CONTROLE DE PROCESSOS I

Pré-Requisito: MET. MAT. I

1. RESPOSTA DE SISTEMAS DINÂMICOS (Cap. 4-7 - Seborg, Edgar, Mellichamp; Cap. 4 - Kreyszig)

1.1 - Função de Transferência

⇒ É uma expressão algébrica para a relação dinâmica entre a entrada e a saída do modelo do processo;

⇒ Pode ser obtida apenas para sistemas lineares. Os modelos não-lineares devem primeiro ser linearizados para sua posterior aplicação.

ex: solução de P.V.I. usando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} 5\dfrac{dy}{dt} + 4y = r(t) = 2 \\ y(0) = y_0 = 1 \end{cases}$$

$$5\left[sY(s) - y(0)\right] + 4\,Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$(5s+4)\,Y(s) = \frac{2}{s} + 5 \implies Y(s) = \frac{5s+2}{s(s+4)} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2\left(s+\frac{4}{5}\right)}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{5}t}}$$

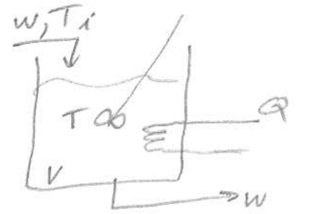
NOTA: qualquer mudança em $r(t)$ ou y_0 requer uma nova transformada e sua respectiva inversa.

Para processos reais, em geral, deseja-se analisar o seu comportamento dinâmico frente a perturbações que tendem a tirar o processo do seu estado estacionário normal de operação. Desta forma é conveniente definir uma nova variável:

$$x(t) = y(t) - \bar{y}$$

onde $\bar{y}$ é o valor de $y(t)$ no estado estacionário

$x(t)$ é a variável desvio ou variável perturbação ex.:



$$\begin{cases} \rho V C_p \dfrac{dT}{dt} = w C_p (T_i - T) + Q \\ T(0) = \bar{T} \quad \text{(estado estacionário)} \\ T_i(0) = \bar{T}_i \quad e \quad Q(0) = \bar{Q} \end{cases}$$

estado estacionário : $w C_p (\bar{T}_i - \bar{T}) + \bar{Q} = 0$

variável desvio : $x(t) = T(t) - \bar{T} \quad \therefore \quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dT}{dt}$

$$\rho V C_p \frac{dx}{dt} = w C_p (T_i - x + \bar{T}) + Q \qquad \text{(subtraindo o estado estac.)}$$

$$\rho V C_p \frac{dx}{dt} = w C_p (T_i - \bar{T}_i - x) + Q - \bar{Q}$$

definindo : $v(t) = T_i - \bar{T}_i$ e $u(t) = Q - \bar{Q}$

tem-se : $\rho V C_p \dfrac{dx}{dt} = w C_p (v - x) + u \qquad (\div w C_p)$

$$\frac{\rho V}{w} \frac{dx}{dt} = v - x + \frac{u}{w C_p} \quad , \quad \tau \equiv \frac{\rho V}{w} \quad e \quad K \equiv \frac{1}{w C_p}$$

τ é a <u>constante de tempo</u> do processo, sendo uma indicação da velocidade de resposta do processo. τ grande $\Rightarrow$ resposta lenta.

K é o <u>ganho do estado estacionário</u>, pois $\bar{x} = 1 . \bar{v} + K \bar{u}$, relacionado a entrada $u(t)$, enquanto que em relação a $v(t)$, o ganho é 1.

Portanto :
$$\begin{cases} \tau \dfrac{dx}{dt} = v - x + K u \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando T. Laplace : $\tau \left[s X(s) - x(0) \right] = V(s) - X(s) + K U(s)$

$$X(s) = \frac{K}{\tau s + 1} U(s) + \frac{1}{\tau s + 1} V(s) = G_p(s) U(s) + G_d(s) V(s)$$

onde $G_p(s) = \dfrac{K}{\tau s + 1}$ e $G_d(s) = \dfrac{1}{\tau s + 1}$ são chamadas de <u>funções de transferência</u>, sendo que $G_p(s)$ relaciona a entrada $U(s)$ com a saída $X(s)$, e $G_d(s)$ relaciona a entrada $V(s)$ com a saída $X(s)$. Observa-se que τ e K dependem somente das condições de operação e não da condição inicial.

ex: mantendo $T_i = \bar{T}_i$ cte e aplicando um degrau de ΔQ em Q, i.e., $Q = \bar{Q} + \Delta Q$, tem-se $v(t) = 0 \Rightarrow V(s) = 0$ e

$$u(t) = \Delta Q \rightarrow U(s) = \frac{\Delta Q}{s} \quad \therefore \quad X(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{\Delta Q}{s}$$

$$X(s) = K \Delta Q \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right) \rightarrow x(t) = K \Delta Q (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\boxed{T(t) = \bar{T} + K \Delta Q (1 - e^{-t/\tau})}$$

Portanto, cada função de transferência indica a relação dinâmica entre uma variável de entrada com uma variável de saída:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad ; \quad V(s) = 0$$

$$\frac{X(s)}{V(s)} = G_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad ; \quad U(s) = 0$$

Os efeitos de mudanças simultâneas são <u>aditivos</u> devido ao princípio da superposição para <u>sistemas lineares</u>.

<u>Propriedades da função de transferência</u>

1) A mudança no estado estacionário da saída, $x(t)$, devido a uma mudança mantida na entrada pode ser obtida diretamente de $G(s)$, fazendo $s = 0$. Portanto, se um processo possui um ganho, K, do estado estacionário, então: $\boxed{K = G(0)}$

2) A ordem do polinômio do denominador de $G(s)$ é igual a ordem da equação diferencial do sistema.

3) Propriedade aditiva: $X(s) = G_p(s)\,U(s) + G_d(s)\,V(s)$

4) Para processos fisicamente realizáveis, a ordem do polinômio do denominador, n, de $G(s)$ é sempre maior ou igual a ordem do polinômio do numerador, m, $(n \geq m)$. Funções de transferência com $m > 0$ exibem dinâmicas na entrada.

5) Processos em série tem suas funções de transferência multiplicadas.

$$U(s) \rightarrow \boxed{G_1(s)} \xrightarrow{X_1(s)} \boxed{G_2(s)} \xrightarrow{X_2(s)} \qquad \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = G_2(s)$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = G_1(s) \quad ; \quad \frac{X_2(s)}{U(s)} = G_1(s)\,G_2(s) = G(s)$$

1.2 - Linearização de Modelos Não-Lineares

Quando um processo está operando nas vizinhanças de um estado de operação, um modelo linearizado do processo pode ser suficientemente preciso.

Dado um modelo não-linear de um processo:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, w)$$

uma expansão em série de Taylor em torno de um estado estacionário normal de operação, $\bar{y}$ e $\bar{w}$, truncada no primeiro termo, resulta:

$$f(y,w) \cong f(\bar{y},\bar{w}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{y},\bar{w}} (y-\bar{y}) + \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{\bar{y},\bar{w}} (w-\bar{w})$$

mas $f(\bar{y},\bar{w}) = 0$ (estado estacionário)

e $x(t) \equiv y(t) - \bar{y} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$u(t) \equiv w(t) - \bar{w}$

$$\frac{dx}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{y},\bar{w}} \cdot x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{\bar{y},\bar{w}} \cdot u(t) \quad \text{, sistema linear}$$

1.3 - Sistemas Lineares de 1ª e 2ª Ordem

1.3.1 Tipos de entradas de processos:

1) entradas que podem ser manipuladas para controlar o processo (ex: $Q(t)$ do tanque)
2) entradas que não são manipuladas, também chamadas de perturbações ou variáveis de carga (ex: $T_i(t)$ do tanque)

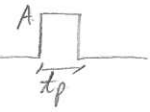
1.3.2 Entradas padrões de processo:

1) degrau: 

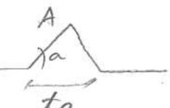
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow U(s) = \frac{A}{s}$$

2) rampa: 

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ at, & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow U(s) = \frac{a}{s^2}$$

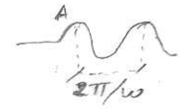
3) pulso retangular: 

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & 0 \leq t < t_p \\ 0, & t \geq t_p \end{cases} \Rightarrow U(s) = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-t_p s}\right)$$

4) pulso triangular: 

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ at, & 0 \leq t < t_p/2 \\ -at, & t_p/2 \leq t < t_p \\ 0, & t \geq t_p \end{cases} \Rightarrow U(s) = \frac{aA}{s^2}\left(1 - 2e^{-\frac{t_p s}{2}} + e^{-t_p s}\right)$$

$$a = \frac{2A}{t_p}$$

5) senóide: 
$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ A\,\mathrm{sen}\,\omega t, & t\geq 0\end{cases} \Rightarrow U(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

6) impulso: 
$$\mu(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \infty, & t=0\\ 0, & t>0\end{cases} \Rightarrow U(s)=1$$

7) aleatório: 
$$\mu(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \bar{\mu}+\sigma_{\mu}\cdot rnd(t)\end{cases} \qquad rnd(t)\in[-1,1]$$

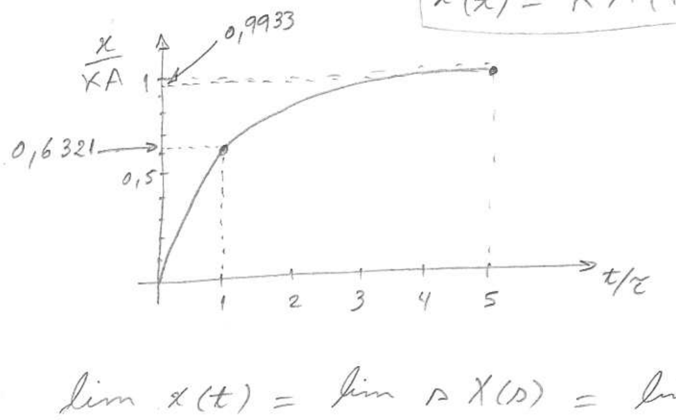
1.3.3 Resposta de sistemas de 1ª ordem

função de transferência : $G(s)=\dfrac{K}{\tau s+1}$

$$X(s)=G(s)\cdot U(s)$$

Resposta a um degrau : $X(s)=G(s)\cdot\dfrac{A}{s}=\dfrac{KA}{s(\tau s+1)}=KA\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1/\tau}\right)$

$$\boxed{x(t)=KA\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$



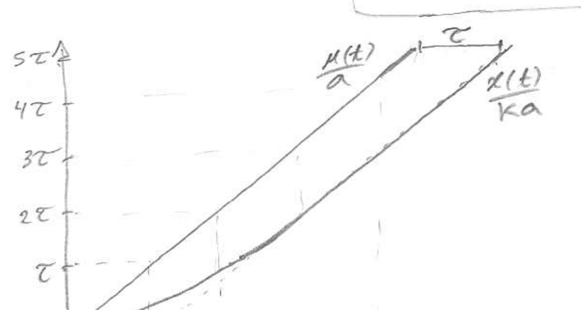
$$\frac{x(t)}{KA}=1-e^{-t/\tau}$$

$1-e^{-1}=0,6321 \Rightarrow$ para $t=\tau$ a resposta do processo está 63,21% completa. E para $t=5\tau$ está 99,33% completa.

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}s\,X(s)=\lim_{s\to 0}A\,G(s)=AK$$, estado estacionário final

Resposta a uma rampa : $X(s)=G(s)\cdot\dfrac{a}{s^2}=\dfrac{Ka}{s^2(\tau s+1)}=Ka\left(\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{\tau}{s}+\dfrac{\tau}{s+1/\tau}\right)$

$$\boxed{x(t)=Ka\left[t+\tau\left(e^{-t/\tau}-1\right)\right]}$$



para $t\gg\tau \Rightarrow e^{-t/\tau}\cong 0$

$$x(t)\approx Ka\,(t-\tau)$$

Resposta a uma senóide: $X(s) = \dfrac{KA\omega}{(\tau s+1)(s^2+\omega^2)}$

$$X(s) = \frac{KA}{\omega^2\tau^2+1}\left(\frac{\omega\tau^2}{\tau s+1} - \frac{s\omega\tau}{s^2+\omega^2} + \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$x(t) = \frac{KA}{\omega^2\tau^2+1}\left[\omega\tau e^{-t/\tau} - \omega\tau\cos\omega t + \operatorname{sen}\omega t\right] = KA\left[\frac{\omega\tau e^{-t/\tau}}{\omega^2\tau^2+1} + \frac{\operatorname{sen}(\omega t+\phi)}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}}\right]$$

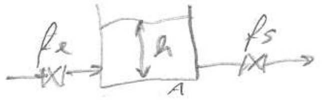
onde $\phi = -\operatorname{arctg}(\omega\tau)$
(ângulo de fase)

$$\left(\begin{array}{l} p\cos\theta + q\operatorname{sen}\theta = r\operatorname{sen}(\theta+\phi), \\ r = \sqrt{p^2+q^2} \quad e \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{p}{q} \end{array}\right)$$

$$t \gg \tau \implies x(t) \simeq \frac{KA\operatorname{sen}(\omega t+\phi)}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}}$$

NOTAS: - a saída e a entrada possuem a mesma freqüência, ω
- a saída está atenuada por $\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} < 1$
- a saída está defasada de ϕ em relação a entrada, $u(t) = A\operatorname{sen}\omega t$
- $\phi \begin{cases} <0 \implies \text{sistema exibe "lag" de fase} \\ >0 \implies \text{" " "lead" de fase} \end{cases}$ } convenção

ex: processo sem ganho estacionário (processos integradores)



$$A\frac{dh}{dt} = f_e(t) - f_s(t) \implies sAH(s) = F_e(s) - F_s(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{As}\left[F_e(s) - F_s(s)\right]$$

$\therefore \dfrac{H(s)}{F_e(s)} = \dfrac{1}{As}$ e $\dfrac{H(s)}{F_s(s)} = -\dfrac{1}{As}$ → funções de tranferência com comportamento de integração $\left(\frac{1}{s}\right)$.

$G(0) = \infty \implies$ não tem ganho do estado estacionário

$\implies$ qualquer mudanda de $f_e(t)$ ou $f_s(t)$ que tire do estado estacionário, não vai levar o sistema a um novo estado estac.

1.3.4 Resposta de sistemas de 2ª ordem

função de transferência: $G(s) = \dfrac{K}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} = \dfrac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$

$$\tau^2 = \tau_1\tau_2$$
$$2\xi\tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$\therefore \tau = \sqrt{\tau_1\tau_2}$$
$$\xi = \frac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\xi - \sqrt{\xi^2-1}}$$
$$\tau_2 = \frac{\tau}{\xi + \sqrt{\xi^2-1}}$$

$\xi > 1 \rightarrow$ raízes reais $\neq$ $\Rightarrow$ resposta sobre-amortecida

$\xi = 1 \rightarrow$ raízes reais $=$ $\Rightarrow$ resposta criticamente amortecida

$\xi < 1 \rightarrow$ raízes complexas $\Rightarrow$ resposta sub-amortecida

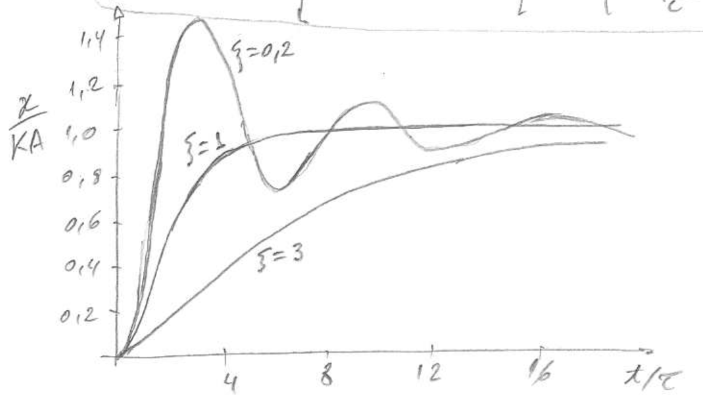
$\xi = 0 \Rightarrow$ raízes imaginárias puras

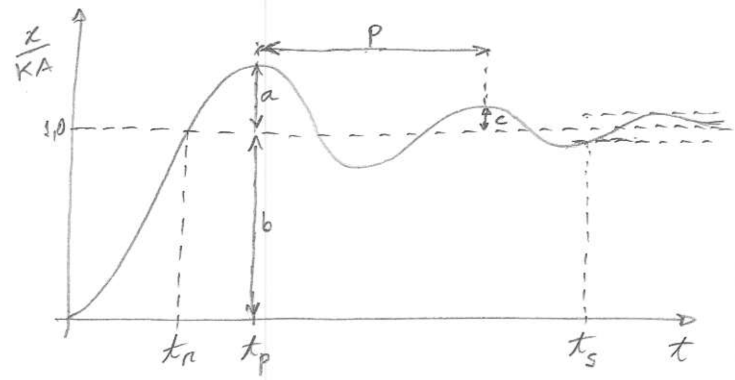
Resposta a um degrau : $X(s) = G(s) \cdot \frac{A}{s} = \frac{KA}{s(\tau^2 s^2 + 2\xi s + 1)}$

$\xi > 1$: $\boxed{x(t) = KA\left(1 - \frac{\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}}{\tau_1 - \tau_2}\right) = KA\left\{1 - e^{-\xi t/\tau}\left[\cosh\left(\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}t\right)\right]\right\}}$

$\xi = 1$: $\boxed{x(t) = KA\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]}$

$\xi < 1$: $\boxed{x(t) = KA\left\{1 - e^{-\xi t/\tau}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}t\right)\right]\right\}}$





t_r : tempo para o processo cruzar pela primeira vez o novo estado estac.

t_p : tempo para atingir o primeiro pico

t_s : tempo para o processo começar a oscilar abaixo de $\pm 5\%$ do novo estado estacionário (valor final)

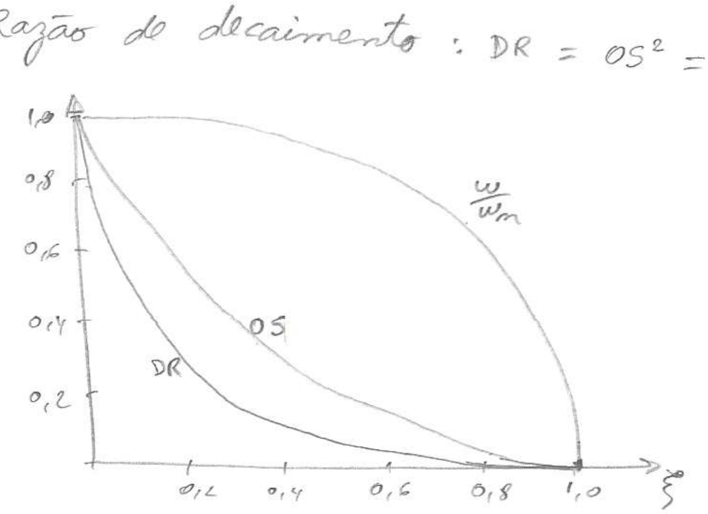
P : período de oscilação ; $P = \frac{2\pi}{\omega}$; $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}$ (freq. em rad.)

$f = 2\pi\omega$ (freq. em ciclos)

ω_n : freqüência natural de oscilação : $\omega_n = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \xi = 0$

Sobrelevação ("overshoot") : $OS = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \frac{a}{b}$

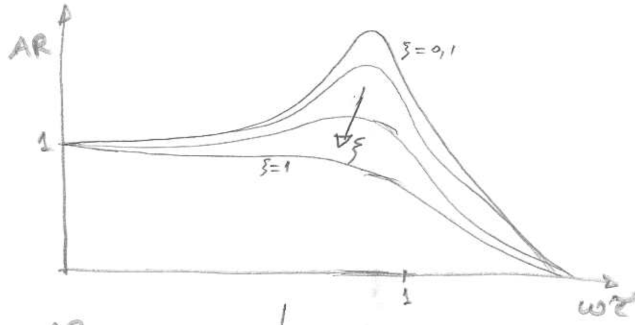
Razão de decaimento : $DR = OS^2 = \exp\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = \frac{c}{a}$



Resposta a uma senóide: $X(s) = G(s) \cdot \dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

$$\boxed{x(t) = \frac{KA}{\sqrt{[1-(\omega\tau)^2]^2+(2\xi\omega\tau)^2}}\,\operatorname{sen}(\omega t+\phi)} \quad ; \quad \phi = -\operatorname{arctg}\left[\frac{2\xi\omega\tau}{1-(\omega\tau)^2}\right]$$

$$AR = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega\tau)^2]^2+(2\xi\omega\tau)^2}}$$



→ razão de amplitude $\dfrac{\text{saída}}{\text{entrada}}$

$$\omega_{máx} = \frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\tau}\ ,\ 0<\xi<\underbrace{0,707}_{\to\ \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AR_{máx} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\xi > 0,707$ → não tem máximo

$\xi = 0$ → AR é indefinido

NOTA: um sinal periódico com $\omega \sim \omega_{máx}$ causa uma resposta muito oscilatória e amplificada quando $\xi \sim 0$.

1.4 - Sistemas de Ordem Superior e Tempo Morto

⇒ Os polos de $G(s)$, ou raízes da equação característica do sistema (raízes do polinômio do denominador de $G(s)$), também chamados de modos de resposta ou modos naturais, são os responsáveis pelas características dinâmicas do sistema, aliados aos zeros de $G(s)$.

- polo na origem ⇒ presença de elemento integrador ($\frac{1}{s}$)
- polo no semi-plano positivo (direito) ⇒ sistema instável ($e^{+t/\tau}$), ou de fase não-mínima (pois apresenta deslocamento de fase para entradas senoidais).
- polo complexo ⇒ comportamento oscilatório ($\operatorname{sen}\omega t$, $\cos\omega t$)
- todos os polos no semi-plano negativo (esquerdo) ⇒ sistema estável ($e^{-t/\tau}$), ou de fase mínima.

Dinâmicas na entrada podem introduzir zeros ou polos na função de transferência.

ex: $\tau_1 \dfrac{dx}{dt} + x = K\left(\tau_a \dfrac{du}{dt} + u\right) \Rightarrow G(s) = \dfrac{K(\tau_a s+1)}{\tau_1 s+1}$

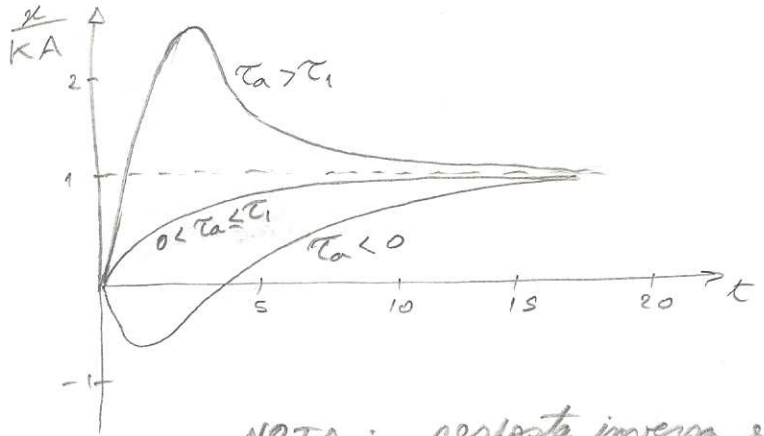
ex: $\tau_1 \dfrac{dx}{dt} + x = K\left(u + \dfrac{1}{\tau_a}\displaystyle\int_0^t u(\xi)\,d\xi\right) \Rightarrow G(s) = \dfrac{K(\tau_a s+1)}{s(\tau_1 s+1)}$

em geral: $G(s) = \dfrac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_m s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$

ou $G(s) = \dfrac{b_m}{a_n}\dfrac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(z-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \dfrac{b_0}{a_0}\dfrac{(\tau_{z_1}s+1)(\tau_{z_2}s+1)\dots(\tau_{z_m}s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\dots(\tau_n s+1)}$

$K = \dfrac{b_0}{a_0} = G(0)$, ganho. ; $z_i = -\dfrac{1}{\tau_{z_i}}$; $p_i = -\dfrac{1}{\tau_i}$

ex: $G(s) = \dfrac{K(\tau_a s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$; $U(s) = \dfrac{A}{s}$; $\tau_1 > \tau_2$



$\xi = \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} > 1$ (sobre-amort.)

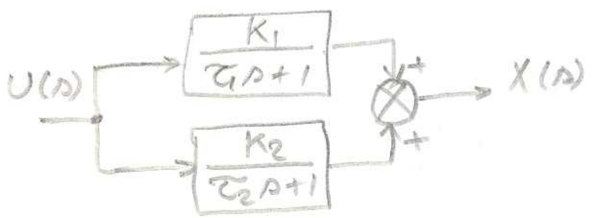
$\tau_a > \tau_1 \Rightarrow$ sobrelevação

$0 < \tau_a \le \tau_1 \Rightarrow \sim$ 1ª ordem

$\tau_a < 0 \Rightarrow$ <u>resposta inversa</u>

<u>NOTA</u>: resposta inversa e sobrelevação podem ocorrer quando há efeitos físicos que agem de forma oposta sobre a variável de saída em diferentes escalas de tempo.

1.4.1 <u>Sistemas de 1ª ordem em paralelo</u>:



$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

$G(s) = \dfrac{K(\tau_a s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$

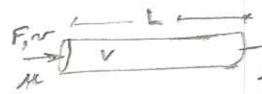
onde $K = K_1 + K_2$ e $\tau_a = \dfrac{K_1\tau_2 + K_2\tau_1}{K_1 + K_2}$

resposta inversa $\Rightarrow \tau_a < 0 \Rightarrow -\dfrac{K_2}{K_1} > \dfrac{\tau_2}{\tau_1}$, e

sendo $\tau_1 > 0$ e $\tau_2 > 0 \Rightarrow \text{sign}(K_1) = -\text{sign}(K_2)$ e $\text{sign}(K)$ = sinal do processo com maior constante de tempo.

1.4.2 <u>Tempo morto</u> ("dead time", "transportation lag", "distance-veloc. lag")

ex: transporte por tubulação : $\tau_d = \dfrac{V}{F} = \dfrac{L}{v}$



u e x é uma prop. do fluido em pontos distintos.

$x(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_d \\ u(t-\tau_d), & t \geq \tau_d \end{cases}$

⇒ considerando perfil plano de velocidade no tubo (plug-flow)

$\therefore \boxed{\dfrac{X(s)}{U(s)} = e^{-\tau_d s}}$

Para escoamentos laminares e/ou fluidos não-newtonianos, o processo de transporte pode ainda ser modelado por um tempo morto baseado na velocidade média do fluido. Uma formulação mais geral é modelar o processo de transporte como uma função de transferência FOPDT (*first-order plus dead-time*):

$$\boxed{G(s) = \frac{e^{-\tau_d s}}{\tau_m s + 1}} \qquad G(0) = K = 1$$

onde τ_m é a constante de tempo associada com o grau de mistura no tubo.

<u>Aproximações para o tempo morto</u>: usado no domínio da T. Laplace devido a sua não linearidade.

1 - Por um processo de 1ª ordem: $e^{-\tau_d s} = \frac{1}{e^{\tau_d s}} = \frac{1}{1 + \tau_d s + \frac{\tau_d^2 s^2}{2} + \frac{\tau_d^3 s^3}{3!} + \cdots}$

$$\boxed{e^{-\tau_d s} \approx \frac{1}{\tau_d s + 1}}$$

2 - Padé de 1ª ordem: $e^{-\tau_d s} = \frac{e^{-\tau_d s/2}}{e^{\tau_d s/2}} = \frac{1 - \frac{\tau_d}{2}s + \frac{\tau_d^2}{4}\frac{s^2}{2} + \cdots}{1 + \frac{\tau_d}{2}s + \frac{\tau_d^2}{4}\frac{s^2}{2} + \cdots}$

$$\boxed{e^{-\tau_d s} \approx \frac{1 - \frac{\tau_d s}{2}}{1 + \frac{\tau_d s}{2}}}$$

3 - Padé de 2ª ordem: $\boxed{e^{-\tau_d s} \approx \frac{1 - \frac{\tau_d s}{2} + \frac{\tau_d^2 s^2}{12}}{1 + \frac{\tau_d s}{2} + \frac{\tau_d^2 s^2}{12}}}$

<u>NOTA</u>: a aproximação só é razoável para sistemas que <u>não são</u> puro tempo morto.

1.4.3 <u>Aproximação de sistemas de ordem superior</u>

Sistema de ordem n:

1) devido a n sistemas de 1ª ordem com $\tau_i = \frac{\tau}{n}$ $\quad i = 1, \ldots, n$

$$G(s) = \frac{K}{\left(\frac{\tau}{n}s + 1\right)^n}$$

para $U(s) = \frac{A}{s} \Rightarrow x(t) = KA\left[1 - e^{-nt/\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(n\frac{t}{\tau}\right)^i}{i!}\right]$

para $n \to \infty \Rightarrow \boxed{G(s) \approx K e^{-\tau s}}$

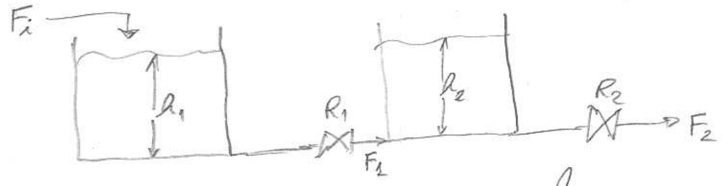
2) devido a n sistemas de 1ª ordem com $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\dots(\tau_n s+1)}$$

Se o processo é dominado por τ_1 e τ_2 (maiores ctes de tempo),

então : $\boxed{G(s) \approx \dfrac{K e^{-\tau_d s}}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}}$ onde $\boxed{\tau_d = \sum_{i=3}^{n} \tau_i}$

1.4.4 <u>Processos com interação</u>



$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = F_i - F_1$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = F_1 - F_2$$

$$F_1 = \frac{(h_1 - h_2)}{R_1} \; ; \quad F_2 = \frac{h_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{F_i}{A_1} - \dfrac{h_1 - h_2}{A_1 R_1} \\ \dfrac{dh_2}{dt} = \dfrac{h_1 - h_2}{A_2 R_1} - \dfrac{h_2}{A_2 R_2} \end{cases}$$

$x_1 = h_1 - \bar{h}_1$
$x_2 = h_2 - \bar{h}_2$
$u = F_i - \bar{F}_i$

$$\Rightarrow \quad s X_1(s) = \frac{U(s)}{A_1} - \frac{X_1(s) - X_2(s)}{A_1 R_1}$$

$$s X_2(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{A_2 R_1} - \frac{X_2(s)}{A_2 R_2}$$

$$\begin{bmatrix} s + \frac{1}{A_1 R_1} & -\frac{1}{A_1 R_1} \\ -\frac{1}{A_2 R_1} & s + \frac{1}{A_2 R_1} + \frac{1}{A_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{K_1(\tau_a s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \; , \quad \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{R_2}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{R_2/K}{\tau_a s + 1} \; ; \quad K_1 = R_1 + R_2 \; ; \quad \tau_a = \frac{R_1 R_2 A_2}{R_1 + R_2}$$

$$\tau = \sqrt{R_1 R_2 A_1 A_2} \; ; \quad \xi = \frac{R_1 A_1 + R_2 A_2 + R_2 A_1}{2\sqrt{R_1 R_2 A_1 A_2}}$$

$\tau_a > 0$; $\xi < 1$

$\downarrow$ zero < 0 ; $\downarrow$ sobre-amortecido

1.4.5 Processos MIMO ("multiple-input, multiple-output")

$\Rightarrow$ ler exemplo da seção 6.7 Seborg, Edgar, Mellichamp.

1.5 Modelos Dinâmicos Baseados em Dados

- Regressão linear (modelos lineares ou linearizados)
- Regressão não-linear (modelos não-lineares)

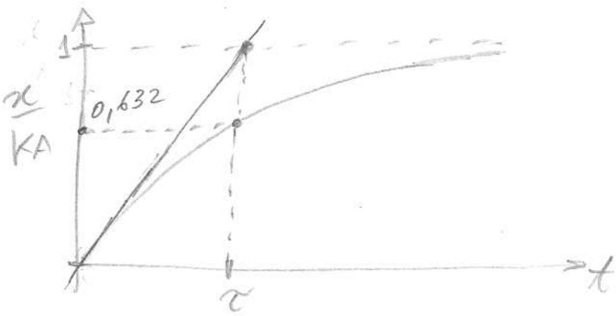
} ler cap. 7 (Seborg)

- Curva de reação (1ª e 2ª ordens): resposta a um degrau

Modelo de 1ª ordem:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = K u \xrightarrow{u(t)=A} \frac{x(t)}{KA} = \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{KA}\right)\right|_{t=0} = \frac{1}{\tau} \quad ; \quad K = \frac{1}{A}\lim_{t\to\infty} x(t)$$



$$\therefore \quad \tau = \frac{1}{\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{KA}\right)\right|_{t=0}}$$

ou

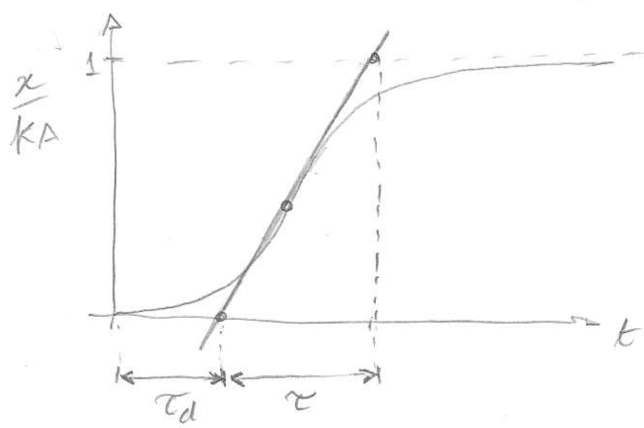
$$\tau = \left. t \right|_{\frac{x}{KA} = 0{,}632}$$

Modelo de 1ª ordem com tempo morto:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = K u(t - \tau_d) \xrightarrow{u(t)=A} \frac{x(t)}{KA} = \left[1 - e^{-\frac{(t-\tau_d)}{\tau}}\right] \cdot S(t-\tau_d)$$

$$S(t-\tau_d) = \begin{cases} 0, & t < \tau_d \\ 1, & t \geq \tau_d \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{A}\lim_{t\to\infty} x(t)$$

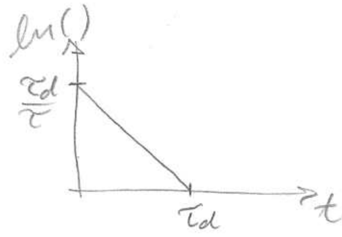


$$\tau = \frac{1}{\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{KA}\right)\right|_{t = \text{pto inflexão}}}$$

$$\tau_d = \left. t \right|_{\frac{x}{KA}\,(\text{tangente}) = 0}$$

ou

$$\ln\left(1 - \frac{x}{KA}\right) = -\frac{t}{\tau} + \frac{\tau_d}{\tau}$$



ou ainda, método de Sundaresan & Krishaswamy:

$$\tau_d = 1{,}3\, t_1 - 0{,}29\, t_2$$
$$\tau = 0{,}67\,(t_2 - t_1)$$

onde $t_1 = t\Big|_{\frac{x}{KA} = 0{,}353}$ e $t_2 = t\Big|_{\frac{x}{KA} = 0{,}853}$

Modelo de 2ª ordem:

- método de Harriott
- método de Smith
- método de Oldenbourg & Sartorius
- etc.

NOTA: dados experimentais + modelo $\Rightarrow$ regressão (mínimos quadrados, máxima verossimilhança, ...)

1.6 Características Dinâmicas de Sistemas

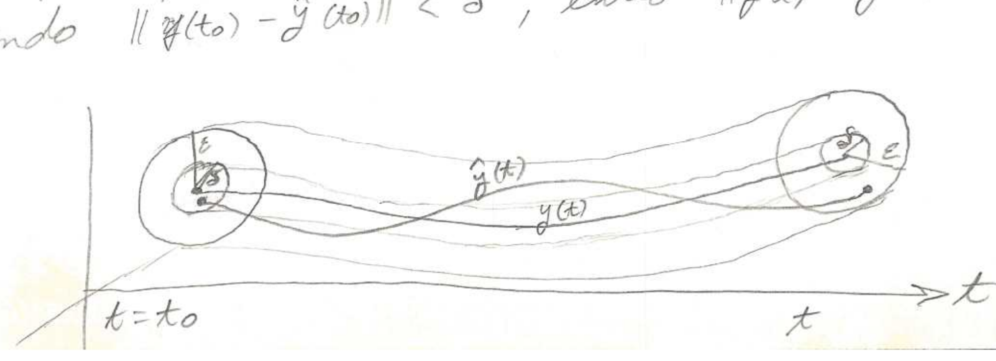
Dado um sistema não-linear:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

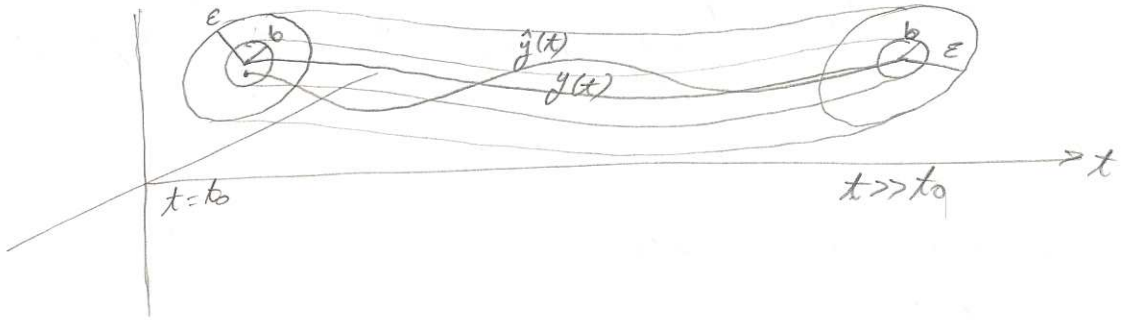
$f(\bar{y}) = 0$, $\bar{y}$ também é chamado de ponto fixo, ou ponto de equilíbrio, ou ponto crítico

define-se

Estabilidade de Liapunov: $y(t)$ é dito ser estável (ou Liapunov estável) se, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para qualquer outra solução, $\hat{y}(t)$, de $\frac{dy}{dt} = f(y)$ satisfazendo $\|y(t_0) - \hat{y}(t_0)\| < \delta$, então $\|y(t) - \hat{y}(t)\| < \varepsilon$ para $t > t_0$.



Estabilidade assintótica: $y(t)$ é dito ser estável assintoticamente se ele for Liapunov estável e se existe uma constante $b>0$ tal que $\|y(t_0)-\hat{y}(t_0)\|<b$, então $\lim_{t\to\infty}\|y(t)-\hat{y}(t)\|=0$



Linearizando o sistema, tem-se: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = J(\bar{y}).x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

onde $x(t) = y(t) - \bar{y}$

$J(\bar{y}) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{y}}$, matriz Jacobiana

teorema: O ponto crítico, $\bar{y}$, do sistema não-linear $\frac{dy}{dt}=f(y)$ é assintoticamente estável se todos os valores característicos de $J(\bar{y})$ possuírem parte real negativa.

$|J - \lambda I| = 0 \longrightarrow \lambda = \alpha + \beta i \quad , \quad \lambda \in R^n$

Características do sistema em função de λ:

todos λ com $\alpha \neq 0 \Rightarrow \bar{y}$ é um ponto fixo hiperbólico

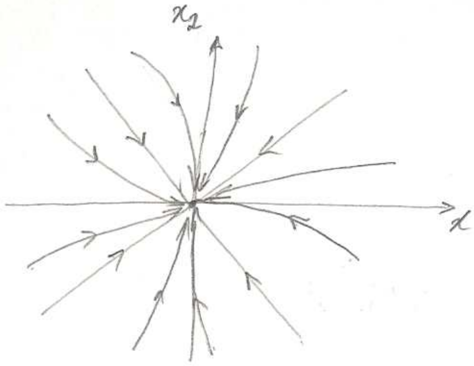
alguns λ com $\alpha > 0$ e os demais com $\alpha < 0 \Rightarrow \bar{y}$ é um ponto sela

todos λ com $\alpha < 0 \Rightarrow \bar{y}$ é um ponto estável, ou atrator, ou sumidouro, ou nó próprio.

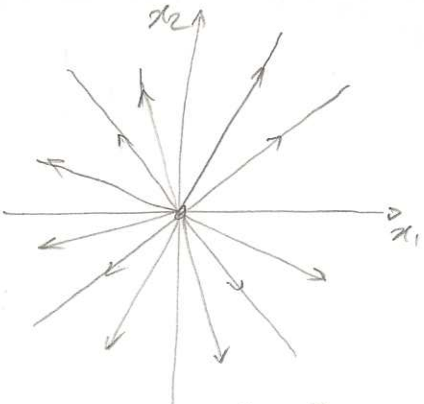
todos λ com $\alpha > 0 \Rightarrow \bar{y}$ é um ponto instável, ou repulsor ou fonte, ou nó impróprio.

todos λ com $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0 \rightarrow \bar{y}$ é um centro ou ponto fixo não hiperbólico

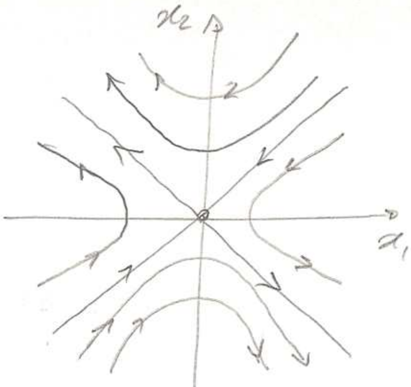
Diagrama de fases ou plano de fase ou trajetórias: é o gráfico das variáveis de estado.



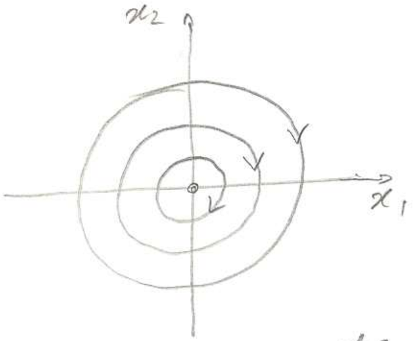
$\alpha_1 < 0$, $\beta_1 = 0$
$\alpha_2 < 0$, $\beta_2 = 0$



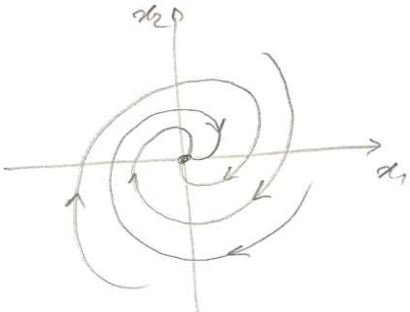
$\alpha_1 > 0$, $\beta_1 = 0$
$\alpha_2 > 0$, $\beta_2 = 0$



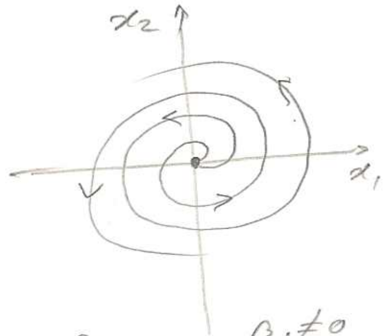
$\alpha_1 > 0$, $\beta_1 = 0$
$\alpha_2 < 0$, $\beta_2 = 0$



$\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$
$\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = -\beta_1$



$\alpha_1 < 0$, $\beta_1 \neq 0$
$\alpha_2 < 0$, $\beta_2 = -\beta_1$

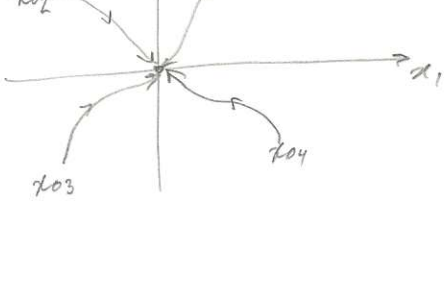


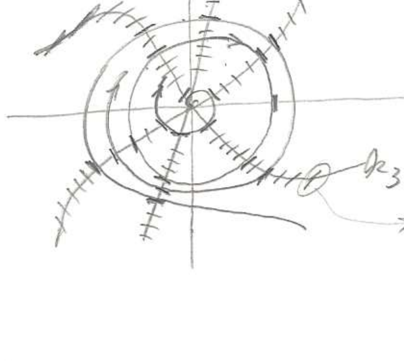
$\alpha_1 > 0$, $\beta_1 \neq 0$
$\alpha_2 > 0$, $\beta_2 = -\beta_1$

Construção das trajetórias :

1) solução de $\frac{dx}{dt} = Jx$ para diversas condições iniciais, x_0

2) pelas isóclinas : $\frac{dx_2}{dx_1} = k = cte$ ou (método dos campos de direções)





elemento lineal