0 \underline{\Delta u}(k) + \underline{C}^0 \underline{\Delta u}(k+1) + \underline{C}^0 \underline{\Delta u}(k+2) \dots + \underline{C}^0 \underline{\Delta u}(k+j-1) \quad (9.25)$$

Da mesma forma, a componente dinâmica pode ser obtida do modelo descrito na equação (9.9).

$$\underline{x}^d(k+1) = \underline{F} \underline{x}^d(k) + \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} \underline{\Delta u}(k)$$

Mais uma vez, por processo recursivo, vem:

$$\underline{x}^d(k+2) = \underline{F} \underline{x}^d(k+1) + \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} \underline{\Delta u}(k+1)$$

$$\underline{x}^d(k+2) = \underline{F} \left[\underline{F} \underline{x}^d(k) + \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} \underline{\Delta u}(k) \right] + \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} \underline{\Delta u}(k+1)$$

$$\underline{x}^d(k+2) = \underline{F}^2 \underline{x}^d(k) + \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} \underline{\Delta u}(k+1) + \underline{C}^d \underline{F}^2 \underline{N} \underline{\Delta u}(k)$$

Para um instante genérico j

$$\underline{x}^d(k+j) = \underline{F}^j \underline{x}^d(k) + \underline{C}^d \underline{F}^j \underline{N} \underline{\Delta u}(k) + \underline{C}^d \underline{F}^{j-1} \underline{N} \underline{\Delta u}(k+1) + \dots + \underline{C}^d \underline{F} \underline{N} \underline{\Delta u}(k+j-1) \quad (9.26)$$

Escrevendo a equação (9.25) na notação matricial, tem-se:

$$\bar{\underline{x}}^s = \bar{\underline{I}} \underline{x}^s(k) + \underline{C}^0_m \bar{\underline{\Delta u}} \quad (9.27)$$

onde:

$$\bar{\underline{x}}^s = \left[\underline{x}^s(k+1) \quad \underline{x}^s(k+2) \quad \dots \quad \underline{x}^s(k+m) \right]^T$$

$$\bar{\underline{I}} = \left[\underline{I} \quad \underline{I} \quad \dots \quad \underline{I} \right]^T$$

$$\underline{C}^0_m = \begin{bmatrix} \underline{C}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{C}^0 & \underline{C}^0 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{C}^0 & \underline{C}^0 & \underline{C}^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{C}^0 & \underline{C}^0 & \underline{C}^0 & \dots & \underline{C}^0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\underline{\Delta u}} = \left[\underline{\Delta u}(k) \quad \underline{\Delta u}(k+2) \quad \dots \quad \underline{\Delta u}(k+m-1) \right]^T$$

De forma análoga, para a equação (9.26)

$$\bar{\underline{x}}^d = \bar{\underline{F}}_x \underline{x}^d(k) + \bar{\underline{F}}_u \bar{\underline{\Delta u}} \quad (9.28)$$

onde

$$\bar{\underline{x}}^d = \left[\underline{x}^d(k+1) \quad \underline{x}^d(k+2) \quad \dots \quad \underline{x}^d(k+m) \right]^T$$

$$\bar{\underline{F}}_x = \left[\underline{F} \quad \underline{F}^2 \quad \dots \quad \underline{F}^m \right]^T$$

$$\bar{\underline{F}}_u = \begin{bmatrix} \underline{F} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{F}^2 & \underline{F} & 0 & \dots & 0 \\ \underline{F}^3 & \underline{F}^2 & \underline{F} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{F}^m & \underline{F}^{m-1} & \underline{F}^{m-2} & \dots & \underline{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{C}^d \underline{N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{C}^d \underline{N} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \underline{C}^d \underline{N} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{C}^d \underline{N} \end{bmatrix}$$

Utilizando as equações (9.27) e (9.28), a função objetivo do IHMPC fica:

$$J = \Delta \underline{u}^T \underline{H} \Delta \underline{u} + 2C_f^T \Delta \underline{u} + C$$

onde:

$$\underline{H} = \left[\underline{C}_m^0 + \underline{\varphi} \underline{F}_{\underline{u}} \right]^T \underline{Q}_{\underline{1}} \left[\underline{C}_m^0 + \underline{\varphi} \underline{F}_{\underline{u}} \right] + \underline{F}_{\underline{u}}^T \underline{Q}_{\underline{2}} \underline{F}_{\underline{u}} + \underline{R}_{\underline{1}}$$

$$C_f = \left[\underline{C}_m^0 + \underline{\varphi} \underline{F}_{\underline{u}} \right]^T \underline{Q}_{\underline{1}} \left[\underline{I} \underline{e}^s(k) + \underline{\varphi} \underline{F}_{\underline{x}} \underline{x}^d(k) \right] + \underline{F}_{\underline{u}}^T \underline{Q}_{\underline{2}} \underline{F}_{\underline{u}} \underline{x}^d(k)$$

$$C = \underline{e}(k)^T \underline{Q}_{\underline{e}} \underline{e}(k) + \left[\underline{I} \underline{e}^s(k) + \underline{\varphi} \underline{F}_{\underline{x}} \underline{x}^d(k) \right]^T \underline{Q}_{\underline{1}} \left[\underline{I} \underline{e}^s(k) + \underline{\varphi} \underline{F}_{\underline{x}} \underline{x}^d(k) \right] + \left[\underline{F}_{\underline{x}} \underline{x}^d(k) \right]^T \underline{Q}_{\underline{21}} \underline{F}_{\underline{x}} \underline{x}^d(k)$$

$$\underline{Q}_{\underline{1}} = \text{diag} \left[\underbrace{Q \quad Q \quad \dots \quad Q}_m \right]$$

$$\underline{Q}_{\underline{2}} = \text{diag} \left[\underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad P}_m \right]$$

$$\underline{R}_{\underline{1}} = \text{diag} \left[\underbrace{R \quad R \quad \dots \quad R}_m \right]$$

$$\underline{\varphi}_{\underline{1}} = \text{diag} \left[\underbrace{\varphi \quad \varphi \quad \dots \quad \varphi}_m \right]$$

$$\underline{e}(k) = \underline{y}(k) - y^{SP}$$

$$\underline{e}^s(k) = \underline{x}^s(k) - y^{SP} : \text{associados ao } \textit{offset} \text{ permitido pelo controlador}$$

O problema completo do IHMPC com OPOM, função objetivo e restrições, fica sendo:

$$\min_{\Delta \underline{u}} J = \Delta \underline{u}^T \underline{H} \Delta \underline{u} + 2C_f^T \Delta \underline{u} + C$$

sujeito a

$$\underline{e}^s + \underline{C}^0 \Delta \underline{u} = 0 \quad (9.20)$$

$$\underline{u}_{\min} \leq \underline{u} \leq \underline{u}_{\max}$$

$$-\Delta \underline{u}_{\max} \leq \Delta \underline{u} \leq \Delta \underline{u}_{\max}$$

A restrição (9.20) requer que o erro do estado estacionário previsto seja nulo, conforme figura 9.1. Isto pode ser visto lembrando que $\Delta \underline{u} = 0$ para $k > m$ e, se a restrição (9.20) for atendida, $\underline{e}^s = 0$.

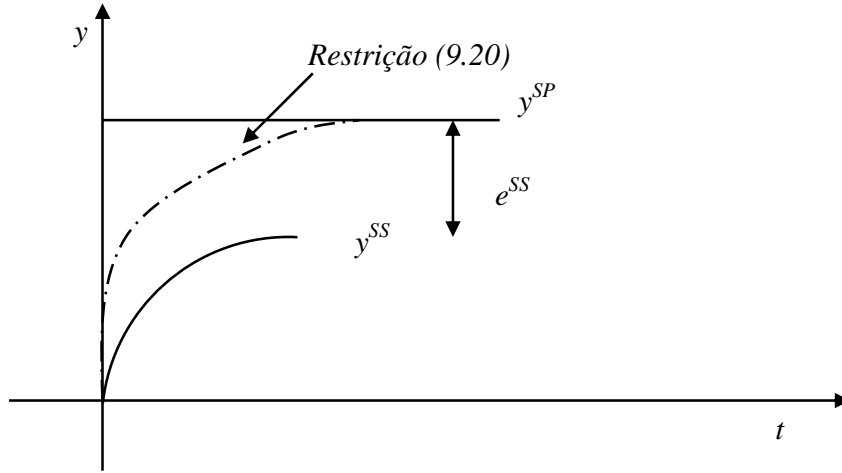


Figura 9.1

9.4. IHMPC ESTENDIDO

A função objetivo do IHMPC é indicada na equação (9.11), a seguir repetida:

$$\min_{\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+m-1)} J_k = \sum_{j=1}^{\infty} \underline{e}^T(k+j) \underline{Q} \underline{e}(k+j) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \underline{u}^T(k+j) \underline{R} \Delta \underline{u}(k+j) \quad (9.11)$$

onde $\underline{e}(k) = \underline{y}(k) - y^{SP}$

No IHMPC estendido, acrescenta-se um vetor folga no problema de otimização, relaxando a solução do mesmo. Esta folga, definida como $\underline{\delta}_k$, é ponderada por uma matriz de pesos definida como S .

Portanto, a função objetivo do problema de otimização descrito em (9.11) passa a ser:

$$\tilde{J}_k = \sum_{j=1}^{\infty} [\underline{y}(k) - y^{SP} - \underline{\delta}_k]^T (k+j) \underline{Q} [\underline{y}(k) - y^{SP} - \underline{\delta}_k] + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \underline{u}^T(k+j) \underline{R} \Delta \underline{u}(k+j) + \underline{\delta}_k^T \underline{S} \underline{\delta}_k \quad (9.29)$$

$\underline{\delta}_k \in \mathbb{R}^{ny}$ é um vetor de variáveis de folga sem restrições.

\underline{S} matriz de pesos positivos das variáveis de folga. É uma matriz diagonal que permite priorizar as folgas de cada variável controlada.

A última parcela da função objetivo penaliza as folgas para evitar que o problema de otimização encontre soluções com folgas excessivas, o que significa em termos práticos, *offsets* nas variáveis.

Desenvolvendo a função objetivo da equação (9.29) da mesma forma que foi feito para o IHMPC do OPOM, conclui-se que \tilde{J}_k será limitada se a restrição indicada em (9.30) for satisfeita.

$$\underline{e}^s + \tilde{\underline{C}}^0 \underline{\Delta u} - \underline{\delta}_k = 0 \quad (9.30)$$

Como a variável criada $\underline{\delta}_k$ não possui restrições, a restrição definida na equação (9.30) passa a ser sempre viável, facilitando encontrar soluções para o controlador IHMPC estendido, quando comparado com o OPOM rígido, descrito anteriormente.

Utilizando as equações descritas em (9.27) e (9.28), a nova função objetivo \tilde{J}_k se reduz a:

$$\tilde{J}_k = \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}^T & \underline{\delta}_k^T \end{bmatrix} \underline{\tilde{H}} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u} \\ \underline{\delta}_k \end{bmatrix} + 2 \tilde{C}_f^T \begin{bmatrix} \Delta \underline{u} \\ \underline{\delta}_k \end{bmatrix} + C$$

onde:

$$\underline{\tilde{H}} = \begin{bmatrix} \underline{H} & -\left[\underline{C}_m^0 + \underline{\varphi} \underline{F} \right]^T \underline{Q} \underline{I} \\ -\left[\underline{C}_m^0 + \underline{\varphi} \underline{F} \right]^T \underline{Q} \underline{I} & \underline{S} + \underline{I} \underline{Q} \underline{I} + \underline{Q} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_f = \begin{bmatrix} C_f \\ -\underline{I}^T \underline{Q} \left[\underline{I} e^s(k) + \underline{\varphi} \underline{F} x^d(k) \right] - \underline{Q} e(k) \end{bmatrix}$$

O IHMPC estendido resolve o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\Delta \underline{u}, \underline{\delta}_k} \tilde{J}_k = \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}^T & \underline{\delta}_k^T \end{bmatrix} \underline{\tilde{H}} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u} \\ \underline{\delta}_k \end{bmatrix} + 2 \tilde{C}_f^T \begin{bmatrix} \Delta \underline{u} \\ \underline{\delta}_k \end{bmatrix} + C$$

$$e^s + \underline{C}^0 \Delta \underline{u} - \underline{\delta}_k = 0 \quad (9.29)$$

$$\underline{u}_{\min} \leq \underline{u} \leq \underline{u}_{\max}$$

$$-\Delta \underline{u}_{\max} \leq \Delta \underline{u} \leq \Delta \underline{u}_{\max}$$

Pode-se demonstrar que \tilde{J}_k é uma função de Lyapunov, positiva e decrescente, para o sistema a ser controlado. Assim, o IHMPC estendido é garantidamente estável para qualquer configuração de variáveis controladas e variáveis manipuladas. Se o número de variáveis controladas for maior que o número de variáveis manipuladas disponíveis, pode-se ter *offset* em algumas controladas, mas com estabilidade garantida.

Um controlador robusto com incerteza de modelo da planta pode ser obtido a partir do controlador de horizonte infinito, IHMPC, com vários modelos de processo previstos por este controlador. A estabilidade é garantida para qualquer combinação linear entre os modelos inseridos no controlador.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Odloak Darci, Notas de Aula, 2003
- [2] TriSolutions, Apresentação Controle Avançado na RECAP, 2004
- [3] Cutler, 1979
- [4] Cutler, 1983
- [5] Maciejowski, 2002
- [6] Perez e Odloak, 2006
- [7] Rawlings, JB & Muske, “The establiity of constrained receding horizon control”, IEEE, Trans Autom Control, AC-38, 1512-16, 1993
- [8] Rodrigues & Odloak, 2003