**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**

**COPPE**

**PROGRAMA DE ENGENHARIA QUÍMICA**

# — COQ-892 – Controle Avançado de Processos —

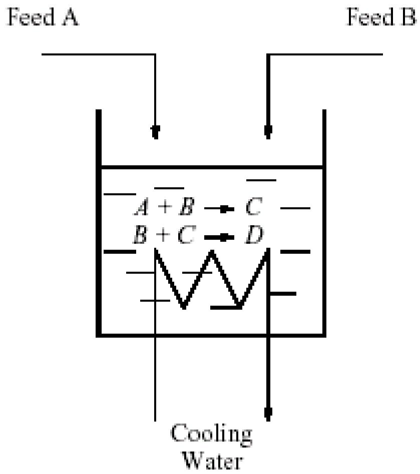
**Profs. Argimiro R. Secchi e José Manuel Perez**

**– 2015 –**

# Conteúdo

# 1. Otimização de Processos Dinâmicos

**Exemplo 1.1:** Para ilustrar o problema de otimização dinâmica, algumas vezes chamado de otimização em *dimensão infinita*, pois envolve variáveis de decisão que são funções, considere o sistema abaixo de um reator semi-batelada, com duas reações exotérmicas:




em que C é o produto de interesse e D é um sub-produto. Iniciando com o reator vazio, as alimentações de A e B, bem com a taxa de água de resfriamento, estão livres para variar ao longo da operação. Para um dado reator, com dimensões fixas, o objetivo operacional pode ser o de determinar o tempo de duração da operação e as taxas de alimentação de reagentes e água, de modo a maximizar a concentração final de C. O projeto do equipamento também pode ser parte do objetivo do problema. Geralmente, quando as variáveis de decisão envolvem somente variáveis operacionais, o problema é denominado de *controle ótimo*.

A formulação matemática do processo acima pode ser genericamente representada por:

$$F(x(t), \dot{x}(t), y(t), u(t), v) = 0$$

em que $x(t)$, $\dot{x}(t)$ são as variáveis diferenciais e suas derivadas em relação a variável independente, $t$ (geralmente o tempo), $y(t)$ são as variáveis algébricas, $u(t)$ são as variáveis de controle e $v$ são os parâmetros invariantes no tempo, a serem determinados pela otimização. Para o exemplo, $u(t)$ representa as taxas de alimentação dos reagentes e da água de refrigeração e $v$ pode ser o volume do reator. As condições iniciais para este problema podem ser descritas genericamente por:

$$I(x(0), \dot{x}(0), y(0), u(0), v) = 0$$

que juntamente com a forma funcional de $u(t)$ e os valores de $v$ determinam completamente a resposta transiente do sistema.

### 1.1 Formulação da função objetivo e restrições

A formulação da função objetivo para um problema de otimização dinâmica pode estar associada a determinação dos seguintes valores:

- horizonte de tempo da operação, $t_f$ (tempo final);
- parâmetros invariantes no tempo, $v$;
- variação temporal das variáveis de controle, $u(t)$, para $t \in [0, t_f]$.

de modo a minimizar (ou maximizar) um funcional $\Phi(u(t),v,t_f)$, também conhecido como forma de **Mayer**. A função objetivo é um *funcional* pois depende da escolha da função $u(t)$. No problema do reator semi-batelada $\Phi$ seria a concentração final do produto C e $t_f$ seria a duração da batelada, resultando no problema de otimização abaixo:

$$\max_{t_f, v, u(t), t \in [0, t_f]} \quad \Phi = x_3(t_f)$$

$$\text{sujeito a:} \quad F(x(t), \dot{x}(t), y(t), u(t), v) = 0$$

$$I(x(0), \dot{x}(0), y(0), u(0), v) = 0$$

em que $x_3$ é a concentração de C.

Se a função objetivo a ser minimizada for a integral de uma função sobre todo o intervalo $[0, t_f]$, conhecida como forma de **Lagrange**:

$$\Phi(u(t),v,t_f) = \int_0^{t_f} \varphi\,(x(t), \dot{x}(t), y(t), u(t), v)\, dt$$

pode-se adicionar ao sistema de equações algébrico-diferenciais do problema, a seguinte equação:

$$\dot{\Phi} = \varphi(x(t), \dot{x}(t), y(t), u(t), v)$$

com a condição inicial $\Phi(0) = 0$, para ser integrada simultaneamente. Para o caso particular de $\dot{\Phi} = 1$, tem-se o problema de minimização do tempo de operação, $t_f$.

Uma formulação mais geral para a função objetivo, forma de **Bolza**, envolve as duas formas acima, ou seja:

$$\Phi(u(t),v,t_f) = \psi(x(t_f), \dot{x}(t_f), y(t_f), u(t_f), v) + \int_0^{t_f} \varphi\,(x(t), \dot{x}(t), y(t), u(t), v)\, dt$$

Dentre as mais variadas formas de restrições adicionais em um problema de otimização dinâmica, tem-se:

a) Limites nas variáveis de decisão

$$t_f^{min} \leq t_f \leq t_f^{max}$$

$$u^{\min} \leq u(t) \leq u^{max} \quad , \ \forall \ t \in [0, t_f]$$

$$v^{\min} \leq v \leq v^{max}$$

b) Restrições terminais

de igualdade: $w(t_f) = w^*$

de desigualdade: $w^{\min} \leq w(t_f) \leq w^{max}$

em que $w$ representa alguma variável do sistema ($x$ ou $y$), ou uma relação entre elas. Para o exemplo do reator, a quantidade final de material no reator pode ser fixada ou a temperatura final pode estar limitada em uma dada faixa.

c) Restrições interiores

Aparecem quando algumas variáveis devem estar limitadas em alguns pontos no interior do intervalo de operação, ou seja:

$$w^{\min}(t_I) \leq w(t_I) \leq w^{max}(t_I)$$

em que $t_I \in [0, t_f)$. Como por exemplo, limitar a curva de aquecimento do reator dentro de uma faixa determinada.

d) Restrições de trajetória

São aquelas restrições que devem ser satisfeitas durante todo o intervalo de operação, ou seja:

$$w^{\min} \leq w(t) \leq w^{max} \quad , \forall \ t \in [0, t_f]$$

Por exemplo, no reator semi-batelada pode-se impor que a temperatura da reação não deva ultrapassar um determinado valor para evitar a degradação do produto.

### 1.2 Princípio do Mínimo de Pontryagin

Antes de enunciar o princípio do mínimo de Pontryagin, é necessário introduzir os conceitos do cálculo variacional, que trata da seleção de uma função desconhecida que aparece no integrando de uma integral que deve ser minimizada ou maximizada em função desta seleção.

Considere a seguinte integral:

$$S(x) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi[t, x(t), \dot{x}(t)]\, dt$$

em que $\dot{x}(t)$ é a derivada de $x(t)$ em relação a $t$. O problema do cálculo variacional consiste na seleção de $x(t)$ de modo a minimizar (ou maximizar) o funcional $S(x)$. Supondo que $x^*(t)$ é a função que minimiza $S(x)$ e $x(t)$ é uma outra função com uma diferença infinitesimal de $x^*(t)$ em cada ponto dentro do intervalo $(t_1, t_2)$, define-se:

$$\delta x = x(t) - x^*(t)$$

como o operador variação, ou seja, a variação de uma função representa uma mudança infinitesimal arbitrária na função a um dado valor de $t$. Note que a variação difere da diferenciação, pois esta última corresponde a uma medida da mudança de uma função resultante de uma mudança específica (não arbitrária) na variável independente. A equação acima pode ser escrita como:

$$\delta x = x(t) - x^*(t) = \varepsilon\, \phi(t)$$

em que $\phi(t)$ é uma função arbitrária contínua e diferenciável e $\varepsilon$ é um parâmetro variável que tende a zero.

Como o operador variação acarreta uma mudança infinitesimal em uma função para um valor fixo de $t$, tem-se:

$$\delta t = 0$$

ou seja, a variável independente não participa do processo de variação. Outra propriedade importante do operador variação é a comutatividade com os operadores de diferenciação e integração:

$$\frac{d}{dt}\delta x = \frac{d}{dt}[\varepsilon\, \phi(t)] = \varepsilon \frac{d\phi}{dt} \quad \text{e} \quad \delta \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx^*}{dt} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \varepsilon \frac{d\phi}{dt}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} x^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - x^*(t)]dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta x(t)dt$$

Como a condição necessária de primeira ordem para o mínimo local de uma função, $S(x)$, pode ser interpretada como a existência de um ponto estacionário da função objetivo, então dentro de uma região infinitesimal em torno deste ponto tem-se que:

$$\delta S = 0$$

Usando a propriedade comutativa chega-se a:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta\varphi\, dt$$

em que $\delta\varphi = \varphi[x, \dot{x}(t), t] - \varphi[x^*, \dot{x}^*(t), t] = \varphi[x^* + \varepsilon\,\phi, \dot{x}^*(t) + \varepsilon\,\dot{\phi}(t), t] - \varphi[x^*, \dot{x}^*(t), t]$. Expandindo $\varphi$ em série de Taylor tem-se:

$$\varphi[x^* + \varepsilon\,\phi(t),\ \dot{x}^*(t) + \varepsilon\,\dot{\phi}(t),\, t] = \varphi[x^*, \dot{x}^*(t),\, t] + \nabla_x^T\,\varphi[x^*, \dot{x}^*(t),\, t]\;\varepsilon\,\phi(t) +$$

$$\nabla_{\dot{x}}^T\,\varphi[x^*, \dot{x}^*(t),\, t]\;\varepsilon\,\dot{\phi}(t) + O[\varepsilon^2\,\phi^2(t),\ \varepsilon^2\,\dot{\phi}^2(t)]$$

que eliminando os termos de ordem $O(\varepsilon^2)$, resulta em:

$$\delta\varphi = \varepsilon\ \{\nabla_x^T\,\varphi[x^*, \dot{x}^*(t),\, t]\ \phi(t) + \nabla_{\dot{x}}^T\,\varphi[x^*, \dot{x}^*(t),\, t]\,\dot{\phi}(t)\}$$

Para um ponto estacionário tem-se:

$$\delta S = \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left(\nabla_x^T\varphi\ \phi + \nabla_{\dot{x}}^T\varphi\ \dot{\phi}\right)dt = 0$$

sobre qualquer função arbitrária $\phi(t)$. O segundo termo no integrando pode ser integrado por partes ($u = \nabla_{\dot{x}}\varphi$ e $v = \phi$), resultando em:

$$\int_{t_1}^{t_2}\nabla_{\dot{x}}^T\varphi\ \dot{\phi}\ dt = [\nabla_{\dot{x}}^T\varphi\ \phi]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{x}}^T\varphi]\ \phi\ dt$$

Se a função $x(t)$ é fixada nos contornos, $t_1$ e $t_2$, então $\phi(t)$ deve se anular nestes pontos, pois não pode existir variação de $x(t)$ nos contornos. Deste modo o primeiro termo da integração por partes é nulo. Para o caso mais geral, onde algum contorno pode estar livre, as seguintes condições de *complementaridade* devem ser satisfeitas:

$$\nabla_{\dot{x}}^T\varphi\ \phi = 0 \quad \text{para} \quad t = t_1 \quad \text{e} \quad t = t_2$$

ou seja, se $\delta S$ é para ser zero para todas as variações admissíveis (restritas somente pela continuidade e diferenciabilidade) então o primeiro termo da integração por partes deve ser sempre nulo. No caso de existir uma contribuição terminal na função objetivo:

$$S(x) = \Psi[x(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2}\varphi[t, x(t), \dot{x}(t)]\,dt$$

a condição de complementaridade terminal seria:

$$[\nabla_x^T\Psi + \nabla_{\dot{x}}^T\varphi]\ \phi = 0 \quad \text{para} \quad t = t_2$$

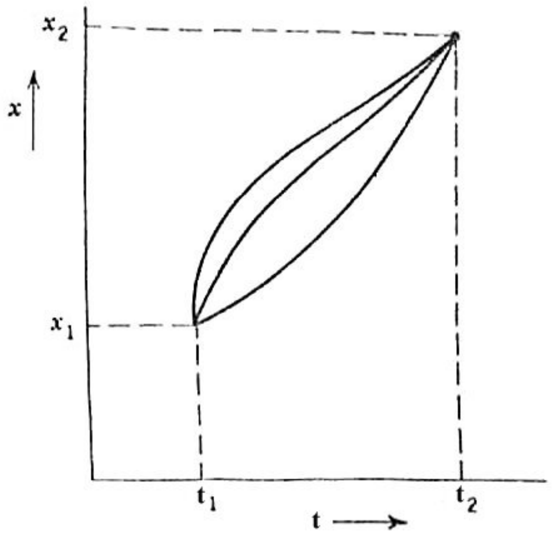
Substituindo a integração por partes em $\delta S = 0$, tem-se então:

$$\delta S = \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left(\nabla_x^T\varphi - \frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{x}}^T\varphi]\right)\phi\ dt = 0$$

Como a equação acima deve ser satisfeita para qualquer função arbitrária $\phi(t)$, contínua, diferenciável e que satisfaça as condições de contorno, então o termo entre parêntesis deve ser nulo, resultando na equação de *Euler-Lagrange*:

$$\nabla_x \varphi - \frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{x}} \varphi] = 0$$

**Exemplo 1.2:** Para ilustrar, considere o problema de determinar a curva de menor comprimento conectando dois pontos no espaço, conforme a figura abaixo.




O comprimento de uma curva conectando os pontos $(t_1, x_1)$ e $(t_2, x_2)$ é dado por:

$$S(x) = \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt$$

em que $\varphi[t, x(t), \dot{x}(t)] = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ e $ds = \sqrt{dt^2 + dx^2}$ que é o comprimento de um segmento infinitesimal da curva.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange para o problema acima, tem-se:

$$\nabla_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\nabla_{\dot{x}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$$

$$\nabla_x \varphi - \frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{x}} \varphi] = 0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}\right) = 0$$

ou seja: $\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \text{constante}$, o que implica que $\dot{x}^*(t) =$ constante. Portanto, como não poderia deixar de ser, o caminho mais curto entre dois pontos é uma reta: $x^*(t) = a\,t + b$.

Naturalmente, para assegurar que a função $x(t)$ minimize o funcional $S(x)$, a condição suficiente de segunda ordem deve ser verificada, que no caso de variações significa que a segunda variação de $S$ deve ser positiva para todas variações possíveis de $x$, isto é:

$$\delta^2 S > 0 \ , \ \forall\ \delta x$$

que é equivalente a $(\delta x)^T\ \nabla_x^2 S\ (x^*)\ \delta x > 0$, ou ainda pela condição de segunda ordem de Legendre:

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \varphi(x^*, \dot{x}^*, t) > 0$$

Aplicando esta condição para o exemplo acima tem-se:

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \varphi = \frac{1}{(1+\dot{x}^2)^{3/2}} > 0$$

logo, a solução ótima $x^*(t)$ minimiza o funcional $S(x)$.

Retornando ao problema de otimização de sistema dinâmicos, seja então o problema:

$$\min_{t_f, x(t), u(t), t\in[0,t_f]} \Phi[x(t),u(t),t_f] = \psi[x(t_f),t_f] + \int_0^{t_f} \varphi\,[x(t),u(t),t]\ dt$$

$$\text{sujeito a:} \quad \dot{x}(t) = f[x(t),u(t),\mathrm{t}] \quad , \quad x(0) = x_o$$

$$h[x(t_f),t_f] = 0$$

Introduzindo os multiplicadores de Lagrange associado às restrições chega-se a:

$$L[x(t),u(t),\lambda(t),\eta,t_f] = \psi[x(t_f),t_f] + \eta^T\ h[x(t_f),t_f] + \int_0^{t_f} \{\varphi\,[x(t),u(t),t] + \lambda^T(\mathrm{t})\ (f[x(t),u(t),\mathrm{t}] - \dot{x}(t))\}\ dt$$

que pode ser dividida em duas funções:

$\Theta[x(t_f),\eta,t_f] = \psi[x(t_f),t_f] + \eta^T\ h[x(t_f),t_f]$ e

$\Lambda[x(t),u(t),\lambda(t),t] = \varphi[x(t),u(t),t] + \lambda^T(\mathrm{t})\ (f[x(t),u(t),\mathrm{t}] - \dot{x}(t))$

resultando no funcional:

$$L[x(t),u(t),\lambda(t),\eta,t_f] = \Theta[x(t_f),\eta,t_f] + \int_0^{t_f} \Lambda\,[x(t),u(t),\lambda(\mathrm{t}),t]\ dt$$

que ao ser minimizado resulta nas equações de Euler-Lagrange:

$$\nabla_x \Lambda - \frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{x}} \Lambda] = 0 = \nabla_x \varphi + \nabla_x^T f \ \lambda + \dot{\lambda}$$

$$\nabla_\omega \Lambda - \frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{\omega}} \Lambda] = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\dot{\omega}} \Lambda = cte$$

em que $\dot{\omega}(t) = u(t)$, e pelas condições de complementaridade para $\dot{\omega}(t_f)$:

$$[\nabla_\omega \Theta + \nabla_{\dot{\omega}} \Lambda]^T \delta\omega_f = 0 \ \Rightarrow \nabla_\omega \Theta + \nabla_{\dot{\omega}} \Lambda = 0 \ \Rightarrow \ \nabla_{\dot{\omega}} \Lambda = 0 \quad \text{para } t = t_f$$

pois $\omega(t_f)$ é livre ($\delta\omega_f \neq 0$) e $\Theta$ não depende de $\omega$, chega-se a $\nabla_{\dot{\omega}} \Lambda = 0 \ \forall \ t$, ou seja:

$$\nabla_{\dot{\omega}} \Lambda = 0 = \nabla_{\dot{\omega}} \varphi + \nabla_{\dot{\omega}}^T f \ \lambda = \nabla_u \varphi + \nabla_u^T f \ \lambda$$

Definindo a seguinte *função de Hamilton* (ou *Hamiltoniano*):

$$H[x(t),u(t),\lambda(t),t] = \varphi[x(t),u(t),t] + \lambda^T(\mathrm{t}) \ f[x(t),u(t),\mathrm{t}]$$

então, as condições necessárias de primeira ordem (Euler-Lagrange) descritas acima são equivalentes a:

$$\dot{x} = \nabla_\lambda H = f$$

$$\dot{\lambda} = -\nabla_x H = -\nabla_x \varphi - \nabla_x^T f \ \lambda$$

$$\nabla_u H = \nabla_u \varphi + \nabla_u^T f \ \lambda = 0$$

que devem ser resolvidas juntamente com as condições iniciais e finais e as condições de complementaridade:

$$x(0) = x_o$$

$$h[x(t_f),t_f] = 0$$

$$[\nabla_{x(t_f)} \Theta - \lambda(t_f)]^T \delta x(t_f) = 0$$

$$\{H[x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f] + \nabla_{t_f} \Theta\} \ \delta t_f = 0$$

A condição de segunda ordem pode ser verificada pela positividade de $\nabla_u^2 H$. Este conjunto de condições são conhecidos como *Princípio do Mínimo de Pontryagin* (1962), e os multiplicadores de Lagrange, $\lambda(t)$, são conhecidos como *variáveis adjuntas*. Para as partes do caminho $u(t)$ sobre as restrições $u^{\min}$ ou $u^{max}$, vale a seguinte condição de otimalidade, no lugar de $\nabla_u H = 0$:

$$H[x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t),t] \leq H[x^*(t),u(t),\lambda^*(t),t]$$

para todos as possíveis funções $u(t)$.

Para problemas com restrições de desigualdade do tipo:

$$g[x(t),u(t),t] \leq 0 \ , \ \forall\, t \in [0, t_f]$$

em que $g \in \Re^p$ é duas vezes continuamente diferenciável e o subconjunto de restrições ativas, $g^a$, não deve ser maior que o número de variáveis de controle, $u$, e deve apresentar uma matriz Jacobiana, $\nabla_u g^a$, de posto completo $\forall\, t \in [0, t_f]$. Exemplos de restrições de desigualdade que satisfazem estas condições são:

$$u^{\min} \leq u(t) \leq u^{max} \ , \ \forall\, t \in [0, t_f]$$

$$u^{\min}[x(t),t] \leq u(t) \leq u^{max}[x(t),t] \ , \ \forall\, t \in [0, t_f]$$

$$|u(t)| \leq u^m \ , \ \forall\, t \in [0, t_f]$$

$$||u(t)||^2 \leq r^2 \ , \ \forall\, t \in [0, t_f] \ , r \in \Re$$

Introduzindo funções de folga $\dot{z}(t)$, isto é:

$$g_i[x(t),u(t),t] + \dot{z}_i^2(t) = 0 \ , \ i = 1,2,...,p$$

tem-se o integrando da função de Lagrange na forma:

$$\Lambda[x(t),u(t),\lambda(t),t] = \varphi[x(t),u(t),t] + \lambda^T(\text{t})\ (f[x(t),u(t),\text{t}] - \dot{x}(t)) + \mu^T(\text{t})\ (g[x(t),u(t),\text{t}] + \dot{z}^2(t))$$

em que o vetor $\dot{z}^2(t)$ = $[...\,\dot{z}_i^2(t)\,...]^T$. Neste caso as equações de Euler-Lagrange são dadas por:

$$\nabla_x \Lambda - \frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{x}} \Lambda] = 0 = \nabla_x \varphi + \nabla_x^T f\ \lambda + \nabla_x^T g\ \mu + \dot{\lambda}$$

$$\nabla_\omega \Lambda - \frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{\omega}} \Lambda] = 0 \ \Rightarrow \ \nabla_{\dot{\omega}} \Lambda = cte$$

$$\nabla_z \Lambda - \frac{d}{dt}[\nabla_{\dot{z}} \Lambda] = 0 \ \Rightarrow \ \nabla_{\dot{z}} \Lambda = cte$$

De modo análogo às condições de complementaridade para $\omega(t)$, que resultam em $\nabla_{\dot{\omega}} \Lambda = 0 \ \forall\, t$, para a função $z(t)$ tem-se:

$$[\nabla_z \Theta + \nabla_{\dot{z}} \Lambda]^T\ \delta z_f = 0 \ \Rightarrow \nabla_z \Theta + \nabla_{\dot{z}} \Lambda = 0 \ \Rightarrow \ \nabla_{\dot{z}} \Lambda = 0 \quad \text{para } \ t = t_f$$

logo, $\nabla_{\dot{z}} \Lambda = 0 \ \forall\, t$ e, pela definição de $\Lambda$, $\mu_i\ \dot{z}_i = 0$, ou ainda $\mu_i\, g_i = 0$, $i = 1,2,...,p$.

Definindo o Hamiltoniano para este caso:

$$H[x(t),u(t),\lambda(t),t] = \varphi[x(t),u(t),t] + \lambda^T(\text{t})\ f[x(t),u(t),\text{t}] + \mu^T(\text{t})\ g[x(t),u(t),\text{t}]$$

então o Princípio do Mínimo de Pontryagin (ou condições necessárias de otimalidade para systemas dinâmicos) é dado por:

$$\dot{x} = \nabla_\lambda H = f$$

$$\dot{\lambda} = -\nabla_x H = -\nabla_x \varphi - \nabla_x^T f\ \lambda - \nabla_x^T g\ \mu$$

$$\nabla_u H = \nabla_u \varphi + \nabla_u^T f\ \lambda + \nabla_u^T g\ \mu = 0$$

$$\mu \geq 0$$

$$\nabla_u^2 H \geq 0 \quad \forall \; \{\delta u \mid \nabla_u^T g^a \, \delta u = 0\}$$

juntamente com as condições iniciais, finais e de complementaridade:

$$x(0) = x_o$$

$$h[x(t_f),t_f] = 0$$

$$[\nabla_{x(t_f)}\Theta - \lambda(t_f)]^T \, \delta x(t_f) = 0$$

$$\{H[x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f] + \nabla_{t_f}\Theta\} \; \delta t_f = 0$$

$$\mu_i \, g_i = 0, \; i = 1,2,...,p.$$

### *1.3 Controle ótimo*

Analisando inicialmente o problema de controle ótimo para sistemas lineares:

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \quad , \quad x(0) = x_o$$

com a seguinte função objetivo quadrática:

$$S[x(t),u(t),t_f] = \frac{1}{2}\|x(t_f)\|_T^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\|x(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2\right] dt$$

em que $\|x\|_Q^2 = x^T\, Q\, x$ e $T \geq 0$, $Q(t) \geq 0$ e $R(t) > 0$ são matrizes simétricas de pesos. Este problema é conhecido como LQ (*Linear Quadratic*), resultando no controlador LQR (*Linear Quadratic Regulator*). Definindo o Hamiltoniano para este problema:

$$H[x(t),u(t),\lambda(t),t] = \frac{1}{2}\|x(t)\|_{Q(t)}^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{R(t)}^2 + \lambda^T\,[A\,x + B\,u]$$

então, pelo princípio do mínimo de Pontryagin, tem-se:

$$\dot{x} = \nabla_\lambda H = A\,x + B\,u$$

$$\dot{\lambda} = -\nabla_x H = -Q\,x - A^T\lambda$$

$$\nabla_u H = R\,u + B^T\lambda = 0$$

$$x(0) = x_o$$

$$\lambda(t_f) = T\,x(t_f)$$

que resolvendo para $u(t)$, chega-se a:

$$u = -R^{-1}\,B^T\lambda$$

$$\dot{x} = A\,x - B\,R^{-1}\,B^T\lambda$$

gerando um problema de TPBVP (*two-point boundary value problem*) para $x$ e $\lambda$, cuja solução minimiza a função objetivo, pois $\nabla_u^2 H = R > 0$, e é um mínimo global devido a convexidade do problema. Nesta formulação, $\lambda$ também é conhecido como **co-estado** ou **variáveis adjuntas**. Se a solução $\lambda(t)$ do problema de TPBVP puder ser expressa como uma função da solução $x(t)$ em termos de uma transformação linear $P(t) \in \Re^{n \times n}$, isto é, $x(t)$ ser uma base de soluções para $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = P(t)\, x(t)$$

então a solução do TPBVP pode ser facilmente obtida. Para verificar tal possibilidade, primeiro substitui-se esta dependência nas equações para $\dot{x}$ e $\dot{\lambda}$, e subtrai-se uma da outra resultando em:

$$(\dot{P} + PA + A^T P - P\, B\, R^{-1}\, B^T\, P + Q)\, x(t) = 0$$

que deve ser satisfeita $\forall\ t$, logo como $x(t) \neq 0$ então:

$$\dot{P} = -PA - A^T P + P\, B\, R^{-1}\, B^T\, P - Q$$

que é uma equação diferencial matricial não linear, conhecida como equação de *Riccati* dinâmica, cuja condição de contorno é obtida de $\lambda(t_f) = T\, x(t_f)$, ou seja:

$$P(t_f) = T$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = t_f - t$, tem-se $d\tau = -dt$ e:

$$\dot{P} = PA + A^T P - P\, B\, R^{-1}\, B^T\, P + Q$$

$$P(0) = T$$

Portanto, o problema de TPBVP foi transformado em um problema de valor inicial de dimensão $n\,(n + 1) / 2$, pois $P(t)$ é uma matriz simétrica. Com a solução da equação de Riccati dinâmica, a lei de controle ótimo quadrático é dada por:

$$u^*(t) = -K(t)\, x^*(t)$$

$$K(t) = R(t)^{-1}\, B(t)^T\, P(t)$$

que é independente da condição inicial $x_o$. O sistema dinâmico em malha fechada pode ser escrito como:

$$\dot{x}^* = (A - B\, R^{-1}\, B^T\, P)\, x^* = A_K\, x^*\, , \quad x(0) = x_o$$

em que $A_K(t) = A - B\ R^{-1}\ B^T\ P$ é a matriz característica da dinâmica do sistema regulado. Observa-se também que o valor ótimo da função objetivo é dado por:

$$S[x^*, u^*, t_f] = \frac{1}{2} x_o^T\, P(0)\, x_o$$

em que $P(0)$ é obtido em $t = 0$ ($\tau = t_f$). Este resultado pode ser verificado pela equação:

$$\frac{d}{dt}(x^T P\, x) = \dot{x}^T P\, x + x^T \dot{P}\, x + x^T P\, \dot{x}$$

que ao substituir as expressões para $\dot{P}$ e $\dot{x}^*$, resulta em:

$$\frac{d}{dt}(x^T P\,x) = -x^T Q\,x - x^T P\,B\,R^{-1}\,B^T P\,x = -x^T Q\,x - u^T R\,u$$

Integrando a equação acima em $[0, t_f]$ tem-se:

$$x(0)^T P(0)\,x(0) = x(t_f)^T P(t_f)\,x(t_f) + \int_0^{t_f} (x^T Q\,x + u^T R\,u)dt = 2\,S[x(t),u(t),t_f]$$

pois $P(t_f) = T$.

Fazendo a integração em $[t, t_f]$ tem-se:

$$x(t)^T P(t)\,x(t) = x(t_f)^T\,T\,x(t_f) + \int_t^{t_f} (x^T Q\,x + u^T R\,u)dt \geq 0$$

de onde conclui-se que $P(t)$ é positiva semidefinida.

Para o caso particular de um sistema invariante no tempo, com $[A \quad B]$ controlável, $t_f = \infty$ (**horizonte infinito**) e matrizes pesos constantes, isto é:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \quad , \quad x(0) = x_o$$

com a seguinte função objetivo quadrática:

$$S[x(t),u(t),t_f] = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[ \|x(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 \right] dt$$

em que $Q \geq 0$ e $R > 0$ são matrizes simétricas de pesos, a lei de controle ótimo pode ser obtida através da solução da equação de *Riccati estacionária*:

$$PA + A^T P - P\,B\,R^{-1}\,B^T P + Q = 0$$

que pode ser eficientemente resolvida via decomposição em valores característicos do gradiente do Hamiltoniano associado. Neste caso a matriz de ganhos, $K$, da lei de controle é invariante no tempo e a lei de controle ótimo quadrático é dada por:

$$u^*(t) = -K\,x^*(t)$$

$$K = R^{-1}\,B^T P$$

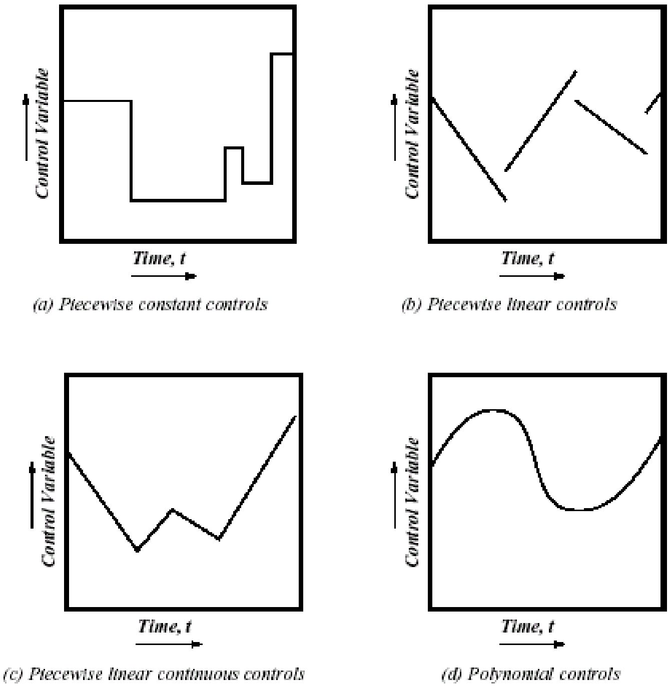
O sistema dinâmico em malha fechada pode ser escrito como:

$$\dot{x}^* = (A - B\,R^{-1}\,B^T P)\,x^* = A_K\,x^* \,, \quad x(0) = x_o$$

em que $A_K = A - B\,R^{-1}\,B^T P$ é a matriz característica do sistema regulado.

Na maioria dos casos de controle ótimo não linear, é mais eficiente tratar o problema como uma programação não linear do que utilizar o princípio do mínimo de Pontryagin, para obter o controle ótimo, $u(t)$. Nestes casos, a escolha da forma das variáveis de controle toma um aspecto mais de engenharia do que matemático, pois dependerá da forma com que as ações de controle serão implementadas na prática.

Alguns tipos de variações mais comuns para as variáveis de controle estão ilustrados a seguir.




(a) Piecewise constant controls

(b) Piecewise linear controls

(c) Piecewise linear continuous controls

(d) Polynomial controls

Sendo as duas primeiras mais freqüentemente utilizadas em controle ótimo de processos.

Para qualquer um dos casos acima, o algoritmo abaixo mostra uma maneira de solucionar o problema de otimização dinâmica via NLP, conhecida como método da tentativa-e-erro ou *single-shooting*.

<u>algoritmo</u>

1) Escolher um perfil inicial para as variáveis de controle, $u^0(t)$, $k = 0$.

2) Integrar o sistema de equações algébrico diferenciais.

3) Calcular a função objetivo e restrições.

4) Corrigir as variáveis de controle pelo uso de métodos de NLP.

5) Verificar a convergência de $u^k(t)$. Caso não esteja satisfeita $k \leftarrow k + 1$ (ir para 2).

6) FIM.

Outra forma de resolver o problema é através da discretização das equações diferenciais (ou método simultâneo) por técnicas de elementos finitos, diferenças finitas ou aproximação polinomial, gerando um problema algébrico de programação não linear de elevada dimensão, que também pode ser resolvido por qualquer método de NLP com restrição. Também é possível particionar o horizonte de tempo em subintervalos e integrar os sub-problemas independentemente, método *multiple-shooting*, impondo condições de continuidade entre os intervalos.

O problema de controle ótimo para sistemas lineares com incertezas decorrentes de distúrbios aditivos do tipo ruído branco gaussiano (com média zero e desvio padrão σ) e tendo informação parcial dos estados, ou seja, nem todos os estados são medidos:

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) + v(t) \quad , \quad x(0) = x_o$$

$$y(t) = C(t)\, x(t) + w(t)$$

em que $v(t)$ e $w(t)$ são ruídos brancos gaussianos do sistema e das medidas, respectivamente, com a seguinte função objetivo quadrática:

$$S[x(t),u(t),t_f] = E\{ \left\| x(t_f) \right\|_T^2 + \int_0^{t_f} \left[ \left\| x(t) \right\|_{Q(t)}^2 + \left\| u(t) \right\|_{R(t)}^2 \right] dt \,\}$$

em que $E\{z\}$ é a esperança ou valor esperado da variável aleatória $z$, $T \geq 0$, $Q(t) \geq 0$ e $R(t) > 0$ são matrizes simétricas de pesos, é conhecido como LQG (*Linear Quadratic Gaussian*). O controlador LQG é uma combinação do estimador de estados de Kalman, ou filtro de Kalman, ou ainda LQE (*Linear Quadratic Estimator*) com o LQR e a aplicação do princípio da separação, sendo dado pela solução do seguinte sistema de equações:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \,, \quad \hat{x}(0) = E\{x_o\}$$

$$u(t) = -K(t)\, \hat{x}(t)$$

em que $L(t)$ é a matriz de ganhos do filtro de Kalman, que é obtida pela solução da seguinte equação de Riccati:

$$\dot{P} = AP + PA^T - P\, C^T\, W^{-1}\, C\, P + V$$

$$P(0) = E\{x_o\, x_o^{\mathrm{T}}\}$$

em que $E\{v(t)\, v^{\mathrm{T}}(\tau)\} = V\, \delta(t - \tau)$ e $E\{w(t)\, w^{\mathrm{T}}(\tau)\} = W\, \delta(t - \tau)$ com V > 0 e W > 0 as matrizes de intensidade da correlação cruzada dos ruídos e $\delta(t)$ a função delta de Dirac, resultando em: $L(t) = P(t)\, C^T(t)\, W^{-1}(t)$.

A matriz de ganhos do controlador, $K(t)$, também é obtida pela solução de uma equação de Riccati, que tem a forma:

$$\dot{P} = -PA - A^T P + P\, B\, R^{-1}\, B^T\, P - Q$$

$$P(t_f) = T$$

resultando em: $K(t) = R(t)^{-1}\, B(t)^T\, P(t)$.

## 1.4 Controle Preditivo

## Exercícios

1. Problema do pêndulo invertido.

## Bibliografia Básica


- The Mathematical Theory of Optimal Processes – L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze & E.F. Mishchenko – John Wiley & Sons, 1962.
- The Variational Method in Engineering – R. S. Schechter – McGraw-Hill, 1967.
- Optimization: Theory and Practice – G. S. G. Beveridge & R. S. Schechter – McGraw-Hill, 1970.
- Nonlinear Programming – M. S. Bazaraa & C. M. Shetty – John Wiley & Sons, 1979.
- Optimal Control – F.L. Lewis & V.L. Syrmos – John Wiley & Sons, 1995.
- Optimierung – M. Papageorgiou – Oldenbourg Ed., 1996.
- Numerical Optimization – J. Nocedal & S. J. Wright – Springer, 1999.
- Numerical Optimization – J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal & C. A. Sagastizábal – Springer, 2003.
- Nonlinear Optimization – A. Ruszczynski – Princeton University Press, 2006.
- Nonlinear Programming: Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes – L. T. Biegler – SIAM, 2010.