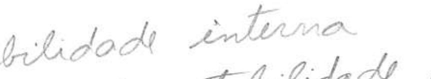
2 - Sistemas Multivariáveis (ref. SP96, Caps. 3 e 4, Ap. A)

2.1 Introdução

2.1.1 Função de transferência para sistemas MIMO

regra da cascata:

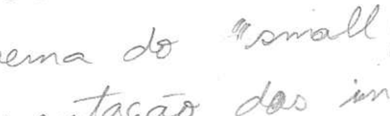


$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = G_2 G_1$$

$$Z(s) = G_1(s)U(s); \quad Y(s) = G_2(s)Z(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

$\Rightarrow$ a ordem das funções de transferência está no sentido oposto ao fluxo.

regra do feedback:



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = (I - G_1 G_2)^{-1} G_1$$

$$V(s) = U(s) + Z(s) \quad \text{e} \quad Y(s) = G_1(s)V(s) = G_1[U(s) + G_2 Y(s)]$$

$$Z(s) = G_2(s)Y(s)$$

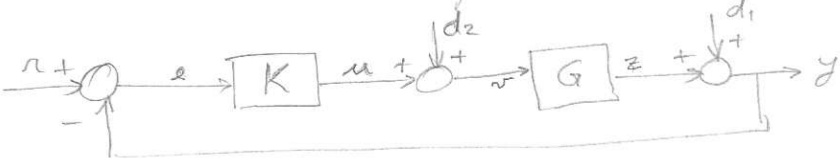
$L(s) = G_2(s)G_1(s) \Rightarrow$ função de transferência através do loop.

$$L(s) = G_2(s)G_1(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(I - L)^{-1}$$

NOTA: $G_1(I - G_2G_1)^{-1} = (I - G_1G_2)^{-1} G_1$

Regra MIMO: ex. 3.1 (pág 71)

Sistema de controle com feedback negativo:



$$\Longrightarrow \quad r \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y$$

$$\Longrightarrow \quad d_1 \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y \quad ; \quad r \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow e$$

onde

$S \equiv (I + L)^{-1}$ é a sensitividade

$T \equiv I - S = L(I+L)^{-1} = LS = (1+L^{-1})^{-1}$ é a sensitividade complementar

$L \equiv GK$ é a função de transferência do loop (matriz quadrada).

$Y(s) = D_1(s) + Z(s)$; $Z(s) = G(s)V(s)$; $V(s) = D_2(s) + U(s)$

$U(s) = K(s)E(s)$; $E(s) = R(s) - Y(s)$

$Y(s) = D_1 + G[D_2 + K(R-Y)] = D_1 + GD_2 + GKR - GKY$

$(I+L)Y = D_1 + GD_2 + LR$ $\quad D_1 = D_2 = 0 \quad D_2 = R = 0$

$\therefore \dfrac{Y(s)}{R(s)} = L(I+L)^{-1} = T(s)$; $\dfrac{Y(s)}{D_1(s)} = (I+L)^{-1} = S(s)$

$\dfrac{Y(s)}{D_2(s)} = (I+L)^{-1}G = S(s)G(s)$ $\leftarrow D_1 = R = 0$

<u>NOTA</u>: • uma função de transferência nunca aparece duas vezes em seqüência. Ex: $G(I+GK)^{-1}$ não existe!

• Se A é $n \times n \Rightarrow L(s) = G(s)K$ tem n estados e $S = (I+L)^{-1}$ também tem n estados, mas $T = LS$ é uma função de transferência com $2n$ estados (grau do denominador), ao passo que $T = I - S$ tem apenas n estados $\Rightarrow$ duas formas diferentes de espaço de estados, mas com o mesmo efeito de $R(s) \longrightarrow Y(s)$. (duas <u>realizações</u> diferentes no espaço de estados).

2.1.2 Resposta na freqüência para sistemas MIMO

$$d \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots g_{2m}(s) \\ \vdots & & \\ g_{n1}(s) & g_{n2}(s) & \cdots g_{nm}(s) \end{bmatrix}$$

$g_{ij}(i\omega)$ representa a resposta persistente da entrada senoidal no canal j para a saída i.

$$d_j(t) = d_{jo}\,\text{sen}(\omega t + \alpha_j) \Rightarrow y_i(t) = y_{io}\,\text{sen}(\omega t + \beta_i)$$

onde o ganho é dado por $\frac{y_{io}}{d_{jo}} = |g_{ij}(i\omega)|$

e o deslocamento de fase é $\beta_i - \alpha_j = \angle g_{ij}(i\omega)$

Para todos as entradas atuando sobre a saída i tem-se

com a mesma freqüência

$$Y_i(\omega) = \sum_j g_{ij}(i\omega)\, D_j(\omega)$$

e para todas as saídas : $Y(\omega) = G(i\omega)\, D(\omega)$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_{10}\,\text{sen}(\omega t + \beta_1) \\ y_{20}\,\text{sen}(\omega t + \beta_2) \\ \vdots \\ y_{n0}\,\text{sen}(\omega t + \beta_n) \end{bmatrix}$$

2.2 Direcionalidade

- SP96 - 3.3.2, ex. 3.3, Fig. 3.5
- SP96 - 3.3.3, eq. 3.30

2.2.1 Decomposição em valores singulares (SVD)

- valores principais
- ganhos principais
- vetores principais
- direções principais

- A.3
- eigshow : $x = v_1$; $y = v_2$ ($x \perp y$, unitários)

$Av_1 = Ax = \sigma_1 u_1$; $Ay = \sigma_2 u_2 = Au_2$ $(Ax \perp Ay)$, $(u_1 \perp u_2$, unitários$)$

NOTA : matriz quadrada, simétrica e positiva definida $\Rightarrow \lambda_i = \sigma_i$

- A.3.3
- 3.3.4, ex. 3.4
- ex 3.6, 3.7
- sigma.m

$S = (I + L)^{-1}$; $L = GK$

$$\lambda_i(S) = \frac{1}{1 + \lambda_i(L)}$$

$$\frac{1}{\bar{\sigma}(L) + 1} \leq \bar{\sigma}(S) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(L) - 1}$$

2.2.2 Inversa generalizada (Pseudo-inversa)

- A.3.8 , eq. (A.53) , eq (A.59) , eq. (A.61) , pinv.m
eq. (A.63)

2.2.3 Número condicionador

- A.3.9
- 3.3.4 (pág 51 §2) , cond.m

ex: $A_2 = [\text{eq.}(A.80)] \Longrightarrow \text{cond}(A_2) = 151,92$ } eq. (A.72) $H = \begin{bmatrix} 0 & A_2^{-1} \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$

[mb, D] = mu (H, ones(8,2), 'C') → alta precisão
└→ estrutura

$D = \text{diag}(D_I^{-1}, D_O) \Rightarrow D_O = \text{diag}(D(5{:}8))$; DI = inv(diag(D(1:4)));
$\gamma^* = \text{cond}(D_O * A_2 * D_I)$; svd (DO * A2 * DI);

2.2.4 Normas

- A.5
- A.5.5

Comentários [SP96] 3.3 §2 , pág 83 §5, pág 84
§3 , pág 83
§1 , pág 84

2.3 Sistemas lineares

2.3.1 Representação em espaço de estados

- 4.1.1
- pck.m $\longrightarrow G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

ex: { G = pck(A,B,C,D)
w = logspace(-2,2,20)
Gw = frsp(G,w)
vplot('bode-g', Gw)

$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ → ganho do processo em altas freqüências ($s \to \infty$)
($D = 0 \Rightarrow G(s)$ é estritamente própria)

2.3.2 Realização mínima

Representação em espaço de estados com o menor número de estados, sem modos (estados) não observáveis e não controláveis.

Existe infinitas possibilidades de realizações mínimas para uma mesma G.

- Fatorização co-prima (4.1.5)
  - identidade de Bezout (eq. 4.19)

exemplo 4.3 (pág 131)

2.3.3 Controlabilidade e observabilidade de estados

(SP96, 4.2)

- definição 4.1
- eq. 4.42
- ex. 4.4, 4.5
- definição 4.2, § 2 pág 137
- ex 4.4 (fazer),
- input-output controlabilidade ?

→ FALAR SIGMA.M

2.3.4 Pólos e zeros e suas direções

- teorema 4.8 (pólos), 4.4.2 (*), pág 139
- ex 4.7, 4.8
- § * pag 140
- definição 4.9 (zeros de transmissão ou zeros multivariável)
- 4.5.1 (eq. 4.61, 4.62)
- teorema 4.10
- ex. 4.9, 4.7, 4.10, 4.8
- 4.6.1 (eq. 4.68, 4.69, 4.70)
- ex 4.11

ler 4.6.2

- ex 4.12

$* \left\{ \begin{array}{l} \text{pole.m} \\ \text{zero.m} \end{array} \right.$

2.4 Estabilidade

2.4.1 Estabilidade interna, pg 137

Modo escondido: (Def. 4.3) é o estado que não é controlável ou observável.

Sistema estável internamente: (Def. 4.4) se nenhum de seus componentes contém modos escondidos e se a resposta de uma entrada limitada for limitada.

- Def. 4.5

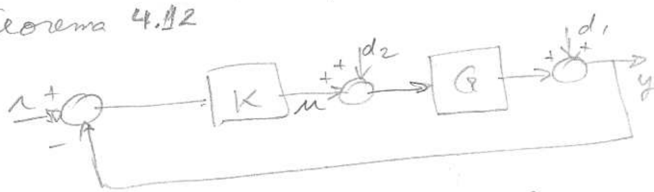
– Teorema 4.7

– 4.7 (* pg 148)

ex 4.15 , pg 149

– Teorema 4.11 , (eq. 4.85) , pg 150

– Teorema 4.12



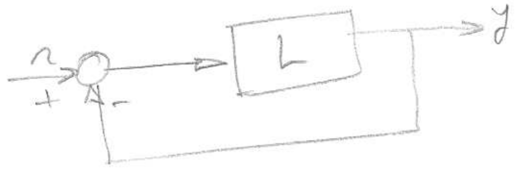
Se o sistema com "feedback" é estável internamente e:

Se $G(s)$ tem RHP-zero em z $\Rightarrow$ $L = GK$, $T = L(I+L)^{-1}$, $SG = (I+L)^{-1}G$, $L_I = KG$ e $T_I = L_I(I+L_I)^{-1}$ têm RHP-zero em z.

Se $G(s)$ tem RHP-polo em p $\Rightarrow$ L e L_I têm RHP-polo em p e $S = (I+L)^{-1}$, KS e $S_I = (I+L_I)^{-1}$ tem RHP-zero em p.

2.4.2 Critério de estabilidade

(considerando não haver zero-polo cancelamento)



pólos : malha aberta $\Rightarrow$ polos de $L(s)$

pólos : malha fechada: $\det(I+L) = 0$

– Ex. 4.17

→ Teorema 4.14 (Nyquist) , pág 158

ex : pág 159 $\begin{cases} K = 1.14 \ldots \\ K = 4.14 \ldots \end{cases}$

2.4.3 Teorema do "small gain"

– Teorema 4.16 , pág 161

– $L x_i = \lambda_i x_i \Rightarrow \|\lambda_i x_i\| = |\lambda_i| \, \|x_i\| = \|L x_i\| \leq \|L\| \, \|x_i\|$

$\Rightarrow |\lambda_i| \leq \|L\| \Rightarrow \rho(L) \leq \|L\|$

– Teorema 4.17

2.4.4 Representação das incertezas

- incertezas na entrada : $u_1' = (1+\varepsilon_1)\,u_1$ — valor calculado
  $u_2' = (1+\varepsilon_2)\,u_2$ — valor real

ex: SISO 1ª ordem: $\frac{dx}{dt} = ax + bu'$, $a<0$ (estável)

$y = cx$

c/ incerteza : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + b(1+\varepsilon)u \\ y = cx \end{cases}$, $c>0$

controle : $u = -ky$, $k>0$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \underbrace{[a - b(1+\varepsilon)kc]}_{<0 \ \forall\ -1<\varepsilon<\infty}x$$

ex: MIMO c/ controle diagonal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu' \\ y = Cx \end{cases} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

controle : $u = -Ky$, $K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$, $k_1, k_2 > 0$

$$\frac{dx}{dt} = (A - B\epsilon KC)x \quad , \ \epsilon = \begin{bmatrix} (1+\varepsilon_1) & 0 \\ 0 & (1+\varepsilon_2) \end{bmatrix}$$

$$B\epsilon K = \begin{bmatrix} b_1(1+\varepsilon_1)k_1 & 0 \\ 0 & b_2(1+\varepsilon_2)k_2 \end{bmatrix}$$

por exemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ $a>0$ $\Rightarrow \lambda = \pm ai$ precisa ser estabilizado , $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$

$$A - B\epsilon KC = \begin{bmatrix} -(1+\varepsilon_1) & -a\varepsilon_1 \\ a\varepsilon_2 & -(1+\varepsilon_2) \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = -(2+\varepsilon_1+\varepsilon_2) \pm \sqrt{(2+\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - 4[a^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)]}$$

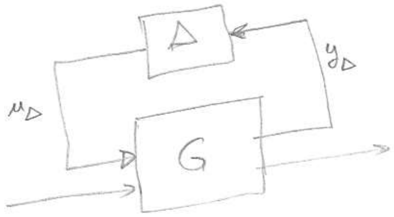
↳ instável se $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) < -a^2\varepsilon_1\varepsilon_2$

se $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \Rightarrow (1-\varepsilon_1^2) < a^2\varepsilon_1^2 \rightarrow \varepsilon_1^2 > \frac{1}{1+a^2}$ (instável)

$a = 100 \Rightarrow |\varepsilon_1| > 0{,}01$

- ex. 3.7.2 (pg 101)

– representação generalizada



$\Delta \Rightarrow$ matriz bloco-diagonal que inclui todas as perturbações possíveis para o sistema.

em geral $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ (normalizada)

---

ex: dens_ini.m (B(1:2, 1:2) e B(1:2, [1 3]))

1) escalonar

2) determinar zeros e polos de G, controlabilidade e observabilidade $[B\ AB]$ $\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$
e o condicionador

3) colocar PI diagonal $K = \begin{bmatrix} -\frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \pm\frac{s+2}{s} \end{bmatrix}$

4) fazer o gráfico $\bar{\sigma}(S), \underline{\sigma}(S)$, $S = (I+L)^{-1}$, usar sigma

5) fazer o gráfico $\bar{\sigma}(T), \underline{\sigma}(T)$, $T = I - S$ $\Rightarrow$ sigma(S,T)

6) determinar zeros e polos de T

7) verificar a estabilidade de L e T (usar tfdata)

8) testar dens_PI1.m e dens_PI2.m