

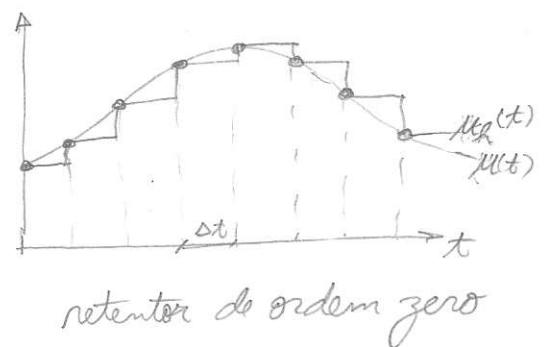
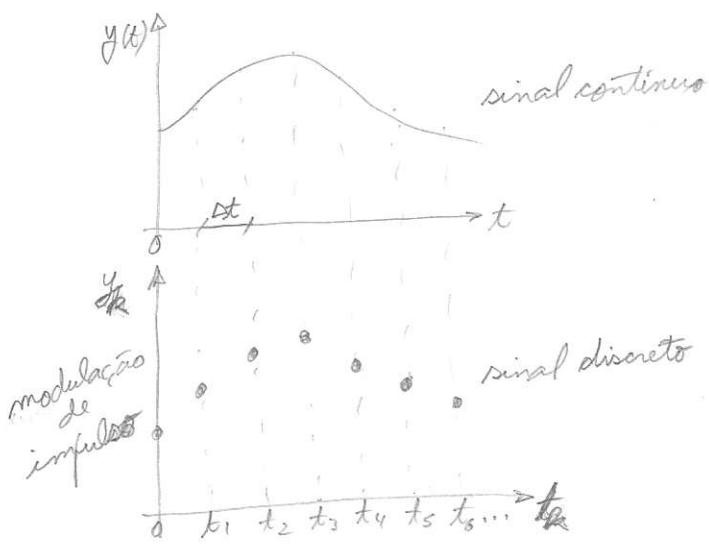
6 - Controle Digital

6.1 Amostragem e Filtragem de Dados

- tempo de amostragem : intervalo de tempo entre coletas sucessivas de dados, Δt

- taxa de amostragem : $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ ($\frac{\text{amostra}}{\text{tempo}}$)

- frequência de amostragem : $w_s = 2\pi f_s$



retentor de ordem zero

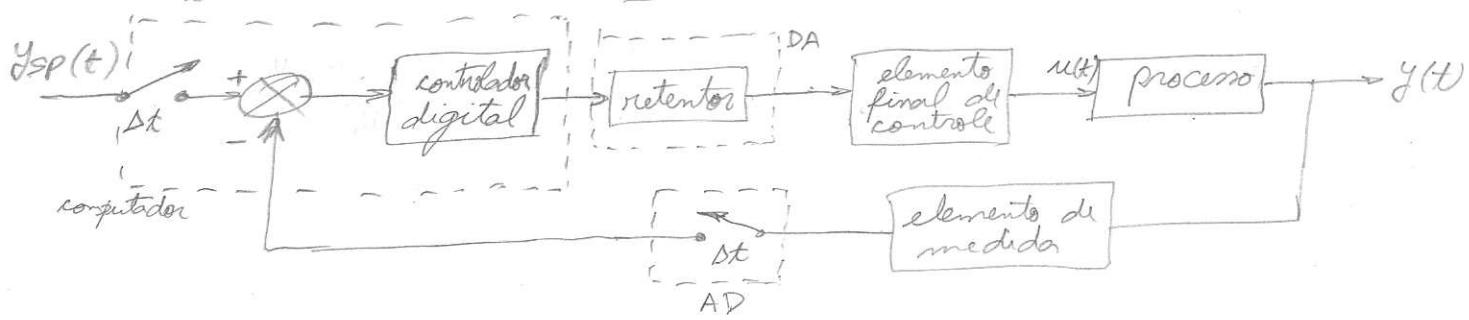


retentor de 1ª ordem

retentor de ordem zero: $M_k(t) = M_{k-1}$ para $t_{k-1} \leq t < t_k$

retentor de 1ª ordem: $M_k(t) = M_{k-1} + \left(\frac{t-t_{k-1}}{\Delta t}\right)(M_k - M_{k-1})$, $t_{k-1} \leq t \leq t_k$

NOTA: a conversão do sinal de controle digital para analógico é chamada de reconstrução de sinal.



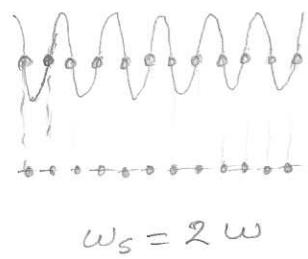
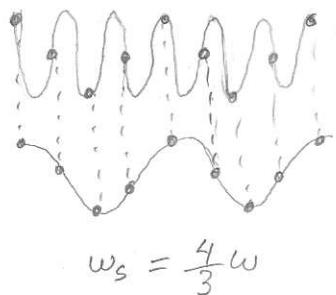
6.1.1 Seleção do tempo de amostragem

considerações:

- capacidade de amostragem e computação do computador
- tempo de amostragem adequado à dinâmica do processo

Teorema de Shannon: um sinal senoidal deve ser amostrado mais de duas vezes o seu período de modo a reproduzir o sinal original.

$$w_s > 2w$$



} sinal de
frequências aparentes
("aliasing")

Se $\Delta t >$ tempo de resposta do processo, então o controlador não conseguirá atuar sobre perturbações no processo, pois seus efeitos desaparecerão antes de qualquer ação. O controlador só será capaz de atuar no estado estacionário.

Razão sinal-ruido: $S/N = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} = \frac{\text{variação do sinal}}{\text{variação do ruído}}$

Baixos valores de S/N requerem o uso de filtros para eliminar os ruídos e prevenir o controlador de atuar sobre dinâmicas aparentes do processo.

* Tabela de seleção de tempos de amostragem: Tab. 22.1
(pg 535 - Seborg, Edgar, Mellichamp)

NOTA: para processos com tempo morto, um Δt pequeno pode aumentar o efeito do tempo morto.

6.1.2

Processamento de sinal e filtros

- fontes de ruído:
- dispositivos de medida
 - equipamentos elétricos
 - o próprio processo
 - { turbulências
 - misturas não ideais
 - flutuações da composição da matéria prima

Redução dos efeitos dos ruídos \Rightarrow uso de filtros ou condicionadores de sinal.



Filtros analógicos: implementados em circuitos elétricos

ex: filtro exponencial analógico: (filtro $\underset{\text{cicuito RC}}{RC}$)

$$\tau_F \frac{dy_f}{dt} + y_f(t) = y(t)$$

onde τ_F é a constante de tempo do filtro. Usado para amortecer flutuações de alta frequência (filtro passa baixa). Quando o filtro é usado para evitar a geração de freqüências aparentes devido a amostragem, ele é chamado de filtro anti-“aliasing”.

Para evitar a introdução de atrasos dinâmicos na malha de controle, τ_F deve ser muito menor que a constante de tempo dominante do processo, $\tau_{\text{máx}}$. Por outro lado, para maximizar ruídos com amplitudes elevadas, τ_F deve ser elevado.

$$G_F^{(0)} = \frac{1}{\tau_F s + 1} \quad (\text{ganhos} = 1), \quad G_F(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_F + 1}$$

$$AR_F = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau_F^2 + 1}} \quad ; \quad \phi = -\arctg(\omega\tau_F)$$

se a freqüência do ruído é ω_N , e projeta-se $\tau_F = 10/\omega_N$, então $AR_F \approx \frac{1}{10} \Rightarrow$ atenuação do ruído por um fator de 10.

Portanto: $w_{max} < w_f < w_n$, onde $\begin{cases} w_{max} = \frac{1}{\tau_{max}} \\ w_f = \frac{1}{\tau_f} \end{cases}$

Filtros digitais: implementados em computador.

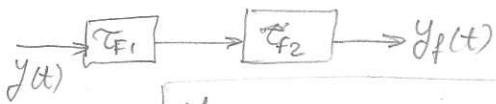
- filtro exponencial digital: $\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{fk} - y_{fk-1}}{\Delta t}$

$$y_{fk} = \alpha y_{fk} + (1-\alpha) y_{fk-1}, \text{ onde } \alpha = \frac{1}{\tau_f + \Delta t}$$

$$0 < \alpha \leq 1$$

$$\tau_f = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{e} \quad \tau_f \gg 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$$

- filtro exponencial duplo: dois filtros exponenciais em série, resultando em um filtro de 2^o ordem.



$$y_{fk} = \alpha \beta y_{fk} + (2 - \alpha - \beta) y_{fk-1} - (1 - \alpha)(1 - \beta) y_{fk-2}$$

$$\alpha = \frac{1}{\tau_{f1} + \Delta t} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{\tau_{f2} + \Delta t}$$

$$\text{para } \tau_{f1} = \tau_{f2} \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$y_{fk} = \alpha^2 y_{fk} + 2(1-\alpha) y_{fk-1} - (1-\alpha)^2 y_{fk-2}$$

este filtro é mais eficiente que o de 1^o ordem para ruídos de alta frequência, pois tem uma maior atenuação nestes sinais.

- filtro de média móvel: realiza a média aritmética de ^{um} número especificado de dados medidos passados.

$$y_{fk} = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k y_i \quad (y_{fk-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N}^{k-1} y_i)$$

$$\text{ou} \quad y_{fk} = y_{fk-1} + \frac{1}{N} (y_k - y_{k-N})$$

Este filtro é menos eficiente que o exponencial, pois o filtro exponencial pondera mais os dados mais recentes.

- filtro de ruído pontiagudo: usado para eliminar mudanças bruscas ("spike") do sinal, causadas por descargas elétricas no ambiente do sensor ou mal-funcionamento do instrumento de medida.

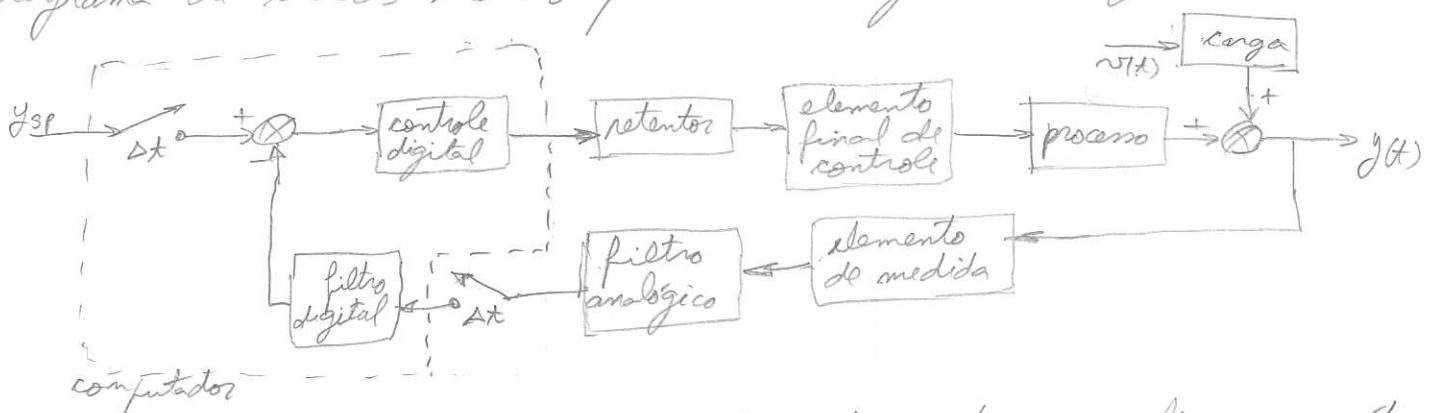


Se estes sinais ruinosos não forem eliminados, o controlador pode gerar uma mudança elevada na variável manipulada.

$$y_{fk} = \begin{cases} y_k & se |y_k - y_{fk-1}| \leq \Delta y \\ y_{fk-1} - \Delta y & se y_{fk-1} - y_k > \Delta y \\ y_{fk-1} + \Delta y & se y_{fk-1} - y_k < -\Delta y \end{cases}$$

onde Δy é a mudança máxima permitida em y .

Diagrama de blocos usando filtros analógicos e digitais:



O filtro analógico é particularmente eficiente para eliminar ruído de alta frequência e "aliasing".

NOTA: Como os filtros adicionam um elemento dinâmico na malha de controle que causa um atraso de fase, a margem de estabilidade do controlador fica reduzida. Portanto o controlador deve ser reajustado após a introdução de filtros. Ações derivativas podem compensar o efeito do filtro, pois introduzem adiantamento de fase, mas podem amplificar o ruído, portanto só devem ser usadas em ambientes ruinosos quando for introduzido um filtro eficiente.

6.2 Desenvolvimento de Modelos Discretos

6.2.1 Diferenças finitas

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

usando aproximação de 1^o ordem explícita (Euler explícito):

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} \approx f(x_{k-1}, u_{k-1}), \quad O(\Delta t)$$

$$\therefore x_k = x_{k-1} + \Delta t f(x_{k-1}, u_{k-1}), \quad \text{relação de recorrência}$$

$$\text{ex: } \tau \frac{dx}{dt} + x(t) = u(t), \quad x(0) = 0$$

$$x_k = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)x_{k-1} + \frac{\Delta t}{\tau} u_{k-1}$$

$$\frac{\Delta t}{\tau} < 2 \quad (\text{estabilidade})$$

(ver Tabela 23.1
Soborg, Edgar, Mell.)

$$\text{Aproximação de 2^o ordem: } \frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}{(\Delta t)^2}, \quad O(\Delta t)^2$$

6.2.2 Discretização exata para sistemas lineares

Se a variável de entrada for mantida constante entre os tempos de amostragem, então pode-se obter uma discretização exata para processos descritos por equações diferenciais lineares.

$$\text{ex: } \tau \frac{dx}{dt} + x(t) = u(t)$$

$$\text{se } u(t) = u(0) \Rightarrow x[\rho X(0) + x(0)] + x(0) = \frac{u(0)}{\rho}$$

$$X(0) = \frac{1}{\rho + \frac{1}{\tau}} \left(x(0) + \frac{u(0)}{\tau \rho} \right)$$

$$\text{e } x(t) = x(0) e^{-t/\tau} + (1 - e^{-t/\tau}) u(0)$$

$$\text{ou } x(t) = x(t_0) e^{-(t-t_0)/\tau} + (1 - e^{-(t-t_0)/\tau}) u(t_0)$$

pendo a condição inicial de cada período de amostragem dada por $x[(k-1)\Delta t]$ e $u(t) = u[(k-1)\Delta t]$ para $(k-1)\Delta t \leq t \leq k\Delta t$ constante, tem-se

$$x(t) = x(k\Delta t) = x[(k-1)\Delta t] e^{-\Delta t/\tau} + (1 - e^{-\Delta t/\tau}) u[(k-1)\Delta t]$$

ou $x_k = e^{-\Delta t/\tau} x_{k-1} + (1 - e^{-\Delta t/\tau}) u_{k-1}$

ex: $G(D) = \frac{X(D)}{U(D)} = \frac{k(\tau_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$

tem -x

$$x_k + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} = b_0 u_{k-1} + b_1 u_{k-2}$$

onde $a_1 = -e^{-\Delta t/\tau_1} - e^{-\Delta t/\tau_2}$

$$a_2 = e^{-\Delta t/\tau_2} \cdot e^{-\Delta t/\tau_2}$$

$$b_0 = k \left(1 + \frac{\tau_a - \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\Delta t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - \tau_a}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\Delta t/\tau_2} \right)$$

$$b_1 = k \left[e^{-\Delta t(\tau_1 + \tau_2)} + \frac{\tau_a - \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\Delta t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - \tau_a}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\Delta t/\tau_1} \right]$$

no estado estacionário: $x_k = x_{k-1} = x_{k-2} = \bar{x}$

$$\frac{\bar{x}}{u} = \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1 + a_2} = k = G(0)$$

6.2.3 Ajuste de dados

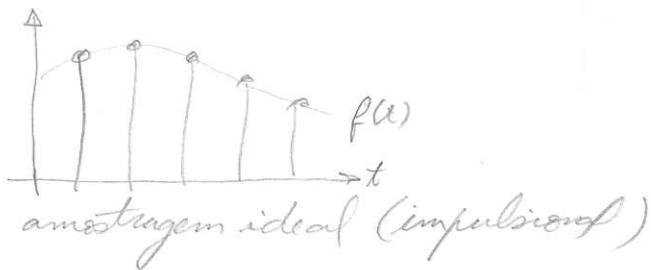
Da mesma forma que os modelos contínuos, os modelos discos podem ser usados para prever o comportamento do processo e serem ajustados a dados experimentais:

$$J = \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2, \text{ função objetivo}$$

onde $\hat{y}_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots + b_0 u_{k-1} + b_1 u_{k-2} + \dots$

a_i e b_i são os parâmetros do modelo a serem ajustados.

6.3 Transformada Z



sinal amostrado: $f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t)$, formado por uma sequência de impulsos ou funções delta de Dirac.

$$\int_{k\Delta t^-}^{k\Delta t^+} f^*(t) dt = f(k\Delta t), \text{ pois } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Aplicando a transformada de Laplace em $f^*(t)$:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t) e^{-k\Delta t s} = \mathcal{L}[f^*(t)]$$

definindo $z = e^{s\Delta t}$, tem-se a transformada Z de $f^*(t)$:

$$F(z) = Z[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$$

Portanto, a transformada Z pode ser obtida através da transformada de Laplace, fazendo $z = e^{s\Delta t}$.

Função degrau unitário: $f(t) = 1, t \geq 0$

$$f^*(t) = 1, t \geq 0$$

$$\therefore f_k = 1 \quad \forall k \geq 0 \quad \text{e} \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$

$$\text{para } |z^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

NOTA: $|z^{-1}| < 1 \Rightarrow e^{-s\Delta t} < 1 \Rightarrow s > 0$, que é a mesma condição para a transformada de Laplace.

Função exponencial: $f(t) = e^{-at}$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak\Delta t} z^{-k}$$

a série converge se $|e^{-a\Delta t} z^{-1}| < 1 \Rightarrow \Delta t > -a$:

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{1 - e^{-a\Delta t} z^{-1}}} = \frac{z}{z - e^{-a\Delta t}}, |z| > e^{-a\Delta t}$$

Função geométrica: $f(t) = a^t$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{k\Delta t} z^{-k}, |a^{\Delta t} z^{-1}| < 1$$

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{1 - a^{\Delta t} z^{-1}}} = \frac{z}{z - a^{\Delta t}}, |z| > |a^{\Delta t}|$$

Função rampa: $f(t) = t$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k\Delta t z^{-k}, \text{ mas}$$

$$\frac{dG(z)}{dz} = - \sum_{k=0}^{\infty} k g(k\Delta t) z^{-k-1} = \frac{-1}{\Delta t z} \sum_{k=0}^{\infty} k \Delta t g(k\Delta t) z^{-k} = -\frac{1}{\Delta t z} \mathcal{Z}[tg(t)]$$

$$\text{fazendo } g(t)=1 \Rightarrow \mathcal{Z}[t] = -z \Delta t \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{\Delta t z}{(z-1)^2}$$

$$\boxed{F(z) = \frac{\Delta t z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}} = \frac{\Delta t z}{(z-1)^2}, |z| > 1$$

6.3.1 Propriedades da transformada \mathcal{Z}

1) linearidade: $\mathcal{Z}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{Z}[f(t)] + b\mathcal{Z}[g(t)]$

2) translação real: $\mathcal{Z}[f(t-d\Delta t)] = z^{-d} F(z)$
onde que $f(t)=0, t < 0$

$$\text{prova: } \mathcal{Z}[f(t-d\Delta t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t - d\Delta t) z^{-k}$$

fazendo $j = k-d$

$$\mathcal{Z}[f(t-d\Delta t)] = \sum_{j=-d}^{\infty} f(j\Delta t) z^{-j-d}$$

$$\text{como } f(j\Delta t) = 0 \text{ para } j < 0 \Rightarrow \mathcal{Z}[f(t-d\Delta t)] = z^{-d} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} f(j\Delta t) z^{-j}}_{\mathcal{Z}[f(t)]}$$

$$3) \text{ translação complexa: } \mathcal{Z}[e^{-at}f(t)] = F(z e^{at})$$

$$4) \text{ teorema do valor inicial: } \lim_{k \rightarrow 0} f(k\Delta t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$5) \text{ teorema do valor final: } \lim_{k \rightarrow \infty} f(k\Delta t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z)$$

$$(1-z^{-1})F(z) = (1-z^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t) z^{-k} = \{ f(0) + [f(\Delta t) - f(0)]z^{-1} + \dots \}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \{ f(0) + [f(\Delta t) - f(0)]z^{-1} + [f(2\Delta t) - f(\Delta t)]z^{-2} + \dots \} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k\Delta t).$$

6) transformada Z modificada: usada quando o tempo morto não é múltiplo do tempo de amostragem:

$$\tau_d = (d+\sigma)\Delta t \quad \text{onde } \begin{cases} 0 < \sigma < 1 \\ d \text{ inteiro positivo} \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[f(t-\tau_d)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t - d\Delta t - \sigma\Delta t) z^{-k},$$

fazendo $m = 1-\sigma$ e $\ell = k-d-1$, temos

$$\mathcal{Z}[f(t-\tau_d)] = \sum_{\ell=-d-1}^{\infty} f(\ell\Delta t + m\Delta t) z^{-\ell-d-1}$$

$$= z^{-d-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell\Delta t + m\Delta t) z^{-\ell} \equiv \underline{F(z, m)}$$

onde $f(k\Delta t) = 0, k < 0$

6.3.2 Transformada inversa

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = f^*(t) = \{f(k\Delta t)\} \rightarrow \text{sequência de pontos.}$$

NOTA: a inversão para $f(t)$ não é única, pois a inversão da transformada \mathcal{Z} resulta em pontos discretos somente, sendo que pode-se passar diversas funções contínuas por estes pontos.

1) Expansão em frações parciais:

$$F(z) = z^{-d} \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad d: \text{tempo morto}, \quad m > m$$

$$Q(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}$$

$$P(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}$$

sendo r_1, r_2, \dots, r_m as raízes de $Q(z) = 0$

$$F(z) = \frac{z^{-d} P(z)}{(1 - r_1 z^{-1})(1 - r_2 z^{-2}) \dots (1 - r_m z^{-m})}$$

$$F(z) = z^{-d} \left[\frac{c_1}{1 - r_1 z^{-1}} + \frac{c_2}{1 - r_2 z^{-2}} + \dots + \frac{c_m}{1 - r_m z^{-m}} \right]$$

tem-se então:

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = f(k\Delta t - d\Delta t) = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{c_1 z^{-d}}{1 - r_1 z^{-1}}\right) + \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{c_2 z^{-d}}{1 - r_2 z^{-2}}\right) + \dots + \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{c_m z^{-d}}{1 - r_m z^{-m}}\right)$$

$$f_{k-d} = c_1 r_1^{k-d} + c_2 r_2^{k-d} + \dots + c_m r_m^{k-d}$$

NOTA: se $m \leq m$ usar outro método

- se $0 \leq r_i \leq 1 \quad \forall i=1, \dots, m$, então

$$f(k\Delta t) = c_1 e^{-q_1 k\Delta t} + c_2 e^{-q_2 k\Delta t} + \dots + c_m e^{-q_m k\Delta t}$$

$$\text{onde } q_i = -\frac{1}{\Delta t} \ln r_i$$

- se a_0, a_1, \dots, a_d forem nulos o sistema é irrealizável (ações futuras)

2) Divisão longa (ou direta)

$$F(z) = z^{-d} \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta t) z^{-k} = z^{-d} (f(0) + f(\Delta t) z^{-1} + f(2\Delta t) z^{-2} + \dots) \\ = z^{-d} (f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots)$$

$$F(z) = z^{-d} \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m})}{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n})} = z^{-d} (c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots)$$

$$\underline{a_0 = 1}$$

$$f_0 = c_0 = \frac{b_0}{a_0} = b_0$$

$$f_1 = c_1 = \frac{b_1}{a_0} - \frac{b_0 a_1}{a_0^2} = b_1 - b_0 a_1$$

$$f_2 = c_2 = b_2 - \frac{b_0 a_2}{a_0} - \frac{b_1 a_1}{a_0} + \frac{b_0 a_1^2}{a_0} = b_2 - b_0 a_2 - b_1 a_1 + b_0 a_1^2$$

NOTA: se aparecer alguma potência positiva de z , o sistema é irrealizável.
(ações futuras)

3) Integral de contorno

$$f(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{k-1} dz$$

que pode ser obtida pela teoria dos resíduos sobre um dado contorno C .

6.3.3 Função de transferência



$$Y(s) = G(s) U^*(s) \xrightarrow[\text{convolução}]{\text{por}} y(t) = \int_0^t g(t-\tau) u^*(\tau) d\tau$$

como $u^*(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta t) \delta(\tau - k\Delta t)$, tem-se

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta t) \int_0^t g(t-\tau) \delta(\tau - k\Delta t) d\tau, \quad \text{mas}$$

$$\int_0^t g(t-\tau) \delta(\tau - k\Delta t) d\tau = g(t - k\Delta t) \quad \therefore \quad \left[\int_0^t f(\tau) \delta(\tau - x) d\tau \right] = \begin{cases} f(x), & t \geq x \\ 0, & t < x \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(t - k\Delta t) u(k\Delta t)$$

para $t = l\Delta t$:

$$y(l\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(l\Delta t - k\Delta t) u(k\Delta t) ; \quad Y(z) = \mathcal{Z}[y(t)]$$

$$Y(z) = \sum_{l=0}^{\infty} y(l\Delta t) z^{-l} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(l\Delta t - k\Delta t) u(k\Delta t) z^{-l}$$

fazendo: $p = l - k$:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=-k}^{\infty} g(p\Delta t) u(k\Delta t) z^{-(p+k)}$$

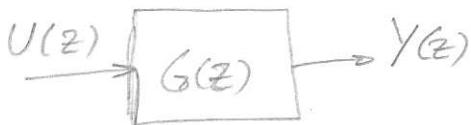
sendo $g(p\Delta t) = 0 \quad \forall p < 0$:

$$Y(z) = \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} g(p\Delta t) z^{-p}}_{G(z)} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta t) z^{-k}}_{U(z)}$$

$$G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} g(p\Delta t) z^{-p}$$

chamada de função de transferência de pulso

ganho: $K = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z)$



Uma função de transferência de pulso representa a relação dinâmica entre a entrada e saída de um processo, tendo uma correspondência única com uma equação de diferença:

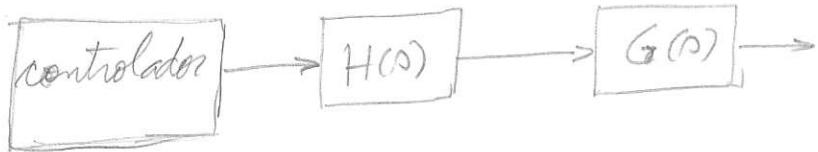
$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_m y_{k-m} = b_0 u_{k-d} + b_1 u_{k-d-1} + \dots + b_{m-d} u_{k-d-m}$$

como $\mathcal{Z}[y_{k-l}] = \mathcal{Z}[y(k\Delta t - l\Delta t)] = z^{-l} Y(z)$, tem-se

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \dots + a_m z^{-m} Y(z) = b_0 z^{-d} U(z) + \dots + b_m z^{-d-m} U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^{-d} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})}{(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m})} U(z)$$

Função de transferência com retentor de ordem zero:



Como a maioria dos sistemas de controlo digital utilizam um retentor para converter o sinal digital do controlador em um sinal analógico, é conveniente incorporar o retentor na função de transferência de pulso.

$$\mathcal{Z}[H(s)G(s)] \equiv HG(z) \neq H(z)G(z)$$

Para um retentor de ordem zero:

$$h_o(t) = s(t) - s(t-\Delta t) \quad \xrightarrow{\text{função degrau unitária}}$$

$$H_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\rho \Delta t}}{s} = \frac{1 - e^{-\rho \Delta t}}{s}$$

NOTA : $H_o(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}} = 1$

$$\therefore H_o(z)G(z) = G(z) \neq H_oG(z).$$

$$\mathcal{Z}[H_o(s)G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-\rho \Delta t}}{s} G(s)\right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

NOTA : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} H_oG(z) = G(s)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} G(z) \neq G(s)$$

Ex: $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} ; H_o(s) = \frac{1 - e^{-\rho \Delta t}}{s}$

$$H_o(s)G(s) = (1 - e^{-\rho \Delta t}) \frac{1}{s(\tau s + 1)} = (1 - e^{-\rho \Delta t}) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right)$$

$$H_oG(z) = \mathcal{Z}[H_o(s)G(s)] = (1 - z^{-1}) \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\rho \Delta t/\tau} z^{-1}} \right]$$

$$H_o G(z) = \frac{z^{-1} (1 - e^{-\Delta t/\tau})}{1 - e^{-\Delta t/\tau} z^{-1}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

fazendo $a_1 = -e^{-\Delta t/\tau}$

$$b_1 = 1 + a_1$$

tem-se: $H_o G(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \Rightarrow y_k + a_1 y_{k-1} = b_1 u_{k-1}$

$$y_k = -a_1 y_{k-1} + b_1 u_{k-1}$$

6.3.4 Localização de zeros e polos

$$G(p) = \frac{K/\tau}{p + 1/\tau} \Rightarrow p_p = -1/\tau$$

$$G(z) = \frac{K/\tau}{1 - e^{-\Delta t/\tau} z^{-1}} \Rightarrow z_p = e^{-\Delta t/\tau} \quad (z = e^{\sigma s t})$$

Polo real:

$$\rho_p < 0 \Rightarrow 0 < z_p < 1$$

$$\rho_p = 0 \Rightarrow z_p = 1$$

$$\rho_p > 0 \Rightarrow z_p > 1$$

Polo complexo: $\rho_p = \alpha \pm \omega_i \Rightarrow z_p = e^{\alpha s t}, e^{\pm \omega s t i}$
 $z_p = e^{\alpha s t} (\cos \omega s t \pm j \sin \omega s t)$

$$z_p = \alpha^* \pm \omega^* i \Rightarrow \alpha^* = e^{\alpha s t} \cos \omega s t = e^{\alpha s t} \cos \frac{2\pi f w}{\omega_s}$$

$$\omega^* = e^{\alpha s t} \sin \omega s t = e^{\alpha s t} \sin \frac{2\pi f w}{\omega_s}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$(w^* > 0) 0 < w < \frac{\omega_s}{4} \quad (w^* < 0) \frac{3\omega_s}{4} < w < \omega_s \Rightarrow z_p \text{ no } 1^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ quadrante } (\alpha^* > 0)$$

$$w = \frac{\omega_s}{4} \Rightarrow \alpha^* = 0, \omega^* > 0$$

$$w = \frac{\omega_s}{2} \Rightarrow \alpha^* < 0, \omega^* = 0$$

$$(w^* > 0) \frac{\omega_s}{4} < w < \frac{\omega_s}{2} \quad (w^* < 0) \frac{\omega_s}{2} < w < \frac{3\omega_s}{4} \Rightarrow z_p \text{ no } 2^\circ \text{ e } 3^\circ \text{ quadrante } (\alpha^* < 0)$$

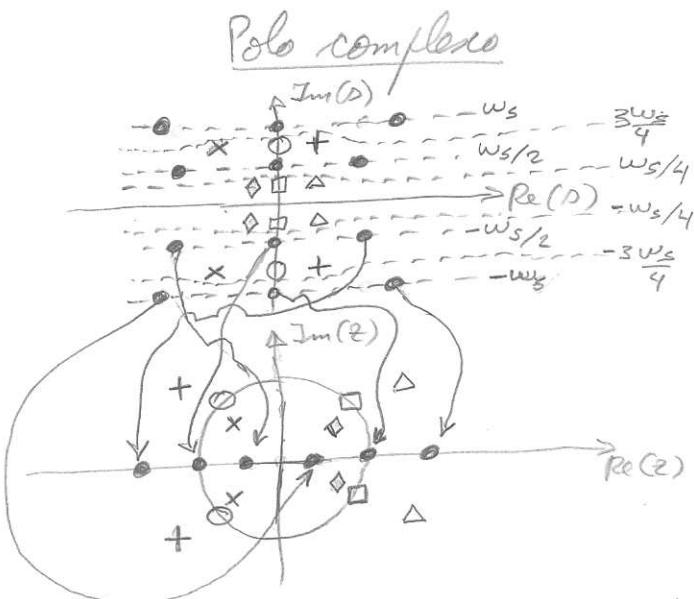
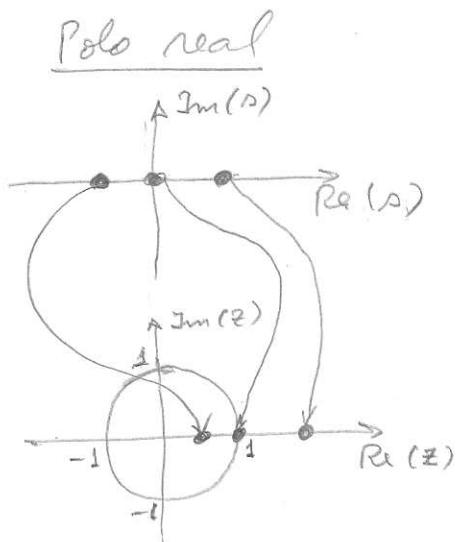
$$w = \frac{3}{4}\omega_s \Rightarrow \alpha^* = 0, \omega^* < 0$$

$$w = \omega_s \Rightarrow \alpha^* > 0, \omega^* = 0$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow |z_p| < 1$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow |z_p| = 1 ; \alpha > 0 \Rightarrow |z_p| > 1$$

Ver Figuras 24.2 (pág 568) e 24.6 (pág 582) - Edgar, Seborg, Melo



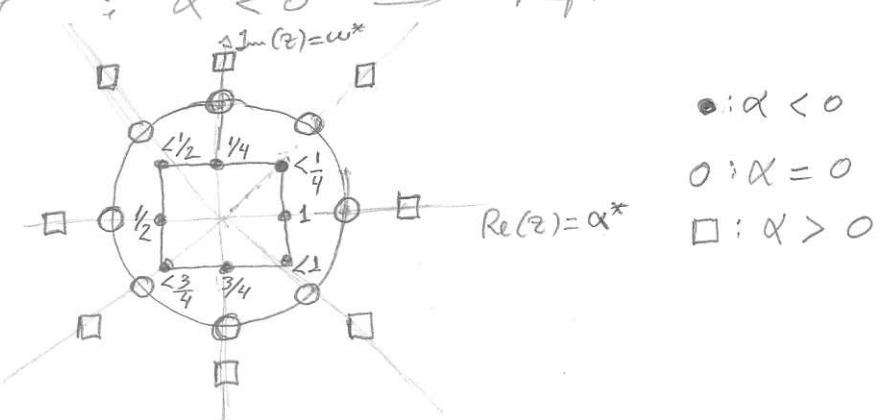
⇒ Resposta oscilatória ⇒ $\omega \neq 0$ ou $\begin{cases} \alpha^* < 0, \text{ e } \omega^* \\ \alpha^* > 0 \text{ e } \omega^* \neq 0 \end{cases}$

NOTA: para $\omega = m \frac{\omega_s}{2}$ ou $\omega = n \omega_s$ (m inteiro)

o par complexo de polos em s reduz a um polo real em z . Por exemplo, um sistema contínuo de 2^o ordem pode ser representado por um sistema discreto de 1^o ordem. Como $\alpha^* < 0$ é sempre oscilatório, um sistema discreto de 1^o ordem pode oscilar (fato que não ocorre em sistemas contínuos de 1^o ordem).

⇒ Sistema instável : $\alpha > 0 \Rightarrow |z_p| > 1$

⇒ Sistema estável : $\alpha < 0 \Rightarrow |z_p| < 1$



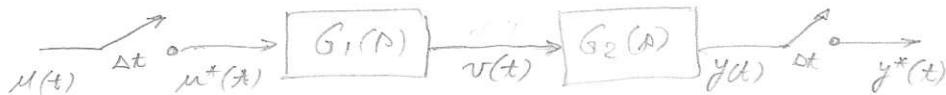
6.4 Sistemas em Malha Aberta



$$Y(D) = G(D) U^*(D) \rightarrow Y^*(D) = [G(D) U^*(D)]^* = G^*(D) U^*(D)$$

$$Y(z) = G(z) U(z)$$

a) sistemas em série com amostragem nos extremos:



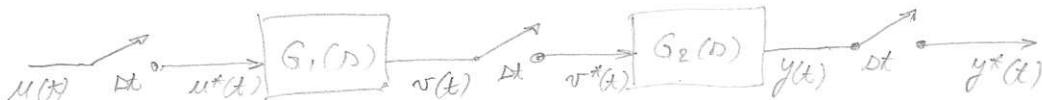
$$V(D) = G_1(D) U^*(D)$$

$$Y(D) = G_2(D) G_1(D) U^*(D) \Rightarrow Y^*(D) = [G_2(D) G_1(D) U^*(D)]^*$$

$$Y^*(D) = [G_2(D) G_1(D)]^* U^*(D) \therefore Y(z) = \mathcal{Z}[G_2(D) G_1(D)] U(z)$$

$$\mathcal{Z}[G_2(D) G_1(D)] = G_2 G_1(z) \neq G_2(z) G_1(z)$$

b) sistemas em série com amostragem entre eles:



$$V^*(D) = G_1^*(D) U^*(D) ; Y^*(D) = G_2^*(D) V^*(D)$$

$$\therefore Y^*(D) = G_2^*(D) G_1^*(D) U^*(D)$$

$$\text{e } Y(z) = G_2(z) G_1(z) U(z) \neq G_2 G_1(z) U(z)$$

$$\text{Ex: } G_1(D) = \frac{1}{D} ; G_2(D) = \frac{1}{2D+1} ; U(t) = 1 \rightarrow U(D) = \frac{1}{D}$$

$$\text{caso a) } Y(z) = \mathcal{Z}[G_2(D) G_1(D)] U(z)$$

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} ; G_2(D) G_1(D) = \frac{1}{D(2D+1)} = \frac{1}{D} - \frac{1}{D+1}$$

$$\mathcal{Z}[G_2(D) G_1(D)] = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-DT_2} z^{-1}}$$

$$Y(z) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-\Delta t/2} z^{-1}} \right) U(z) = \frac{(1-e^{-\Delta t/2}) z^{-1} U(z)}{1-(1+e^{-\Delta t/2}) z^{-1} + e^{-\Delta t/2} z^{-2}}$$

$$\boxed{y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} + b_0 u_{k-1}} \quad \left. \begin{array}{l} b_0 = 1 - e^{-\Delta t/2} \\ a_1 = -1 - e^{-\Delta t/2} \\ a_2 = e^{-\Delta t/2} \end{array} \right.$$

$$V(D) = \frac{1}{D} U^*(D) ; \quad U^*(D) = \mathcal{L}(u^* \alpha) = \mathcal{L}(U(z))$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \frac{1}{1-e^{-\Delta t}} ; \text{ pris } z^{-1} = e^{-\Delta t}$$

$$V(D) = \frac{1}{D(1-e^{-\Delta t})} \rightarrow v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{D(1-e^{-\Delta t})}\right]$$

$$v(t) = \int_0^t u^*(\tau) d\tau ; \quad u^*(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1-e^{-\Delta t}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta t) \delta(t-k\Delta t)$$

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta t) \int_0^t \delta(\tau-k\Delta t) d\tau ; \quad \int_0^t \delta(\tau-k\Delta t) d\tau = \begin{cases} 1, & t \geq k\Delta t \\ 0, & t < k\Delta t \end{cases}$$

$$\boxed{v(t) = \sum_{k=0}^{\text{int}(t/\Delta t)} u(k\Delta t)} = \text{int}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) + 1, \quad u(t) = 1$$

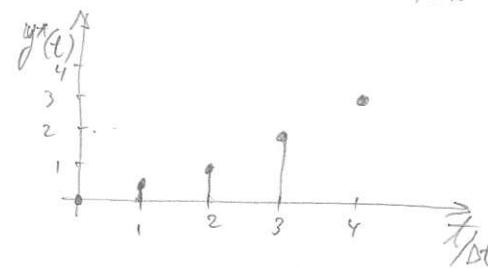
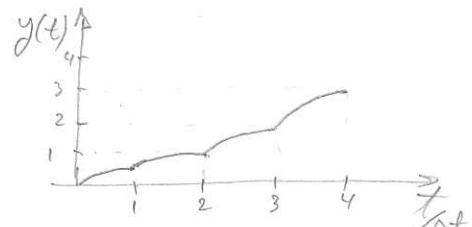
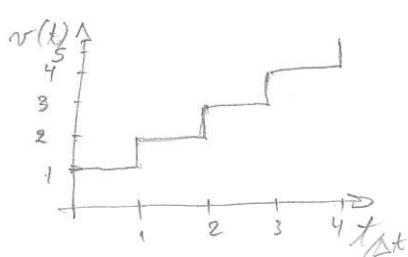
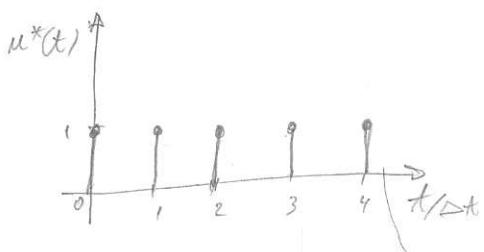
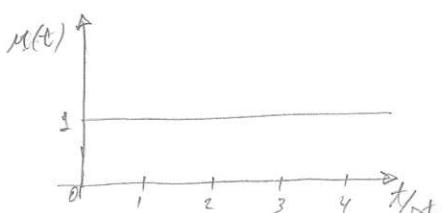
$$Y(D) = G_2(D) V(D) = \frac{1}{D(2D+1)(1-e^{-\Delta t})} = G(D) U^*(D)$$

$$G(D) = G_2(D) G_1(D) \rightarrow y(t) = \int_0^t g(t-\tau) u^*(\tau) d\tau$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{D} - \frac{1}{D+\gamma_2}\right] = 1 - e^{-t/2}$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta t) \int_0^t g(t-\tau) \delta(\tau-k\Delta t) d\tau = \sum_{k=0}^{\text{int}(t/\Delta t)} u(k\Delta t) g(t-k\Delta t)$$

$$\boxed{y(t) = \sum_{k=0}^{\text{int}(t/\Delta t)} u(k\Delta t) [1 - e^{-(t-k\Delta t)/2}]} = \sum_{k=0}^{\text{int}(t/\Delta t)} [1 - e^{-(t-k\Delta t)/2}]$$



case b) $Y(z) = G_2(z) G_1(z) U(z)$

$$G_1(D) = \frac{1}{D} \rightarrow G_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$G_2(D) = \frac{1}{2D+1} \rightarrow G_2(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1-e^{-\Delta t/2}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2} \cdot U(z)}{(1-z^{-1})(1-e^{-\Delta t/2}z^{-1})} = \frac{\frac{1}{2} U(z)}{1-(1+e^{-\Delta t/2})z^{-1} + e^{-\Delta t/2}z^{-2}}$$

$$\boxed{y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} + \frac{u_k}{2}}$$

$$\boxed{v(t) = \sum_{k=0}^{\text{int}(t/\Delta t)} u(k\Delta t) = \text{int}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) + 1}$$

$$V^*(D) = G_1^*(D) U^*(D) \rightarrow V(z) = G_1(z) U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} U(z)$$

$$\boxed{v_k = v_{k-1} + u_{k-1}} \quad v^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k\Delta t) \delta(t-k\Delta t)$$

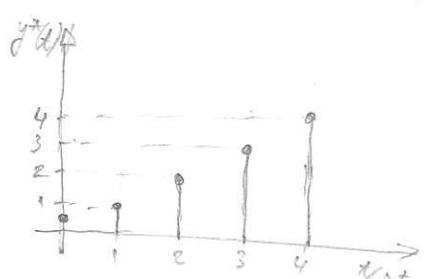
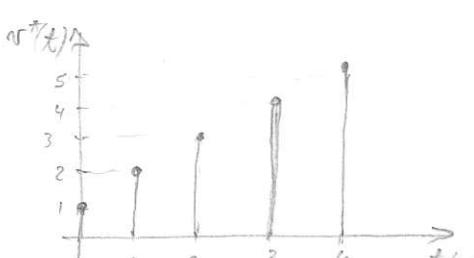
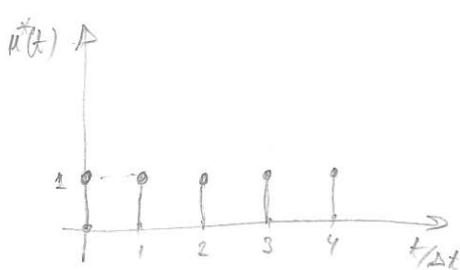
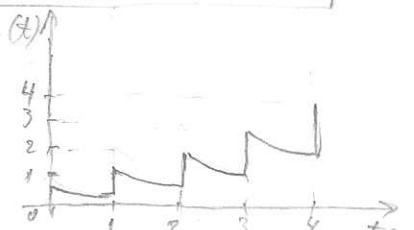
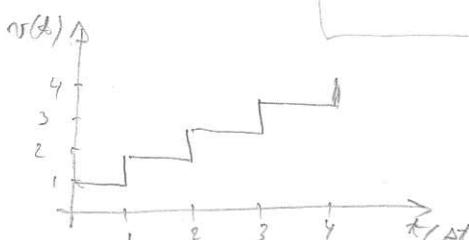
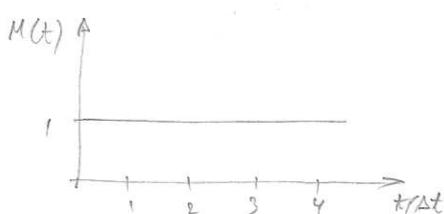
$$Y(D) = G_2(D) V^*(D) = G_2(D) G_1^*(D) U^*(D)$$

$$g_2(t) = \frac{1}{2} e^{-t/2} ; \quad y(t) = \int_0^t g_2(t-\tau) v^*(\tau) d\tau$$

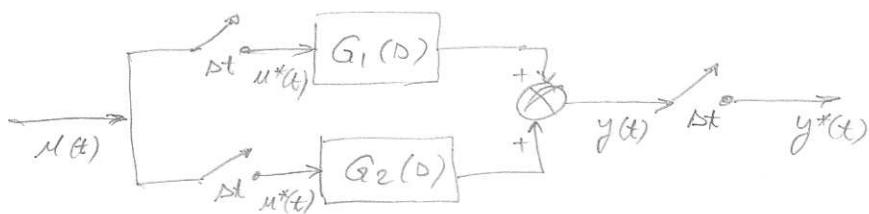
$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k\Delta t) \int_0^t g_2(t-\tau) \delta(\tau-k\Delta t) d\tau = \sum_{k=0}^{\text{int}(t/\Delta t)} v(k\Delta t) g_2(t-k\Delta t)$$

$$v(k\Delta t) = \sum_{l=0}^k u(l\Delta t) \quad \therefore y(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\text{int}(t/\Delta t)} e^{-(t-k\Delta t)/2} \cdot \sum_{l=0}^k u(l\Delta t)$$

$$u(t) = 1 \Rightarrow v(k\Delta t) = k+1 ; \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\text{int}(t/\Delta t)} (k+1) e^{-(t-k\Delta t)/2}}$$



c) Sistema em paralelo com amostras em todos extremos

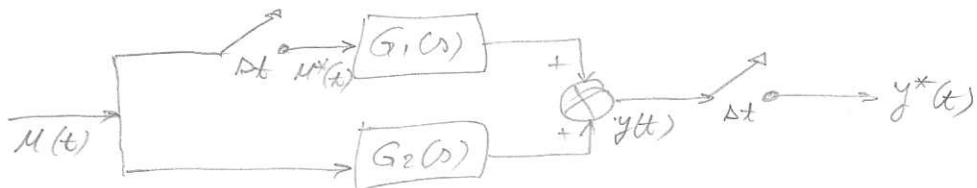


$$Y(D) = [G_1(D) + G_2(D)] U^*(D)$$

$$Y^*(\sigma) = [G_1(\sigma) + G_2(\sigma)]^* U^*(\sigma) = [G_1^*(\sigma) + G_2^*(\sigma)] U^*(\sigma)$$

$$Y(z) = [G_1(z) + G_2(z)]U(z) \rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = G_1(z) + G_2(z)$$

d) Sistema em paralelo com entrada não amostrada



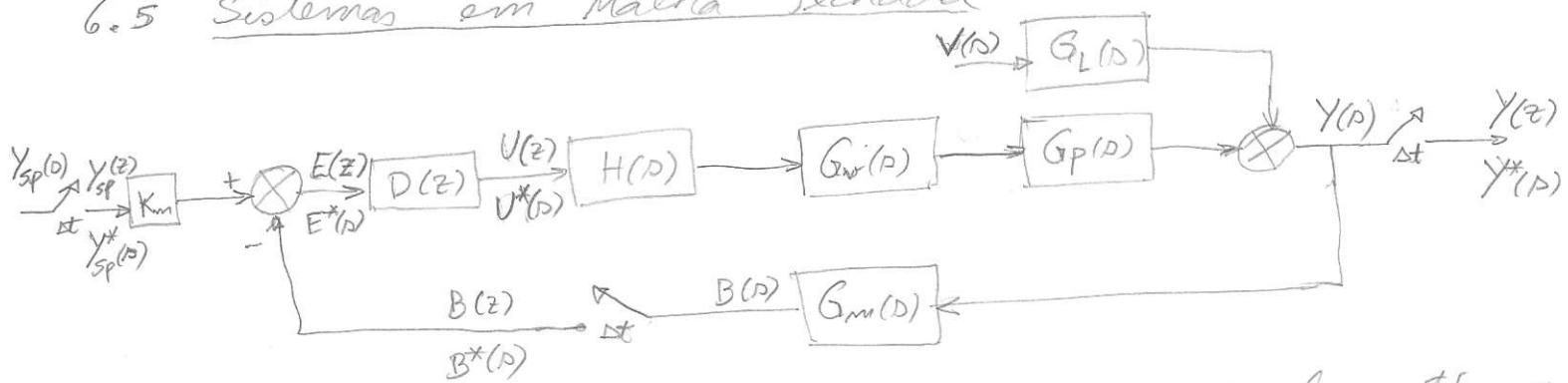
$$Y(D) = G_1(D) U^*(D) + G_2(D) U(D)$$

$$Y^*(\sigma) = G_1^*(\sigma) U^*(\sigma) + [G_2(\sigma) U(\sigma)]^*$$

$$Y(z) = G_1(z) U(z) + \underbrace{G_2 U(z)}_{Z[G_2(0)U(0)]}$$

neste caso não é possível obter uma função de transferência de pulso entre $Y(z)$ e $U(z)$.

6.5 Sistemas em Malha Fechada



6.5.1 Mudança de Set-point ($V(s) = 0$) - Sono

$$B(s) = G_m(s) G_p(s) G_r(s) H(s) U^*(s)$$

$$U^*(s) = D^*(s) E^*(s)$$

$$E^*(s) = K_m Y_{sp}^*(s) - B^*(s)$$

$$B^*(s) = [G_m(s) G_p(s) G_r(s) H(s)]^* U^*(s)$$

$$\therefore U^*(s) = \frac{D^*(s) K_m Y_{sp}^*(s)}{1 + [G_m G_p G_r H]^* D^*(s)}$$

$$Y(s) = G_p(s) G_r(s) H(s) U^*(s)$$

$$Y^*(s) = [G_p(s) G_r(s) H(s)]^* U^*(s)$$

$$\frac{Y^*(s)}{Y_{sp}(s)} = \frac{[G_p G_r H]^* D^*(s) K_m}{1 + [G_m G_p G_r H]^* D^*(s)}$$

ou

$$\frac{Y(z)}{Y_{sp}(z)} = \frac{G_p G_r H(z) \cdot D(z) K_m}{1 + G_m G_p G_r H(z) D(z)}$$

$$\text{equação característica: } 1 + G_m G_p G_r H(z) D(z) = 0$$

$$\text{para } \boxed{G_m(s) = K_m} \implies \boxed{\frac{Y(z)}{Y_{sp}(z)} = \frac{H(z) D(z)}{1 + H(z) D(z)}}$$

$$\text{onde } H(z) = K_m G_p G_r H(z)$$

6.5.2 Mudança de Carga ($Y_{sp}(s) = 0$) - Regulador

$$B(s) = G_m(s) G_p(s) G_r(s) H(s) U^*(s) + G_m(s) G_L(s) V(s)$$

$$U^*(s) = -D^*(s) B^*(s)$$

$$B^*(s) = [G_m(s) G_p(s) G_r(s) H(s)]^* U^*(s) + [G_m(s) G_L(s) V(s)]^*$$

$$\therefore V^* = \frac{-D^*(s) [G_m G_L V]^*}{1 + [G_m G_p G_r H]^* D^*(s)}$$

$$Y(s) = G_p(s) G_r(s) H(s) U^*(s) + G_L(s) V(s)$$

$$Y^*(s) = [G_p(s) G_r(s) H(s)]^* U^*(s) + [G_L(s) V(s)]^*$$

$$y^*(\sigma) = \frac{[G_L V]^* + [G_m G_p G_v H]^* D^*(\sigma) [G_L V]^* - [G_p G_v H]^* D^*(\sigma) [G_m G_L V]^*}{1 + [G_m G_p G_v H]^* D^*(\sigma)}$$

$$Y(z) = \frac{G_L V(z) + G_m G_p G_v H(z) D(z) G_L V(z) - G_p G_v H(z) D(z) G_m G_L V(z)}{1 + G_m G_p G_v H(z) D(z)}$$

para $G_m(\sigma) = K_m / (1 + \tau_m \sigma)$

$$Y(z) = \frac{G_L V(z)}{1 + HG(z)D(z)}, \text{ onde } HG(z) = K_m G_p G_v H(z)$$

(ver exemplos 25.4 e 25.5) → Edgar, Seborg, e Mellichamp.

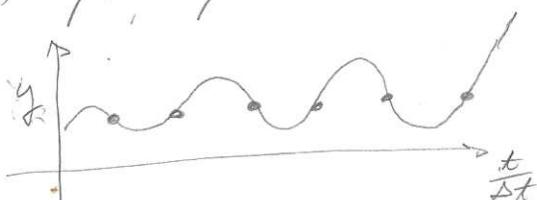
6.6 Estabilidade de Controle Digital

Condição necessária e suficiente para estabilidade:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k\Delta t)| < \infty \quad (\text{análise por divisão longa})$$

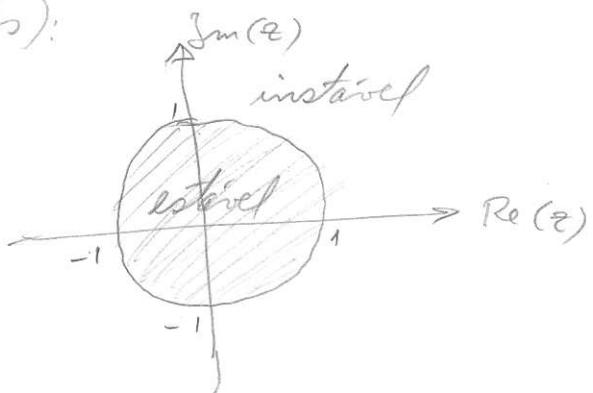
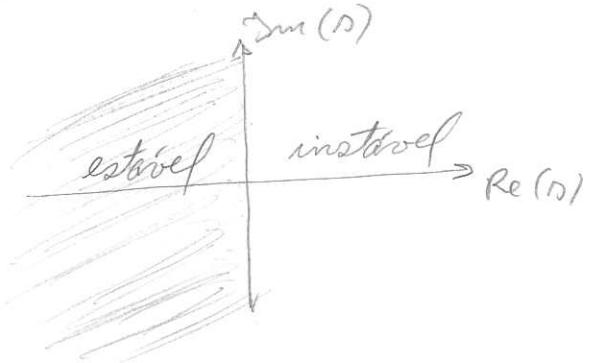
ou $G(z)$ não tem polo fora do círculo unitário (análise por frações parciais)

NOTA: Dependendo do tempo de amostragem, um sistema instável pode parecer estável no domínio discreto



(não é de fácil detecção, basta mudar Δt)

Região de estabilidade (localização dos polos):



Testes de estabilidade:

- diagrama de localização das raízes ("root locus")
- pois
usado } - diagrama de Bode } $z = e^{j\omega t}$
- } - diagrama de Nyquist }
- critério modificado de Routh
- critério de Jury
- critério de Schur-Cohn

6.6.1 Critério Modificado de Routh

$z = e^{\sigma \Delta t} \approx \frac{1 + D \frac{\Delta t}{2}}{1 - D \frac{\Delta t}{2}}$, portanto, fazendo a mudança de variável (mapeamento $z \rightarrow s$):

$$\boxed{z = \frac{1 + w}{1 - w}}, \quad (\text{transformação bilinear})$$

a equação característica:

$$1 + H(z)D(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

transforma-se em:

$$1 + H(w)D(w) = \bar{a}_m w^m + \bar{a}_{m-1} w^{m-1} + \dots + \bar{a}_1 w + \bar{a}_0 = 0, \quad \boxed{\bar{a}_m > 0}$$

podendo-se então usar o critério de Routh de forma similar a sistemas contínuos, para determinar o número de raízes que estão no semi-plano positivo de w (região instável), que equivale ao número de raízes fora do círculo unitário de z .

NOTA: apesar da transformação aproximar $z = e^{\sigma \Delta t}$, ela preserva os limites de estabilidade.

6.6.2 Critério de Jury

eq. caract.: $\Gamma(z) = 1 + HG(z)D(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

$$[a_m > 0]$$

Matriz de Jury:

| linha | z^0 | z^1 | z^2 | \dots | z^{m-2} | z^{m-1} | z^m | |
|----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-------|--|
| 1 | a_0 | a_1 | a_2 | \dots | a_{m-2} | a_{m-1} | a_m | |
| 2 | a_m | a_{m-1} | a_{m-2} | \dots | a_2 | a_1 | a_0 | |
| 3 | b_0 | b_1 | b_2 | \dots | b_{m-2} | b_{m-1} | | |
| 4 | b_{m-1} | b_{m-2} | b_{m-3} | \dots | b_1 | b_0 | | |
| 5 | c_0 | c_1 | c_2 | \dots | c_{m-2} | | | |
| 6 | c_{m-2} | c_{m-3} | c_{m-4} | \dots | c_0 | | | |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | | |
| $2m-5$ | n_0 | n_1 | n_2 | \dots | n_3 | | | |
| $2m-4$ | n_3 | n_2 | n_1 | \dots | n_0 | | | |
| $2m-3$ | D_0 | D_1 | D_2 | | | | | |

onde $b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{m-k} \\ a_m & a_k \end{vmatrix}$; $C_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{m-1-k} \\ b_{m-1} & b_k \end{vmatrix}$; $D_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{m-2-k} \\ c_{m-2} & c_k \end{vmatrix}$

$$\rho_0 = \begin{vmatrix} n_0 & n_3 \\ n_3 & n_0 \end{vmatrix}; D_1 = \begin{vmatrix} n_0 & n_2 \\ n_3 & n_1 \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} n_0 & n_1 \\ n_3 & n_2 \end{vmatrix}$$

condições necessárias e suficientes para estabilidade: ($|z_d| < 1$)

$$\Gamma(1) > 0$$

$$\Gamma(-1) > 0 \quad \text{se } m \text{ par}$$

$$\Gamma(-1) < 0 \quad \text{se } m \text{ ímpar}$$

$$|a_0| < a_m$$

$$|b_0| > |b_{m-1}|$$

$$|c_0| > |c_{m-2}|$$

$$|d_0| > |d_{m-3}|$$

\vdots

$$|n_0| > |D_2|$$

se alguma condição não for satisfeita, o sistema é instável.

6.7 Projeto de Controladores Digitais

6.7.1 Controladores PID

$$u(t) = \bar{u} + K_c [e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(\xi) d\xi + \tau_d \frac{de(t)}{dt}]$$

Euler:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t e(\xi) d\xi \approx \sum_{j=1}^k e_j \Delta t \\ \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e_k - e_{k-1}}{\Delta t} \end{array} \right.$$

PID - posição: $\boxed{u_k = \bar{u} + K_c [e_k + \frac{\Delta t}{\tau_I} \sum_{j=1}^k e_j + \frac{\tau_d}{\Delta t} (e_k - e_{k-1})]}$

fazendo $\tilde{u}_k = u_k - \bar{u}$ e aplicando a transformada Z:

$$\tilde{U}(z) = K_c \left[E(z) + \frac{\Delta t}{\tau_I} (z^{-k+1} + z^{-k+2} + \dots + z^{-1} + 1) E(z) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1 - z^{-1}) E(z) \right]$$

$$1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \approx \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (k \gg 1)$$

$$\tilde{U}(z) = K_c \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_I} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1 - z^{-1}) \right] E(z)$$

∴ $\boxed{D(z) = \frac{\tilde{U}(z)}{E(z)} = K_c \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_I} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1 - z^{-1}) \right]}$

PID - velocidade: $\boxed{u_k = u_{k-1} + K_c [(e_k - e_{k-1}) + \frac{\Delta t}{\tau_I} e_k + \frac{\tau_d}{\Delta t} (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2})]}$

fazendo $\Delta u_k = u_k - u_{k-1} = \tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}$ e aplicando a transf. Z:

$$\Delta \tilde{U}(z) = \Delta U(z) = K_c \left[(1 - z^{-1}) E(z) + \frac{\Delta t}{\tau_I} E(z) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) E(z) \right]$$

$$\Delta \tilde{U}(z) = (1 - z^{-1}) K_c \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_I} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1 - z^{-1}) \right] E(z)$$

$$\Delta \tilde{U}(z) = (1 - z^{-1}) \tilde{U}(z)$$

$$D(z) = \frac{\tilde{U}(z)}{E(z)} = \frac{U(z)}{E(z)} = K_c \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_I} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1 - z^{-1}) \right]$$

Trapezios :
$$\int_0^t e(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^k \left(\frac{e_j + e_{j-1}}{2} \right) \Delta t$$

PID - posição :
$$\frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e_k - e_{k-1}}{\Delta t}$$

$$u_k = \bar{u} + K_c \left[e_k + \frac{\Delta t}{2\tau_I} \sum_{j=1}^k \left(\frac{e_j + e_{j-1}}{2} \right) \Delta t + \frac{\tau_d}{\Delta t} (e_k - e_{k-1}) \right]$$

fazendo $\tilde{u}_k = u_k - \bar{u}$:

$$\tilde{U}(z) = K_c \left[E(z) + \frac{\Delta t}{2\tau_I} \left(z^{-k} + 2z^{-k+1} + 2z^{-k+2} + \dots + 2z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \right) E(z) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1-z^{-1}) E(z) \right]$$

$$1 + 2(z^{-1} + z^{-2} + \dots) = 2(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) - 1 \approx \frac{2}{1-z^{-1}} - 1 = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$\tilde{U}(z) = K_c \left[1 + \frac{\Delta t}{2\tau_I} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1-z^{-1}) \right] E(z) \quad (k \gg 1)$$

$$D(z) = \frac{\tilde{U}(z)}{E(z)} = K_c \left[1 + \frac{\Delta t}{2\tau_I} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1-z^{-1}) \right]$$

PID - velocidade :

$$u_k = u_{k-1} + K_c \left[(e_k - e_{k-1}) + \frac{\Delta t}{2\tau_I} \left(\frac{e_k + e_{k-1}}{2} \right) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2}) \right]$$

fazendo $\Delta u_k = u_k - u_{k-1} = \tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}$:

$$\Delta \tilde{U}(z) = \Delta U(z) = K_c \left[(1-z^{-1}) E(z) + \frac{\Delta t}{2\tau_I} (1+z^{-1}) E(z) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1-2z^{-1} + z^{-2}) E(z) \right]$$

$$\Delta \tilde{U}(z) = (1-z^{-1}) K_c \left[1 + \frac{\Delta t}{2\tau_I} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1-z^{-1}) \right] E(z)$$

$$\Delta \tilde{U}(z) = (1-z^{-1}) \tilde{U}(z)$$

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\tilde{U}(z)}{E(z)} = K_c \left[1 + \frac{\Delta t}{2\tau_I} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) + \frac{\tau_d}{\Delta t} (1-z^{-1}) \right]$$

NOTA : as equações do PID - velocidade podem ser escritas da forma $\Delta u_k = \alpha_1 e_k - \alpha_2 e_{k-1} + \alpha_3 e_{k-2}$, onde

α_1, α_2 e α_3 estão relacionados com os parâmetros de projeto do controlador (K_c, τ_I, τ_d) e com o tempo de amostragem (Δt).

$$\text{Euler: } \alpha_1 = K_c \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_I} + \frac{\tau_d}{\Delta t} \right) \quad K_c = \alpha_2 - 2\alpha_3$$

$$\alpha_2 = K_c \left(1 + 2 \frac{\tau_d}{\Delta t} \right) \quad \tau_I = \frac{\Delta t (\alpha_2 - 2\alpha_3)}{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3}$$

$$\alpha_3 = K_c \frac{\tau_d}{\Delta t} \quad \tau_d = \frac{\Delta t \alpha_3}{\alpha_2 - 2\alpha_3}$$

$$\text{Trapezios: } \alpha_1 = K_c \left(1 + \frac{\Delta t}{2\tau_I} + \frac{\tau_d}{\Delta t} \right) \quad K_c = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3}{2}$$

$$\alpha_2 = K_c \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau_I} + \frac{2\tau_d}{\Delta t} \right) \quad \tau_I = \frac{\Delta t (\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3)}{2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)}$$

$$\alpha_3 = K_c \frac{\tau_d}{\Delta t} \quad \tau_d = \frac{2\Delta t \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3}$$

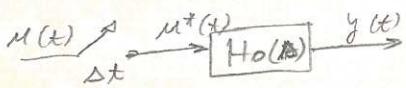
(ver págs 616 - 618 - Seborg, Edgar, Mell.)

Projeto de PID digital:

- conversão dos parâmetros do PID análogo
- baseado no critério da integral de erro
- localizações de polos ("root locus")

Conversão dos parâmetros do PID análogo:

- comportamento similar (análogo x digital) quando $\frac{\Delta t}{\tau} \leq 0,1$
se esta condição for satisfeita, os parâmetros usados para o controlador análogo podem ser convertidos para o controlador digital.
- No caso de usar retentores de ordem zero, que introduzem um tempo morto de um intervalo de amostragem, pode-se ajustar o PID [adicionando $\frac{\Delta t}{2}$] no tempo morto do processo antes de projetar o controlador, pois:



$$\frac{Y(D)}{U^*(D)} = H_0(D) = \frac{1 - e^{-\rho \Delta t}}{\rho} \approx \Delta t \left(1 - \frac{\rho \Delta t}{2} \right) \approx \Delta t e^{-\frac{\rho \Delta t}{2}} \Rightarrow \frac{Y(D)}{U(D)} \approx e^{-\frac{\rho \Delta t}{2}}$$

Baseado no critério da integral do erro

- uso dos critérios ISE, IAE e ITAE para a determinação dos parâmetros do controlador.
- resultados mais seguros que a simples conversão, principalmente quando $\frac{\Delta t}{\tau} > 0,1$
- correções no ganho devem ser efetuadas quando $\frac{\Delta t}{\tau} \geq 0,2$ ou $\frac{T_d}{\tau} \leq 0,2$

(ver exemplo 26.2 - Edgas, Setoy, Melo.)

Localização de Pólos

- similar aos "root locus" para o domínio s.
- como os zeros da função de transferência pulso afetam muito o comportamento do sistema, este método não é recomendado para o projeto do controlador, mas sim como analisador de sua estabilidade.

6.7.2 Métodos de síntese direta

Para um sistema em malha fechada:

$$\frac{Y(z)}{Y_{sp}(z)} = \frac{HG(z) D(z)}{1 + HG(z) D(z)}$$

se $\frac{Y(z)}{Y_{sp}(z)}$ for especificado: $\frac{Y(z)}{Y_{sp}(z)} = G_d(z)$, então

$$D(z) = \frac{1}{HG(z)} \left(\frac{G_d(z)}{1 - G_d(z)} \right) \quad \text{que é a equação}$$

básica para projeto de controladores.

Caso não haja cancelamento de zeros e polos entre, os zeros de $HG(z)$ serão os polos de $D(z)$ e os polos de $HG(z)$ serão os zeros de $D(z)$. Portanto se $HG(z)$ tiver zeros não cancelados fora do círculo unitário, então $D(z)$ terá polos instáveis.

O produto $H(z)D(z)$ indica que os zeros e polos de $D(z)$ serão cancelados pelos polos e zeros de $H(z)$, contudo os erros de modelagem impedem estes cancelamentos.

Os métodos de síntese direta possuem compensação de tempo morto do tipo preditor de Smith.

a) Protótipo Mínimo e "Deadbeat"

tem o objetivo de atingir o valor desejado no menor tempo possível. O projeto é expresso em termos da resposta desejada a mudanças de set-point.

Para o sistema ser realizável o tempo morto de $G_d(z)$ deve ser $\geq d+1$ (tempo morto do processo + retentor de ordem zero), portanto o menor tempo morto possível para $G_d(z)$ é $d+1$.

Requerimentos:

$$G_d(z) = \frac{1}{z^{d+1}}$$

- o sistema deve ter erro nulo no estado estacionário nos instantes de amostragem;
- o tempo de subida deve ser igual ao número mínimo de amostras;
- o tempo para atingir o estado estacionário deve ser finito;
- as funções de transferência $D(z)$ e $G_d(z)$ devem ser realizáveis.

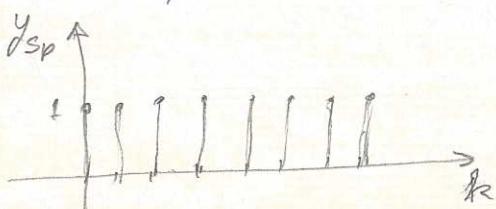
Para satisfazer estes requerimentos

$$G_d(z) = z^{-d-1}$$

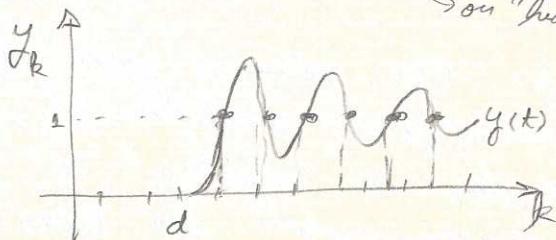
(Fazer exemplos 26.3 e 26.4 - Edgar, Seborg e Mellichamp)

NOTA: Este tipo de controlador pode exibir oscilações entre tempos de amostragem ("rippling" ou "ringing") para $d \geq 1$.

"hidden oscillations"



$$Y_{sp}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$



$$Y(z) = \frac{z^{-d-1}}{1-z^{-1}}$$

Controladores de protótipo mínimo do tipo Deadbeat não apresentam problemas de oscilações entre tempos de amostragem. A ideia é utilizar no mínimo $n+d$ períodos de amostragem para alcançar o estado estacionário, onde n é a ordem do polinômio do denominador da função de transferência do processo. Para isto $G_d(z)$ é definido da seguinte forma:

$$G_d(z) = z^{-d} (\gamma_1 z^{-1} + \gamma_2 z^{-2} + \dots + \gamma_m z^{-m}) \quad \boxed{\text{Deadbeat}}$$

com $0 \leq \gamma_i \leq 1, i=1, 2, \dots, m$

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i = 1 \quad (\text{sem off-set}) : G_d(1) = 1$$

b) Algoritmo de Dahlin

Em geral, os controladores de protótipo mínimo requerem ações de controle muito bruscas, além do seu desempenho ser muito dependente da perfeição do modelo do processo. O algoritmo de Dahlin suaviza o controlador de protótipo mínimo com o uso de uma função de transferência de primeira ordem:

$$G_d(s) = \frac{e^{-\zeta_d s}}{\zeta_c s + 1} \Rightarrow G_d(z) = \frac{(1-a) z^{-d-1}}{1 - a z^{-1}}$$

onde $a = e^{-\Delta t / \zeta_c}$

$$d = \frac{\zeta_d}{\Delta t} \quad ; \quad D(z) = \frac{1}{H(z)} \frac{(1-a) z^{-d-1}}{[1 - a z^{-1} - (1-a) z^{-d-1}]}$$

$\zeta_c \rightarrow 0 \Rightarrow$ Dahlin \rightarrow protótipo mínimo

Quanto maior for o valor de ζ_c , menor sensível a erros de modelagem será o controlador, mas seu desempenho diminuirá.

NOTA: Se $D(z)$ possuir polo negativo dentro do círculo unitário (estável, mas oscilatório), uma técnica sub-ótima para evitar o "rippling" é fazer $z=1$ para este fator no denominador de $D(z)$. → apresenta sobrelevação

(fazer exemplo 26.5 - Seborg, Edgar e Mellichamp).

c) Algoritmo de Vogel-Edgar

Elimina o polo causador de "ringing" para processos descritos por um modelo de 2^o ordem com tempo morto:

$$G_d(z) = \frac{(1-a)(b_1 + b_2 z^{-1})z^{-d-1}}{(1-az^{-1})(b_1 + b_2)}$$

$$a > 0$$

$$\text{ex: } a = e^{-\Delta t/\tau_c}$$

onde

$$HG(z) = \frac{(b_1 + b_2 z^{-1})z^{-d-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

o termo $b_1 + b_2$ é para garantir $G_d(1) = 1$

$$D(z) = \frac{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(1-a)}{[(b_1 + b_2)(1-az^{-1}) - (1-a)(b_1 + b_2 z^{-1})z^{-d-1}]}$$

para

$a_2 = b_2 = 0 \Rightarrow$ Vogel-Edgar = Dahlén (processo 1^o ordem)

NOTA:

para processos com zeros fora do círculo unitário o controlador de Dahlén pode tornar-se instável, ao passo que o controlador de Vogel-Edgar não é afetado.

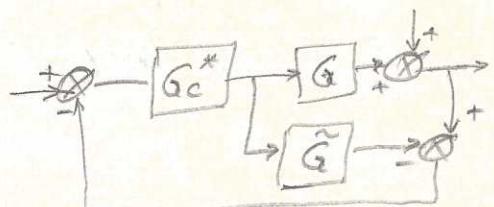
6.7.3 IMC ("Internal Model Control")

fatorando o modelo do processo: $\tilde{G}(z) = \tilde{G}_+(z) \tilde{G}_-(z)$

onde \tilde{G}_+ contém o tempo morto z^{-d-1} , os zeros fora do círculo unitário e os zeros próximos de -1, sendo $\tilde{G}_+(1) = 1$.

tem-se

$$D(z) = \frac{G_c^*(z)}{1 - G_c^*(z)\tilde{G}(z)}$$



$$\text{e } G_c^*(z) = \frac{f(z)}{\tilde{G}_-(z)}$$

onde $f(z)$ é um filtro passa-baixa usado para aumentar a robustez do controlador e garantir que seja realizável.

$$\text{ex: } f(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \quad (1=\text{ordem}) \quad 0 < \alpha < 1$$

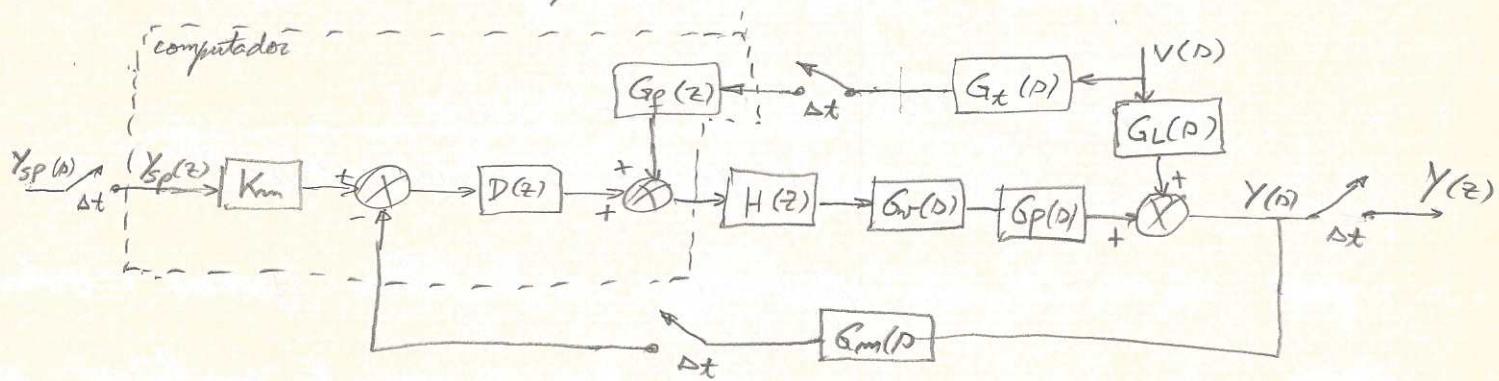
$\alpha=0 \Rightarrow \text{deadbeat-IMC}$

$$\text{para } \tilde{G}(z) = G(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{Y_{sp}(z)} = G_p(z) f(z)$$

(fazer ex: 26.6 - Edgar, Seborg e Melo.)

NOTA: tanto o IMC com os métodos de síntese direta não são adequados para processos instáveis.

6.7.4 Controle Anticipatório



$G_p(z)$ é projetado de modo a cancelar as perturbações de carga ($V(z)$) quando $Y_{sp}(z)=0$ e $Y(z)=0$:

$$G_L V(z) + H G_v G_p(z) G_p(z) G_t V(z) = 0$$

$$\therefore G_p(z) = \frac{-G_L V(z)}{H G_v G_p(z) G_t V(z)} \quad \left(\frac{G_L V(z)}{G_t V(z)} \neq \frac{G_L(z)}{G_t(z)} \right)$$

Logo $V(z)$ não pode ser fatorado destas expressões.

Quando $v(t)$ ou pode ser aproximado por uma função constante por partes (sequência de degraus), então $G_L V(z) / G_t V(z)$ pode ser substituído por $H G_L(z) / H G_t(z)$, resultando em uma $G_p(z)$ independente de $V(z)$:

$$G_p(z) = \frac{-H G_L(z)}{H G_v G_p(z) \cdot H G_t(z)}$$

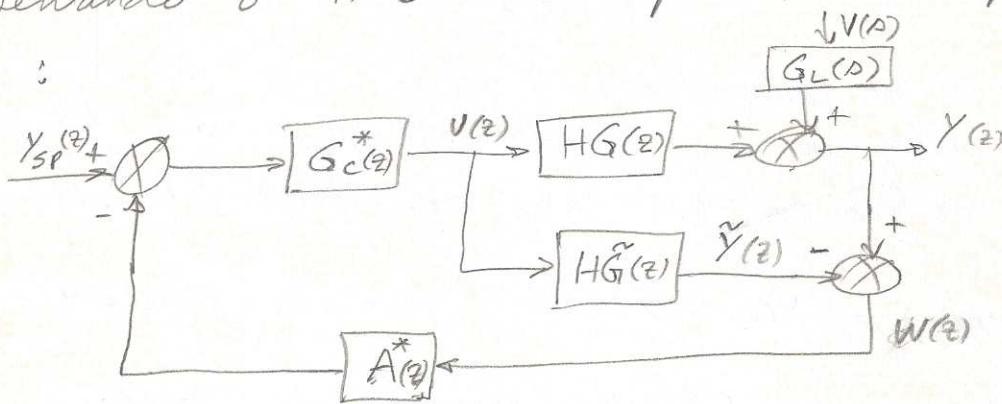
realizável se $\tau_L > (\tau_t + \tau_d)$.

Modelo lead-lag: $G_f(z) = \frac{K_f (1 + b_f z^{-1}) z^{-F}}{(1 + a_f z^{-1})}$, $|a_f| < 1$

(Ex: ex: 26.7 - Edgar, Seborg, Mellichamp.)

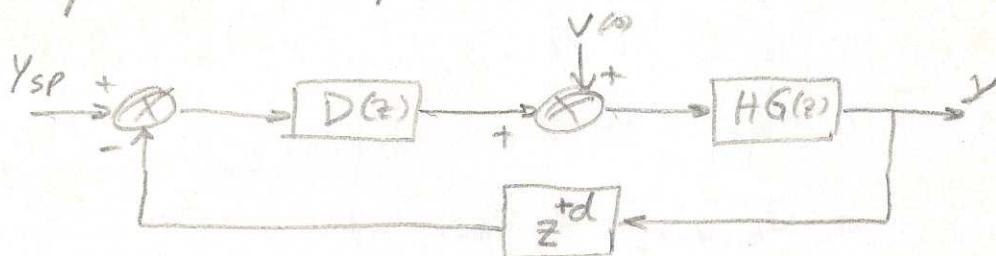
6.7.5 Predictor Analítico

Representando o IMC com predição de perturbação de carga:



onde $A^*(z)$ é usado para prever os efeitos das perturbações de carga e para compensar o tempo morto do processo.
 $\tilde{HG}(z)$ é o modelo do processo

Outra forma de representar o diagrama acima:



No caso de $v(t)$ ser uma função constante por partes e
 $\tilde{HG}_L(z) = HG(z) = z^{-d} HG^*(z)$ onde $HG^*(z)$ é o processo sem tempo morto, tem-se:

$$Y(z) = \frac{D(z) HG(z)}{1 + D(z) HG^*(z)} Y_{sp}(z) + \frac{HG(z)}{(1 + D(z)) HG^*(z)} V(z)$$

com a eq. caract. sem tempo morto \Rightarrow maior estabilidade.

$A^*(z)$ é obtido de forma similar ao GAP (a seguir) com $\tilde{HG}_L(z) = HG(z)$.

Preditor analítico generalizado (GAP)

Para prever os efeitos da perturbação da carga, considera-se $w(t)$ constante durante o horizonte de previsão ($\geq d$). Considera-se também um modelo de 1ª ordem para $H\tilde{G}_L(z)$, supondo $w(t)$ constante por partes:

$$H\tilde{G}_L(z) = \frac{b_L z^{-1}}{1 - a_L z^{-1}}$$

- NOTA :
- como as perturbações de carga não são medidas, considera-se um modelo de carga sem tempo morto.
 - o modelo anterior (AP) considerava $H\tilde{G}_L(z) = HG(z)$.

Então : $W(z) = Y(z) - \tilde{Y}(z) = HG(z)V(z) + HG_L(z)V(z) - H\tilde{G}(z)V(z)$

Considerando o modelo do processo sem erros:

$$W(z) = HG_L(z)V(z) \approx \frac{b_L z^{-1} V(z)}{1 - a_L z^{-1}}$$

ou $w_k = a_L w_{k-1} + b_L v_{k-1}$

e para os d instantes futuros (com w constante):

$$\begin{aligned}\hat{w}_{k+1} &= a_L w_k + b_L \hat{v}_{k-1} \\ \hat{w}_{k+2} &= a_L \hat{w}_{k+1} + b_L \hat{v}_{k-1} \\ &\vdots \\ \hat{w}_{k+d} &= a_L \hat{w}_{k+d-1} + b_L \hat{v}_{k-1}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\hat{v}_{k-1} &= \hat{v}_k = \hat{v}_{k+1} = \dots = \hat{v}_{k+d-1} \\ \hat{w}_{k+d} &= a_L^d w_k + \frac{1 - a_L^d}{1 - a_L} b_L \hat{v}_{k-1}\end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned}\hat{v}_{k-1} &= \frac{w_k - a_L w_{k-1}}{b_L} \\ (\text{estimado})\end{aligned}$$

$$\hat{v}_{k-1} = \hat{v}_k = \hat{v}_{k+1} = \dots = \hat{v}_{k+d-1}$$

$$\therefore \boxed{\hat{w}_{k+d} = a_L^d w_k + \frac{1 - a_L^d}{1 - a_L} b_L \hat{v}_{k-1}}$$

usando um filtro para $V(z) \Rightarrow z^{-1}V(z) = F_L(z) \frac{(1 - a_L z^{-1})}{b_L} W(z)$

onde $F_L(z) = \frac{1 - \beta}{1 - \beta z^{-1}}, 0 \leq \beta < 1$

tem-se $\hat{W}_d(z) = A^*(z) W(z) = A^*(z) [Y(z) - \tilde{Y}(z)] \rightarrow \text{previsão de } w(z)$

com $\boxed{A^*(z) = a_L^d + \frac{(1 - a_L^d)}{1 - a_L} F_L(z) (1 - a_L z^{-1})}$ a d instantes (ver ex. 26.7)