FORMAS QUADRÁTICAS

Em $\Re^2$ a expressão geral das formas quadráticas é:

$$\boxed{f(x_1,x_2) = c + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \frac{a_{11}}{2} \cdot x_1^2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{a_{22}}{2} \cdot x_2^2},$$

cujas derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = b_1 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = b_2 + a_{22} \cdot x_2 + a_{12} \cdot x_1$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = a_{11} \ ; \quad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = a_{12} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = a_{22} \, .$$

Esta forma quadrada pode ser reescrita em forma matricial, segundo:

$$f(x_1,x_2) = c + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$ ou seja, definindo:

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \Re^2$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \Re^2$ e $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \Re^{2x2}$ [matriz simétrica], tem-se:

$$\boxed{f(\boldsymbol{x}) = c + \boldsymbol{b}^T \cdot \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}}$$

definindo o operador diferencial vetorial : $\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ (operador *gradiente*) , tem-se:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$$ (vetor gradiente de uma função escalar f) e

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial^2 x_2} = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$

(Laplaciano de uma função escalar).

Define-se também a *matriz Hessiana* por:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \, .$$

Estas definições podem ser generalizadas para $\Re^n$, segundo:

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Re^n$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \Re^n$ e $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \Re^{nxn}$ [matriz simétrica], tem-se:

$$f(\boldsymbol{x}) = c + \boldsymbol{b}^T \cdot \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = c + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \ ,$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}\ ,$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$H_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = H_{ji}(\boldsymbol{x}) \text{ [matriz simétrica].}$$

Note que caso a matriz **A** não seja simétrica, redefinem-se seus elementos na forma:
$a_{ij,velha} = \left(\frac{a_{ij,velha} + a_{ji,velha}}{2}\right)$ ou, em termos matriciais, $A_{nova} = \frac{1}{2}\cdot\left(A_{velha} + A_{velha}^T\right)$

A forma quadrática acima pode ser simplificada, através de um translação do eixo, tal que o termo $\mathbf{b}^T\mathbf{x}$ desapareça, assim sejam as novas coordenadas (y_1 , y_2, ..., y_n) tais que: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}$ assim: $\boldsymbol{b}^T\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}^T\cdot\boldsymbol{d}$ e

$$\boldsymbol{x}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{y}^T + \boldsymbol{d}^T\right)\cdot\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d}\right) = \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d} = \boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + 2\cdot\boldsymbol{d}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d}$$

pois : $\boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y}$ [$\boldsymbol{A}$ é simétrica], logo:

$$f(\boldsymbol{y}) = c + \boldsymbol{b}^T\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}^T\cdot\boldsymbol{d} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d}$$

Identificando: $f(\boldsymbol{d}) = c + \boldsymbol{b}^T\cdot\boldsymbol{d} + \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{d}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d} = \hat{c}$ e definindo $\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d}$, tem-se

$f(\boldsymbol{y}) = \hat{c} + \hat{\boldsymbol{b}}^T\cdot\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{y}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y}$, adotando **d** tal que: $\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{d} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}$, se $\boldsymbol{A}$ for não singular, assim chega-se a:

$\boxed{f(\boldsymbol{y}) = \hat{c} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}}$, em que: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$ e $\hat{c} = f(\boldsymbol{d}) = c + \boldsymbol{b}^T \cdot \boldsymbol{d} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{d}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{d}$, nesse novo sistema de coordenadas tem-se: $\nabla f(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{y})}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}$, sendo o vetor gradiente em $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ (a nova origem) nulo e $f(\boldsymbol{y})\big|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = \hat{c}$. Essa condição, $\nabla f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$**,** é uma condição necessária para o ponto ser um extremo da função (máximo ou mínimo) e é chamado de *ponto crítico*, este ponto será um ponto de mínimo se para qualquer vizinhança de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, isto é: $\|\boldsymbol{y}\| \le \delta$, a função é $f(\boldsymbol{y}) > f(\boldsymbol{0}) = \hat{c}$ ĉ, ou seja: $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} > 0$, sendo assim a matriz $\boldsymbol{A}$ é chamada de *positiva definida*. Caso em toda vizinhança de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ a função $f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{0}) = \hat{c}$ a origem é um ponto de máximo, e: $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} < 0$, sendo a matriz $\boldsymbol{A}$ *negativa definida*. Em qualquer outra situação, o ponto não é nem de máximo nem de mínimo (*ponto de sela*) e a matriz $\boldsymbol{A}$ é dita não definida.

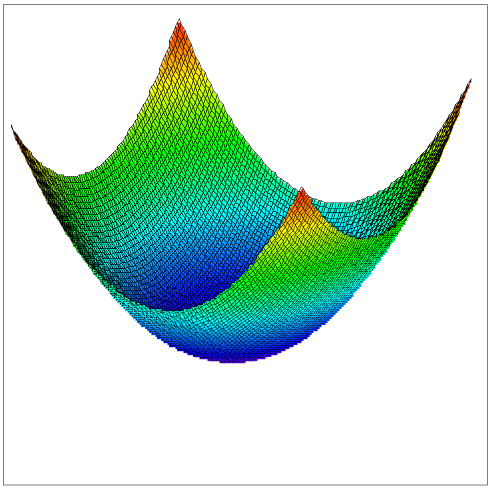
A forma quadrática pode também ser reescrita em sua *forma canônica*, de forma análoga à apresentada no processo de diagonalização de matrizes, assim considerando $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{z}$, em que $\boldsymbol{P}$ é a matriz cujos vetores coluna são os vetores característicos normalizados de A (considerados *n* vetores característicos linearmente independentes e ortogonais entre si, isto é os valores característicos são todos reais e distintos - matriz **A** é simétrica), tem-se assim:

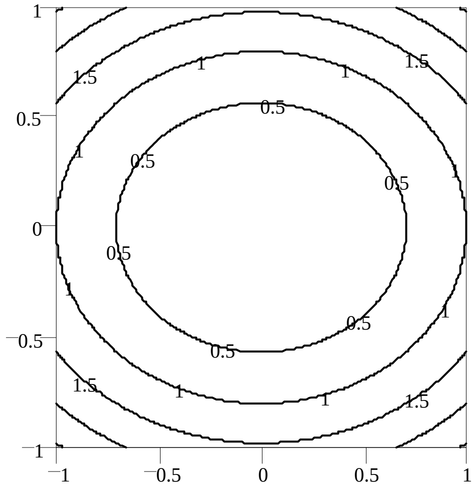
$f(\boldsymbol{z}) = \hat{c} + \frac{1}{2} \boldsymbol{z}^T \cdot \left(\boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}\right) \cdot \boldsymbol{z} = \hat{c} + \frac{1}{2} \boldsymbol{z}^T \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{z} = \hat{c} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i^2$, como à origem $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ correspondente também a $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, tem-se $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ como ponto de mínimo se $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i^2 > 0$ para todo o domínio em que $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ se $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$; $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ é um ponto de máximo se $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i^2 < 0$ para todo o domínio em que $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ se $\lambda_i < 0$ para todo $i = 1, \cdots, n$ e $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ é um ponto de sela se não há vizinhança de $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ na qual $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot z_i^2$ não muda de sinal o que ocorre se alguns $\lambda_i < 0$ e os demais são $\lambda_i > 0$.

Em $\Re^2$, a forma canônica assume a forma: $f(z_1, z_2) = \hat{c} + \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \cdot z_1^2 + \lambda_2 \cdot z_2^2\right)$, e a forma das curvas de nível caracterizam as seguinte *cônicas*, de acordo com o sinal de Δ = det (***A***) = $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, assim com Δ > 0 : *elipse*; Δ < 0 : *hipérbole* e Δ = 0 : *parábola* .

(a) Elipse: neste caso os valores característicos têm o mesmo sinal, sendo $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ um ponto de mínimo se ambos forem positivos e um ponto de máximo se ambos forem positivos. O tamanho do eixo z_1 é $\frac{2}{\lambda_1}[K - \hat{c}]$ e do eixo z_2 é $\frac{2}{\lambda_2}[K - \hat{c}]$, em que $K = f(z_1, z_2)$ [verificando-se que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ é um ponto de mínimo quando $K > \hat{c} \Rightarrow \lambda_1 > 0 \text{ e } \lambda_2 > 0$ e que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ é um ponto de máximo quando

$K < \hat{c} \Rightarrow \lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$. Nos dois casos: $\frac{2}{\lambda_1}[K - \hat{c}] > 0$ e $\frac{2}{\lambda_2}[K - \hat{c}] > 0$]. A seguir, representam-se a superfície $f(z_1, z_2)$ e as correspondentes curvas de contorno:

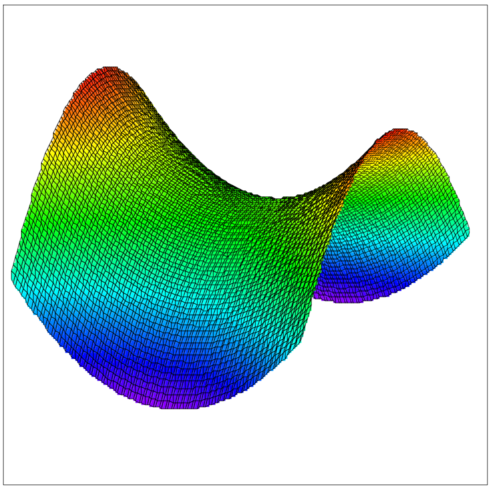


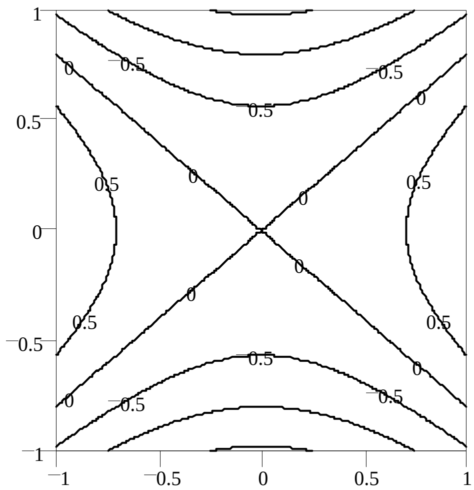


M M

$f(z_1, z_2) = z_1^2 + (5 \cdot z_2)^2$

(b) Hipérbole: neste caso os valores característicos têm os sinais distintos, sendo $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ um ponto de sela Abaixo, representam-se a superfície $f(z_1, z_2)$ e as correspondentes curvas de contorno





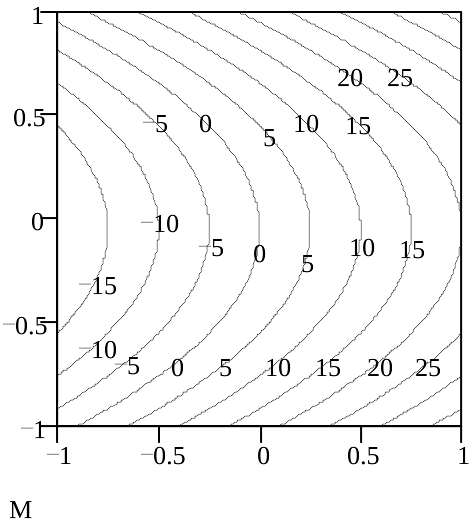
M M

$f(z_1, z_2) = z_1^2 - (5 \cdot z_2)^2$

(c) Parábola: neste caso um dos valores característicos é nulo e, portanto, a matriz $\boldsymbol{A}$ é singular, não sendo possível fazer a translação de eixo para eliminar o termo $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$. Então neste caso a rotação dos eixos é aplicada diretamente às variáveis (x_1, x_2), isto é: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{z}$, obtendo-se: $f(z_1, z_2) = c + \tilde{b}_1 \cdot z_1 + \tilde{b}_2 \cdot z_2 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot z_1^2$, considerando: $\lambda_2 = 0$.

Verificando-se que a condição necessária não é obtida, pois:

$\nabla f(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_1} \\ \dfrac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 + \lambda_1 \cdot z_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix}$ o segundo componente é sempre não nulo. Como um dos componentes do vetor gradiente é uma constante não nula, não há valores de z_1 e z_2 que anulem o vetor gradiente, não existindo assim um ponto de máximo ou de mínimo. Abaixo, representam-se curvas de nível para este caso.



curvas de nível (um dos val. caract. =0)

$$f(z_1, z_2) := z_2 + 2 \cdot z_1 + 5 \cdot (z_1)^2$$

O comportamento das formas quadráticas subsidiam o estudo de extremos de funções escalares não lineares de n variáveis: $f(\boldsymbol{x})$, em que : $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Re^n$ e $f : \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$.

O gradiente de $f(\boldsymbol{x}) : \nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$, e a matriz Hessiana :

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial^2 x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}.$$

A expansão em série de Taylor da função $f(\boldsymbol{x})$ em torno de um ponto $\hat{\boldsymbol{x}}$ no qual a função e suas derivadas são contínuas é expressa, desprezando-se os termos de ordem superior a dois, por: $f(\boldsymbol{x}) \cong f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \left[\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}})\right]^T \cdot (\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) + \frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})^T \cdot \left[\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{x}})\right] \cdot (\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})$.

Considerando o ponto $\hat{\boldsymbol{x}}$ como sendo um ponto crítico, tem-se: $\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$ e adotando $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$ como nova variável independente, resultante da translação dos eixos, tem-se: $f(\boldsymbol{y}) = \hat{c} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}$, em que $\hat{c} = f(\hat{\boldsymbol{x}})$ e $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{x}})$, de forma análoga à análise aplicada às formas quadráticas, tem-se:

(*i*) $\hat{\boldsymbol{x}}$ um ponto de máximo se em uma vizinhança de $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}$ ou de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \|\boldsymbol{y}\| \leq \delta$, se a função $f(\boldsymbol{y}) > f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{c}$, ou seja: $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}$ é *positiva definida*;

(*ii*) $\hat{\boldsymbol{x}}$ um ponto de mínimo se em uma vizinhança de $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}$ ou de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \|\boldsymbol{y}\| \leq \delta$, se a função $f(\boldsymbol{y}) < f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{c}$, ou seja: $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}$ é *negativa definida*.

Em qualquer outra situação o ponto não é nem de máximo nem de mínimo, e no caso da matriz ser não definida tem-se o chamado *ponto de sela*. Caso a matriz $\boldsymbol{A}$ seja *semi definida* (*positiva* ou *negativa*) nada se pode afirmar sobre a natureza de $\hat{\boldsymbol{x}}$ devendo ser analisadas derivadas de ordem superiores.