

Controle Avançado de Processos

1999

- OPP -

1 - Modelos Matemáticos (ref. B.W. Bequette, Cap. 5, 7, 8, 9, 10, 11)

1.1 - Formulação no espaço de estados

1.1.1 - Modelos não lineares

1.1.2 - Linearização

1.1.3 - Modelos lineares

1.1.4 - Análise de estabilidade

1.2 - Formulação por função de transferência

1.2.1 - Transformada de Laplace

1.2.2 - Sistemas de primeira ordem

1.2.3 - Sistemas de segunda ordem e superior

1.2.4 - Matriz de funções de transferência

1.2.5 - Diagrama de blocos

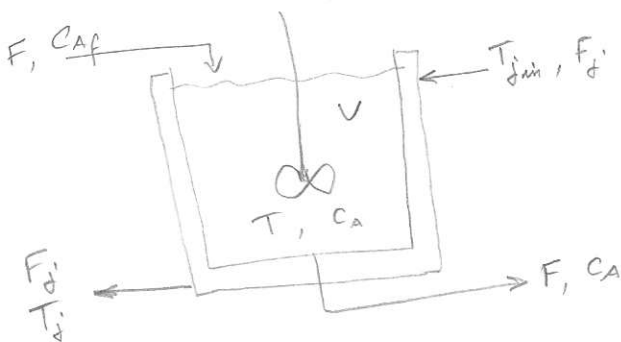
1.1 - Formulação no espaço de estados

1.1.1 Modelos não lineares

forma geral :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \text{ ou } f(x, u, d) \\ y = g(x, u) \text{ ou } g(x, u, d, \eta) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^m, d \in \mathbb{R}^p \\ y \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

ex: reator não-isotérmico (ref. Beq., módulo 9)



$$k = k_0 e^{-E/RT}$$

considerando V, ρ e C_p stes;

$$\begin{cases} \frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{V} (C_{Af} - C_A) - k_0 e^{-E/RT} C_A \\ \frac{dT}{dt} = \frac{F}{V} (T_f - T) + \frac{(-\Delta H) k_0 e^{-E/RT} C_A}{\rho C_p} - \frac{U A_c (T - T_c)}{V \rho C_p} \\ C_A(0) = C_{A0}, \quad T(0) = T_0 \end{cases}$$

→ C_{As}, T_s

estado estacionário: $f_1(C_A, T) = 0 = \frac{F}{V} (C_{Af} - C_A) - k_0 e^{-E/RT} C_A$

$f_2(C_A, T) = 0 = \frac{F}{V} (T_f - T) + \frac{(-\Delta H) k_0 e^{-E/RT} C_A}{\rho C_p} - \frac{UA_x (T - T_j)}{\rho V C_p}$

variável de entrada: $u = T_j - T_s$

distúrbios: $d = \begin{bmatrix} C_{Af} - C_{Af_s} \\ T_f - T_{f_s} \end{bmatrix}$

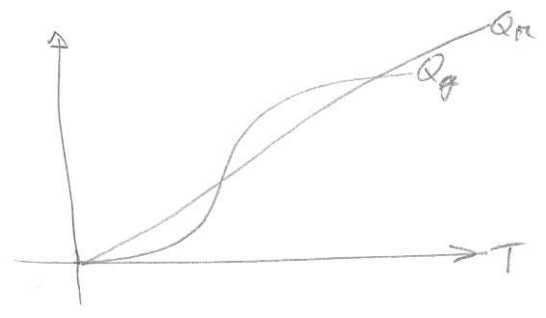
variável de saída: $y = T - T_s$

variáveis de estado: $x = \begin{bmatrix} C_A - C_{As} \\ T - T_s \end{bmatrix}$

Multiplicidade de soluções: (CSTR-SS.m, CSTR.M, CSTR-RUN.M) (p. 563) FIG. M9.5 p. 572

$$\underbrace{F \rho C_p (T_s - T_{fs}) + UA_x (T_s - T_{js})}_{Q_n} = \underbrace{\frac{(-\Delta H) k_0 e^{-E/RT_s} F C_{Af_s}}{\frac{F}{V} + k_0 e^{-E/RT_s}}}_{Q_g}$$

$$Q_n = [UA_x + F \rho C_p] T_s - [F \rho C_p T_{fs} + UA_x T_{js}] = a T_s - b$$



bifurcações: pontos onde ocorre a mudança no número de soluções através da variação de parâmetros.

- alguns tipos:
 - pitchfork (—(—))
 - turning-point (ou saddle-node) (—(—))
 - Hopf (mudança para ciclos-limites) (—(—))
 - transcritica (—/—)

histerese: ocorre entre duas bifurcações de turning-point.

condição de bifurcação: (ref. Bog. M9.8, ^{P.578} CSTR-IO.m, CSTR-CUA.m, CSTR-CUSP.m)

dado $\frac{dx}{dt} = f(x; \mu)$

FIS. M9.14 p. 584 FIS. M9.11, p. 580

então existe k soluções estacionárias nas vizinhanças do ponto de bifurcação se:

$$f(x; \mu) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dots = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}} = 0$$

e $\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \neq 0$

Para o CSTR, se $\mu = UA_t$

$$f(T_s; \mu) = Q_n(T_s; \mu) - Q_g(T_s; \mu) = 0 \therefore (Q_n = Q_g)$$

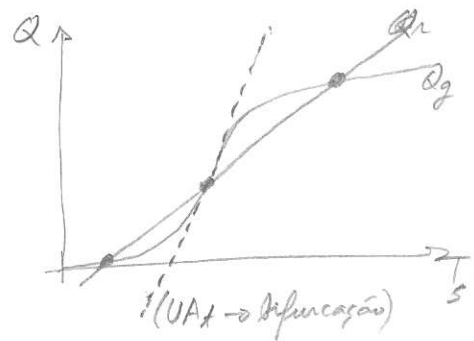
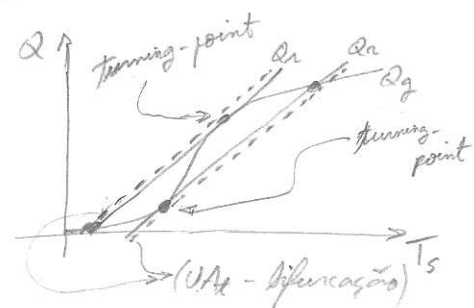
$$\frac{\partial f}{\partial T_s} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q_n}{\partial T_s} = \frac{\partial Q_g}{\partial T_s}$$

se $\frac{\partial^2 f}{\partial T_s^2} = -\frac{\partial^2 Q_g}{\partial T_s^2} \neq 0 \Rightarrow 2$ soluções

($\frac{\partial^2 Q_n}{\partial T_s^2} = 0$)

se $\frac{\partial^2 f}{\partial T_s^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 Q_g}{\partial T_s^2} = 0 \Rightarrow 3$ soluções

e $\frac{\partial^3 f}{\partial T_s^3} = -\frac{\partial^3 Q_g}{\partial T_s^3} \neq 0$



1.1.2 linearização (ref. Bog., 5.2, 5.3, M9.5)

se $\frac{dT}{dt} = f(T)$

$f(T_s) = 0$, estado estacionário

série de Taylor: $f(T) = \underbrace{f(T_s)}_0 + f'(T_s)(T-T_s) + \frac{1}{2!} f''(T_s)(T-T_s)^2 + \dots$

$f(T) \approx f'(T_s)(T-T_s)$

definindo : $x = T - T_s \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{dx}{dt}$

$f(x) \approx f'(T_s) \cdot x$

$\therefore \frac{dx}{dt} = a x, \quad a = f'(T_s)$

se $\frac{dT}{dt} = f(T, T_j)$

$f(T_s, T_{j,s}) = 0$, estado estacionário

$f(T, T_j) = f(T_s, T_{j,s}) + \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{T_s, T_{j,s}} (T - T_s) + \left. \frac{\partial f}{\partial T_j} \right|_{T_s, T_{j,s}} (T_j - T_{j,s}) +$
 $+ \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right|_{T_s, T_{j,s}} (T - T_s)^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial T_j} \right|_{T_s, T_{j,s}} (T - T_s)(T_j - T_{j,s}) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial T_j^2} \right|_{T_s, T_{j,s}} (T_j - T_{j,s})^2 + \dots$

$f(T, T_j) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{T_s, T_{j,s}} (T - T_s) + \left. \frac{\partial f}{\partial T_j} \right|_{T_s, T_{j,s}} (T_j - T_{j,s})$

definindo : $x = T - T_s \quad u = T_j - T_{j,s}$

$\frac{dx}{dt} = a x + b u, \quad a = \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{T_s, T_{j,s}} ; b = \left. \frac{\partial f}{\partial T_j} \right|_{T_s, T_{j,s}}$

exemplo 5.2 !

se
 (M9.5) $\begin{cases} \frac{dC_A}{dt} = f_1(C_A, T, T_j, C_{A_f}, T_f) \\ \frac{dT}{dt} = f_2(C_A, T, T_j, C_{A_f}, T_f) \end{cases}$

$\begin{cases} f_1(C_{A_s}, T_s, T_{j,s}, C_{A_f,s}, T_{f,s}) = 0 \\ f_2(C_{A_s}, T_s, T_{j,s}, C_{A_f,s}, T_{f,s}) = 0 \end{cases}$ estado estacionário

$x = \begin{bmatrix} C_A - C_{A_s} \\ T - T_s \end{bmatrix} ; \quad u = T_j - T_{j,s} ; \quad d = \begin{bmatrix} C_{A_f} - C_{A_f,s} \\ T_f - T_{f,s} \end{bmatrix}$

$\frac{dx}{dt} = A x + B u + E d ; \quad A = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial C_A} \right|_{ss} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial T} \right|_{ss} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial C_A} \right|_{ss} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial T} \right|_{ss} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial T_j} \right|_{ss} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial T_j} \right|_{ss} \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial C_{A_f}} \right|_{ss} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial T_f} \right|_{ss} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial C_{A_f}} \right|_{ss} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial T_f} \right|_{ss} \end{bmatrix}$

exemplos 5.3 e 5.4 ! e Seção 5.3
 mil. | ESTR | MIT.M, ESTR-IO.M ← LINMOD.m

Interpretação física da linearização

- B5.3

Região de validade da linearização

- exemplo

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1^2 - u \end{cases}$$

$x_0 = [0.1, 0.1]$

ação de controle $\left. \begin{matrix} \text{globalmente} \\ \text{parabolicamente} \end{matrix} \right\} \text{estável}$

$$u = b x_2 + c x_1^2$$

$b > 0, \quad c > 1$

estado estacionário (O.L.): $x_{2s} = 0$ e $x_{1s} = \pm \sqrt{u_s}$

$$A_{OL} = \begin{bmatrix} 0 & \pm \sqrt{u_s} \\ \pm 2\sqrt{u_s} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = +\sqrt{u_s} \\ \lambda_2 = -\sqrt{u_s} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix}} \right\} \text{instável}$$

linearizado: $\frac{dx}{dt} = A_{OL} x \Rightarrow$ estab.m e ODE45.m c/ mlin-ol.m (diverso)

malha fechada: $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = (1-c)x_1^2 - b x_2 \end{cases}$

estado estacionário (C.L.): $x_{1s} = 0$ e $x_{2s} = 0$

$$A_{CL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -b \end{matrix}$$

linearizado: $\frac{dx}{dt} = A_{CL} x \Rightarrow \begin{matrix} x_1(t) = x_{10} \\ x_2(t) = e^{-bt} x_{20} \end{matrix} \Rightarrow$ estab.m e mlin-cl.m (diverso)

uso do TRIM e FSOLVE \Rightarrow ESTR (V.D.V.)

NOTA: Quando $\prod_{i=1}^m \lambda_i = 0$ necessita-se analisar os termos de ordem superior da expansão em série de Taylor. Caso de um ponto não-hiperbólico degenerado.

1.1.3 Modelos lineares

forma geral:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, x(0) = 0$$

no caso de existir distúrbios (d) e ruídos de medição (m):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx + Du + Fd + m \end{cases}, x(0) = 0$$

forma entrada-zero:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

caso monovariável:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{at} \cdot x_0$$

caso multivariável:
$$x(t) = e^{At} \cdot x_0$$

 ↳ matriz exponencial

séries:
$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(at)^i}{i!}; \quad e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}; \quad A^0 = I$$

transformada de Laplace:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \longrightarrow \rho X(\rho) - x(0) = A X(\rho)$$

$$(\rho I - A) X(\rho) = x_0$$

$$X(\rho) = (\rho I - A)^{-1} x_0 \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1} [(\rho I - A)^{-1}] x_0$$

$$\therefore e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(\rho I - A)^{-1}]$$

transformação similar: (diagonalização)

\hat{A} é uma matriz similar de A se $\hat{A} = T^{-1}AT$ para alguma matriz T inversível. A transformação similar preserva os valores característicos de A, e $z = T^{-1}x$ é um vetor característico de \hat{A} relativo ao vetor característico x de A.

Valores e vetores característicos

(ref. [SP96], Apêndice A, Eq 5.4) -7-

o valor do escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ para o qual o sistema

$$Ax = x\lambda \quad (1)$$

tem $x \neq 0$ como solução é chamado de valor característico de A , sendo x o seu vetor característico associado.

Espectro de A : é o conjunto dos valores característicos de A .

Raio espectral de A : é o módulo do valor característico com maior valor absoluto.

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$$

Espaço característico de A : é o conjunto dos vetores caract. de A mais o vetor nulo.

Se λ é um valor característico de A , então $\alpha\lambda$ também o é para qualquer constante α . Portanto, os vetores característicos são usualmente normalizados para terem um comprimento unitário, i.e.:

$$x^H x = 1$$

onde x^H denota o transposto conjugado de x .

Matriz dos vetores característicos: $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]$

onde x_i é o vetor característico associado a λ_i .

Matriz dos valores característicos: $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$

reescrevendo (1) na forma $(A - \lambda I)x = 0$, tem-se que a solução não trivial, $x \neq 0$, existe se e somente se,
 $\text{rank}(A - \lambda I) < m$, ou $\det(A - \lambda I) = 0$,

onde $\text{rank}(M)$ é o número máximo de vetores colunas (ou linhas) de M linearmente independentes.

Observa-se ainda que (1) pode ser escrito na forma:

$$AX = X\Lambda \implies \Lambda = X^{-1}AX$$

(diagonalização de A).

Voltando ao problema: $\frac{dx}{dt} = Ax$, $x(0) = x_0$

e fazendo a mudança de variável: $z = X^{-1}x$,

ou $x = Xz$, tem-se $X \frac{dz}{dt} = AXz$ ($\times X^{-1}$)

$$\frac{dz}{dt} = X^{-1}AXz \implies \begin{cases} \frac{dz}{dt} = \Lambda z \\ z(0) = X^{-1}x_0 = z_0 \end{cases}$$

Para o caso de valores característicos todos $\neq 0$:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \implies \begin{cases} z_1(t) = e^{\lambda_1 t} z_{10} \\ z_2(t) = e^{\lambda_2 t} z_{20} \\ \vdots \\ z_m(t) = e^{\lambda_m t} z_{m0} \end{cases}$$

ou $z(t) = e^{\Lambda t} z_0 \implies X^{-1}x(t) = e^{\Lambda t} X^{-1}x_0$

$$x(t) = X e^{\Lambda t} X^{-1} x_0 \quad \therefore e^{At} = X e^{\Lambda t} X^{-1}$$

Efeito da condição inicial: (Eq. 5.4.1)

exemplos 5.5 e 5.6 (uso da função inicial.m)

Solução da forma geral: $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

para $u(t) = u(0)$, etc $\implies x(t) = e^{At} x_0 + (e^{At} - 1) A^{-1} B u(0)$

definindo: $P \equiv e^{At}$ e $Q = (P - 1) A^{-1} B$

tem-se: $x(t) = P x(0) + Q u(0)$

Se $u(t)$ tem a forma 

Então a equação acima pode ser generalizada: (uso da função step.m)

$$x(t + \Delta t) = P x(t) + Q u(t) \quad \text{ou} \quad x(k+1) = P x(k) + Q u(k)$$

Outra forma de calcular $x(t)$ quando $u(t) = u(0) = cte$
e: descrevendo o sistema na forma: $\frac{du}{dt} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{du}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

cuja solução é: $\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = e^{Mt} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$

onde $e^{Mt} = \begin{bmatrix} P & (P^{-1})A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$ (ver c2d.m)

1.1.4 Análise de estabilidade (Biq. Cap 13)

- Estabilidade de diáponor e assintótica

$$z(t) = e^{\lambda t} z_0 \rightarrow \text{Biq. Cap 13}$$

para λ complexo: $\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + \beta i \\ \lambda_2 = \alpha - \beta i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \\ x_2 = \bar{x}_1 \end{cases}$

$$e^{(\alpha + \beta i)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

$$\begin{cases} z_1(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) z_{20} \\ z_2(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) z_{20} \end{cases}$$

- estab.m (cometa.m)

- M9.5.1 (estr-ad.m, estr-ovm.m)

exercício: dens-ty.m, dens-io.m, dens-af.m, dens-ep.m

- hopf.m (ODE45 \rightarrow $t_f = 100$, $y_0 = [1, 1] + [10^{-3}, 0]$)

- step.m, input.m (dens-imi.m) $\begin{cases} \swarrow \text{M4.2} \\ \searrow \text{M5.3} \end{cases}$ (ss(), tf(), zpk(), simulink) \downarrow linear analysis

1.2 Formulações por função de transferência

1.2.1 Transformada de Laplace (ref. Beg., cap 7)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\alpha-\beta i}^{\alpha+\beta i} e^{st} F(s) ds = f(t)$$

α é tal que todos os pontos singulares fiquem à esquerda da linha $\text{Re}\{s\} = \alpha$ no plano complexo \mathbb{C} .

- B.7.1, B.7.4

- frações parciais (Kre, cap. 6) (residue.m)

NOTA: condições iniciais nulas x não-nulas

ex: 7.2, 7.3 e $[x(0)=0, u(t)=4,5]$

1.2.2 Sistemas de primeira ordem (ref. Beg, cap. 8)

- Beg 8.1, 8.2 (step(), impulse())

• simulink (step, pulse, ramp, sine) → repeating sequence $T = [0 \ 1 \ \text{inf}]$
 $U = [0 \ 1 \ 1]$

• ex: 8.1

- Beg. 8.3

• ex: 8.4, 8.5, fig 8.10

• FOPDT (first-order + dead-time), ex 8.7

• simulink (nonlinear → transport delay)

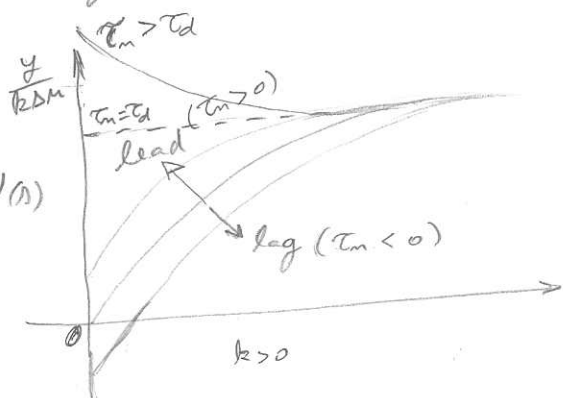
- Beg. 8.4

• ex: 8.8

• simulink (integradores: NOTA: valor inicial)

- Beg. 8.5

$$Y(s) = k \frac{(\tau_m s + 1) U(s)}{(\tau_d s + 1)}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau_d} x + k(1 - \frac{\tau_m}{\tau_d}) u \\ y = \frac{1}{\tau_d} x + \frac{k\tau_m}{\tau_d} u \end{cases}$$

$$\frac{y}{kDM} = \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_m}{\tau_d}\right) e^{-t/\tau_d} \right]$$

• simulink

• exerc. 8 - pag 293

1.2.3 Sistema de segunda ordem (ref. Beg. cap 9)

- B 9.1

forma: $\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \xi \tau \frac{dy}{dt} + y = k u$

$k \rightarrow$ ganho

$\xi \rightarrow$ fator de amortecimento > 0

$\tau \rightarrow$ período natural (frequência natural) > 0 estável

$$Y(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2 \xi \tau s + 1} U(s)$$

$$p = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

$\xi > 1 \rightarrow \left. \begin{matrix} p_1 = -1/\tau_1 \\ p_2 = -1/\tau_2 \end{matrix} \right\}$ sobreamortecido $\left\{ \begin{matrix} \tau = \sqrt{\tau_1 \tau_2} \\ \xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2 \sqrt{\tau_1 \tau_2}} \end{matrix} \right.$

$\xi = 1 \rightarrow p_1 = p_2 = -1/\tau$ } criticamente amortecido

$\xi < 1 \rightarrow \left. \begin{matrix} p_1 = \alpha + \beta j \\ p_2 = \alpha - \beta j \end{matrix} \right\}$ subamortecido $\left\{ \begin{matrix} \alpha = -\xi/\tau \\ \beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} \end{matrix} \right.$

$\|p\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\tau}$, frequência natural

$\frac{-\alpha}{\|p\|} = \xi$

- 1ª ordem : step (1, [4 1]); hold on;
- 2ª ordem : $\left\{ \begin{matrix} \text{step} & (1, [16 \ 8 \ 1]); & \text{(criticamente amortecido)}, & \xi = 1 \\ \text{step} & (1, [16 \ 12 \ 1]); & \text{(sobreamortecido)}, & \xi = 1,5 \\ \text{step} & (1, [16 \ 4 \ 1]); & \text{(subamortecido)}, & \xi = 0,5 \end{matrix} \right.$

ordem relativa = ordem do denominador - ordem do numerador, r

- se $r = 1$ \Rightarrow resposta com derivada não nula no momento de um degrau
- $r = 0$
- $r > 1$ \Rightarrow resposta com derivada nula no instante do degrau.
- $r < 1$ \Rightarrow sistema impróprio

- B 9.1.2

• var-geta.m

- B 9.1.4

• freqz int. mdl

ângulo de fase : $\phi = \arctg \left(\frac{-2\xi\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2} \right)$

$\left\{ \begin{array}{l} \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \phi = 0^\circ \\ \omega \rightarrow \frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi = -90^\circ \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = -180^\circ \end{array} \right.$

amplitude da saída = $\frac{kA}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2}}$

ressonância $\Rightarrow \omega = \frac{1}{\tau}$

(*) pag 13

- B 9.2

• ex. 9.3 (resposta inversa e overshoot)

$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = k \Delta u \frac{\tau_m}{\tau_1 \tau_2} \Rightarrow \text{re } \tau_m < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} < 0$

$k, \tau_1, \tau_2 > 0$

- B 9.3

• fig. 9.10

• pzmap()

• rlocus()

• step(conw([-10 1], [-20 1], [30 45 18 1], 50); [20 1]) } múltiplos RHP zeros

• fig 9.11

- B 9.4

• fig 9.13 (ex. 9.5)

- B 9.5

• tf2ss(), ss2tf(), ss2zp(), zp2ss(), tf2zp(), zp2tf()

NOTAS: uma função de transferência relaciona entradas com saídas, mas não representa os estados reais do sistema. Existe um número infinito de modelos de espaço de estados que resultam em um mesmo modelo entrada/saída.

(*) - resposta na frequência \equiv resposta persistente a uma perturbação senoidal ($t \gg 0$)

de modo geral $Y(s) = G(s) \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2}$, que fatorando:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\alpha_1}{s+b_1} + \dots + \frac{\alpha_m}{s+b_m}}_{\rightarrow \text{tendem a zero } t \rightarrow \infty} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}; \quad \boxed{u(t) = A \sin \omega t}$$

$$\therefore y_{\infty}(t) = C \cos \omega t + \frac{D}{\omega} \sin \omega t$$

onde C e D são obtidos fazendo $s \rightarrow i\omega$ (polo) em

$$Y(s) \cdot (s^2 + \omega^2):$$

$$G(i\omega) A \omega = C i \omega + D$$

$$\therefore \text{como } G(i\omega) = R + i I \Rightarrow C = A \cdot I; D = A \omega R$$

$$y_{\infty}(t) = A (I \cos \omega t + R \sin \omega t) = \underline{\underline{\hat{A} \sin(\omega t + \phi)}}$$

$$\text{onde } \hat{A} = A \sqrt{R^2 + I^2}; \quad \phi = \text{arctg} \left(\frac{I}{R} \right)$$

Em coordenadas polares: $G(i\omega) = R + i I = |G| e^{i\phi}$,
(razão de amplitude ou módulo ou magnitude de $G(i\omega)$)

$$\text{onde } |G| = \sqrt{R^2 + I^2} = \frac{\hat{A}}{A} = AR$$

$$\phi = \text{arctg} \left(\frac{I}{R} \right) \quad (\text{fase ou argumento de } G(i\omega))$$

OBS: se $G(s)$ é instável, ela não tem uma resposta na frequência. ($y_{\infty}(t) \rightarrow \infty$)

- S.E.M. 14.3

- zeros do processo
- tempo morto

- S.E.M. 16.1

- P, PI, PD, PID

- S.E.M. 16.2

- critérios de estabilidade
- fig 16.5

- S.E.M. 16.4

1.2.4 Matriz de funções de transferência
(ref. Beq., cap 10)

1.2.5 Diagrama de blocos
(ref. Beq., cap 11, [HB 96])

- P/Z cancelamento e efeitos \Rightarrow exemplo pag 264 (Beq.), $\left. \begin{array}{l} \text{const.m} \\ \text{deconst.m} \end{array} \right\}$
- sistemas em série e em paralelo \Rightarrow p. 267 (Beq)