MÉTODO DE FIBONACCI

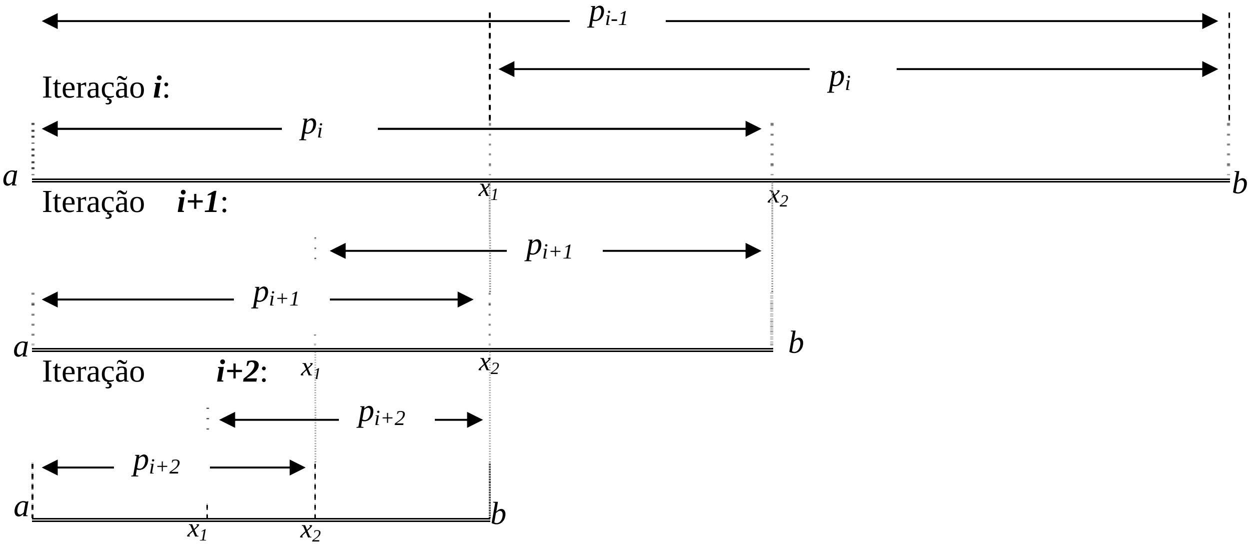
Adotando a notação: $p_i = \dfrac{L_i}{L_0}$ e $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L_0}$, em que $L_0 = (b-a)_{inicial}$, resulta a:

Forma Recursiva: $p_i = p_{i+1} + p_{i+2}$ para $i = 0, 1, \cdots, N-2$ (1-a)

ou $p_{i-1} = p_i + p_{i+1}$ para $i = 1, 2, \cdots, N-1$ (1-b)

A esta equação se associa a *condição de contorno* (CC1): $p_0 = 1$ (2-a)

Este esquema recursivo pode ser representado no diagrama abaixo, no qual são mostradas três iterações sucessivas:



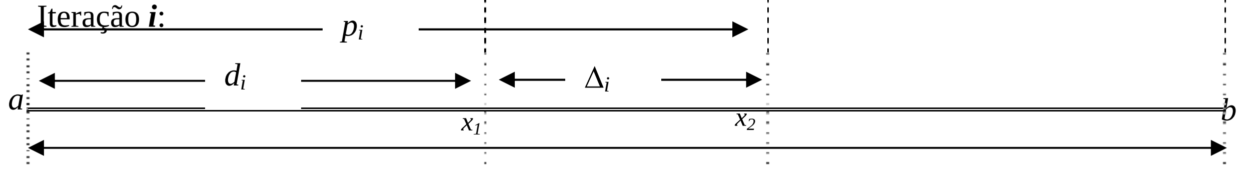
A distância entre ***a*** e $\boldsymbol{x_1}$**,** que é igual à distância entre ***b*** e $\boldsymbol{x_2}$, é, na iteração ***i***, dada por:

$$d_i = p_{i-1} - p_i \quad \text{para } i = 1, \cdots, N \tag{3}$$

A distância entre $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$, é, na iteração ***i***, dada por:

$$\Delta_i = p_i - d_i = 2 \cdot p_i - p_{i-1} \quad \text{para } i = 1, \cdots, N \tag{4}$$

essas duas distâncias são mostradas abaixo:



Somando as Eqs.(3) e (4), resulta:

$$d_i + \Delta_i = p_i \quad \text{para } i = 1, \cdots, N \tag{6}$$

Mas, de (1-b): $p_{i-1} = p_i + p_{i+1} \;\Rightarrow\; p_{i-1} - p_i = p_{i+1}$ que de (3) é igual à d_i , assim:

$$d_i = p_{i+1} \quad \text{para } i = 1, \cdots, N \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6), resulta: $\Delta_i = p_i - p_{i+1}$, mas de (1-a): $p_i - p_{i+1} = p_{i+2}$, resultando em:

$$\Delta_i = p_{i+2} \quad \text{para } i = 1, \cdots, N \tag{8}$$

Duas hipóteses podem se associar à segunda condição de contorno da equação recursiva (1):

<u>1ª Hipótese</u>: a distância entre $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ na última iteração, iteração $\boldsymbol{N}$, é igual a δ, traduzido por:

$$\Delta_N = 2 \cdot p_N - p_{N-1} = \delta \Rightarrow p_{N-1} = 2 \cdot p_N - \delta \tag{9}$$

ou, de acordo com (8), por:

$$\Delta_N = p_{N+2} = \delta \Rightarrow p_{N+2} = \delta \tag{10}$$

<u>2ª Hipótese</u>: a distância entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{x_1}$, que é igual à distância entra $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x_2}$, na última iteração, iteração $\boldsymbol{N}$, é igual a δ, traduzido por:

$$d_N = p_{N-1} - p_N = \delta \Rightarrow p_{N-1} = p_N + \delta \tag{11}$$

ou, em acordo com (7), por:

$$d_N = p_{N+1} = \delta \Rightarrow p_{N+1} = \delta \tag{12}$$

<u>Critério de *Parada*</u>: O valor de $\boldsymbol{N}$ é calculado tal que:

$$p_N \leq 2 \cdot \delta \quad \text{e} \quad p_{N-1} > 2 \cdot \delta \tag{13}$$

Isto é: $\boldsymbol{N}$ é o primeiro valor do índice de p_i em que p_i é inferior a $2 \cdot \delta$.

FORMA RECURSIVA DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

1ª Hipótese: $p_{N-1} = 2 \cdot p_N - \delta$

Aplicando (1-b) para i=N–1, tem-se: $p_{N-2} = p_{N-1} + p_N = 3 \cdot p_N - 2 \cdot \delta$.

Aplicando (1-b) para i=N–2, tem-se: $p_{N-3} = p_{N-2} + p_{N-1} = 5 \cdot p_N - 3 \cdot \delta$.

Aplicando (1-b) para i=N–3, tem-se: $p_{N-4} = p_{N-3} + p_{N-2} = 8 \cdot p_N - 5 \cdot \delta$.

Permitindo concluir, por indução, que:

$$p_{N-k} = F_{k+1} \cdot p_N - F_{k-1} \cdot \delta \quad \text{para } k = 1, 2, \cdots, N \tag{14}$$

Em que: F_k é o k'ésimo número de Fibonacci definido pela

Forma Recursiva: $$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad \text{para} \quad i = 2, 3, \cdots \text{com} \quad F_0 = F_1 = 1 \tag{15}$$

Diferentes propriedades dos números de Fibonacci são apresentadas no Apêndice I.

Adotando em (14): $j = N - k$ tem-se: $k = N - j \rightarrow \begin{cases} k+1 = N+1-j \\ k-1 = N-1-j \end{cases}$, assim:

$$p_j = F_{N+1-j} \cdot p_N - F_{N-1-j} \cdot \delta \quad \text{para} \quad j = 0, 1, 2, \cdots, N\text{-}1 \tag{16}$$

Permitindo calcular:

$$\text{com } j = 0 \Rightarrow p_0 \equiv 1 = F_{N+1} \cdot p_N - F_{N-1} \cdot \delta$$

e

$$\text{com } j = 1 \Rightarrow p_1 = F_N \cdot p_N - F_{N-2} \cdot \delta$$

Resultando em:

$$\boxed{p_N = \frac{1}{F_{N+1}} + \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} \cdot \delta} \tag{17}$$

e

$$p_1 = \frac{F_N}{F_{N+1}} + \frac{F_N \cdot F_{N-1} - F_{N+1} \cdot F_{N-2}}{F_{N+1}} \cdot \delta$$

Mas, das propriedades dos números de Fibonacci, $F_N \cdot F_{N-1} - F_{N+1} \cdot F_{N-2} = (-1)^{N+1}$, logo:

$$\boxed{p_1 = \frac{F_N}{F_{N+1}} + \frac{(-1)^{N+1}}{F_{N+1}} \cdot \delta} \tag{18}$$

O valor de $\boldsymbol{N}$, número de iterações necessárias, é o primeiro valor inteiro de j para o qual a função: $\frac{1}{F_{j+1}} + \frac{F_{j-1}}{F_{j+1}} \cdot \delta \le 2 \cdot \delta$, isto é:

$$\boxed{\frac{1}{F_N}+\frac{F_{N-2}}{F_N}\cdot\delta\ >2\cdot\delta\ \text{ e }\ \frac{1}{F_{N+1}}+\frac{F_{N-1}}{F_{N+1}}\cdot\delta\ \le 2\cdot\delta} \tag{19}$$

<u>2ª Hipótese</u>: $p_{N-1}=p_N+\delta$

Aplicando (1-b) para $i=N-1$, tem-se: $p_{N-2}=p_{N-1}+p_N=2\cdot p_N+\delta$.

Aplicando (1-b) para $i=N-2$, tem-se: $p_{N-3}=p_{N-2}+p_{N-1}=3\cdot p_N+2\cdot\delta$.

Aplicando (1-b) para $i=N-3$, tem-se: $p_{N-4}=p_{N-3}+p_{N-2}=5\cdot p_N+3\cdot\delta$.

Permitindo concluir, por indução, que:

$$p_{N-k}=F_k\cdot p_N+F_{k-1}\cdot\delta\ \text{ para } k=\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{20}$$

Adotando em (20): $j = N\text{-}k$ tem-se: $k=N-j$ e $k-1=N-1-j$, assim:

$$p_j=F_{N-j}\cdot p_N+F_{N-1-j}\cdot\delta\ \text{ para } j=\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1 \tag{21}$$

Permitindo calcular:

$$\text{com } j\ =\ 0\ \Rightarrow p_0\equiv 1=F_N\cdot p_N+F_{N-1}\cdot\delta$$

e

$$\text{com } j\ =\ 1\ \Rightarrow p_1=F_{N-1}\cdot p_N+F_{N-2}\cdot\delta$$

resultando, finalmente, em:

$$\boxed{p_N=\frac{1}{F_N}-\frac{F_{N-1}}{F_N}\cdot\delta} \tag{22}$$

e

$$p_1=\frac{F_{N-1}}{F_N}+\frac{F_N\cdot F_{N-2}-\left(F_{N-1}\right)^2}{F_N}\cdot\delta$$

Mas, das propriedades dos números de Fibonacci: $F_N\cdot F_{N-2}-\left(F_{N-1}\right)^2=\left(-1\right)^N$, logo:

$$\boxed{p_1=\frac{F_{N-1}}{F_N}+\frac{\left(-1\right)^N}{F_N}\cdot\delta} \tag{23}$$

O valor de ***N***, número de iterações necessárias, é o primeiro valor inteiro de j para o qual a função: $\frac{1}{F_j}-\frac{F_{j-1}}{F_j}\cdot\delta\ \le 2\cdot\delta$, isto é:

$$\boxed{\frac{1}{F_{N-1}}-\frac{F_{N-2}}{F_{N-2}}\cdot\delta\ >2\cdot\delta\ \text{ e }\ \frac{1}{F_N}-\frac{F_{N-1}}{F_N}\cdot\delta\ \le 2\cdot\delta} \tag{24}$$

RESOLUÇÃO DIRETA DA EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS DO PROBLEMA

Forma Recursiva: $p_i = p_{i+1} + p_{i+2}$ para $i = 0, 1, \cdots, N-2$ (1)

com: $p_0 = 1$

1ª Hipótese: a distância entre $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ na iteração $\boldsymbol{N}$ é igual a δ,

$$p_{N+2} = \delta \qquad (10)$$

Identificando os valores característicos associados à equação de diferenças (1) como as raízes do polinômio:

$$1 = r + r^2 \Rightarrow r^2 + r - 1 = 0$$

isto é: $\begin{cases} r_1 = -\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = -\rho \\ r_2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \dfrac{1}{\rho} \end{cases}$, em que: $\rho = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Identificando: $r_1 + r_2 = -1$; $r_1 \cdot r_2 = -1$ e $r_2 - r_1 = \sqrt{5}$

Desse modo, a solução de (1) [equação de diferenças linear, de segunda ordem e homogênea] é dada por:

$p_i = A \cdot r_1^i + B \cdot r_2^i$, onde as constantes A e B são determinadas a partir das condições de contorno associadas ao problema.

Assim: $\begin{cases} \text{CC1}: \, p_0 = A + B = 1 \\ \text{CC2}: \, p_{N+2} = A \cdot r_1^{N+2} + B \cdot r_2^{N+2} = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{r_2^{N+2} - \delta}{r_2^{N+2} - r_1^{N+2}} \\ B = \dfrac{\delta - r_1^{N+2}}{r_2^{N+2} - r_1^{N+2}} \end{cases}$, logo:

$$\boxed{p_i = \left(\frac{r_2^{N+2} - \delta}{r_2^{N+2} - r_1^{N+2}}\right) \cdot r_1^i + \left(\frac{\delta - r_1^{N+2}}{r_2^{N+2} - r_1^{N+2}}\right) \cdot r_2^i} \qquad (25)$$

2ª Hipótese: a distância entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{x_1}$, que é igual à distância entra $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x_2}$, na iteração $\boldsymbol{N}$ é igual a δ

$$p_{N+1} = \delta \qquad (12)$$

Desse modo, a solução de (1) é dada por:

$p_i = A \cdot r_1^i + B \cdot r_2^i$, onde as constantes A e B são determinadas a partir das condições de contorno associadas ao problema.

Assim: $\begin{cases} \text{CC1}: \; p_0 = A + B = 1 \\ \text{CC2}: \; p_{N+1} = A \cdot r_1^{N+1} + B \cdot r_2^{N+1} = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{r_2^{N+1} - \delta}{r_2^{N+1} - r_1^{N+1}} \\ B = \dfrac{\delta - r_1^{N+1}}{r_2^{N+1} - r_1^{N+1}} \end{cases}$, logo:

$$\boxed{p_i = \left(\frac{r_2^{N+1} - \delta}{r_2^{N+1} - r_1^{N+1}} \right) \cdot r_1^i + \left(\frac{\delta - r_1^{N+1}}{r_2^{N+1} - r_1^{N+1}} \right) \cdot r_2^i} \qquad (26)$$

MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA

Na primeira hipótese considerada no método de Fibonacci o valor do passo a ser considerado na primeira iteração é dado por:

$$\boxed{p_1 = \frac{F_N}{F_{N+1}} + \frac{(-1)^{N+1}}{F_{N+1}} \cdot \delta} \qquad (18)$$

Na segunda hipótese considerada no método de Fibonacci o valor do passo a ser considerado na primeira iteração é dado por:

$$\boxed{p_1 = \frac{F_{N-1}}{F_N} + \frac{(-1)^{N}}{F_N} \cdot \delta} \qquad (23)$$

Porém para valores elevados de ***N***, verifica-se que:

$\dfrac{1}{F_N} \cong \dfrac{1}{F_{N+1}} \approx 0$ e $\dfrac{F_N}{F_{N+1}} \cong \dfrac{F_{N-1}}{F_N} \approx \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \rho$, deste modo o valor de p_1 independe da hipótese considerada e é igual a: $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, permitindo calcular os valores de p_i de forma recursiva segundo:

$$p_i = p_{i-2} - p_{i-1} \quad \text{para } i = 2, 3, \cdots, N$$

$$\text{com: } p_0 = 1 \quad \text{e} \quad p_1 = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (24)$$

Resultando no denominado **Método da Seção Áurea**.

Assim, aplicando (24) para:

$$i = 2 \Rightarrow p_2 = p_0 - p_1 = 1 - \frac{1}{\rho} \;;$$

$$i = 3 \Rightarrow p_3 = p_1 - p_2 = -\left(1 - \frac{2}{\rho}\right)$$

$$i = 4 \Rightarrow p_4 = p_2 - p_3 = 2 - \frac{3}{\rho}$$

$$\mathrm{i} = 5 \Rightarrow \mathrm{p}_5 = \mathrm{p}_3 - \mathrm{p}_4 = -\left(3 - \frac{5}{\rho}\right)$$

$$i = 6 \Rightarrow p_6 = p_4 - p_5 = 5 - \frac{8}{\rho}$$

Permitindo concluir, por indução que:

$$p_i = (-1)^i \cdot \left(F_{i-2} - \frac{F_{i-1}}{\rho}\right) \quad \text{para } i = \ 2,\ 3,\ \cdots, N$$

$$\text{com: } p_0 = 1 \quad \text{e} \quad p_1 = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{25}$$

<u>Critérios Alternativos de *Parada*</u>:

1-) O valor de ***N*** é calculado tal que :

$$p_N \le 2 \cdot \delta \quad \text{e} \quad p_{N-1} > 2 \cdot \delta \tag{26}$$

Tal critério corresponde a considerar que a distância entre ***a*** e $\boldsymbol{x_2}$ (igual à distância entre ***b*** e $\boldsymbol{x_1}$) na iteração ***N*** é, pela primeira vez, inferior a 2.δ.

2-) O valor de ***N*** é calculado tal que :

$$p_{N+2} \le \delta \quad \text{e} \quad p_{N+1} > \delta \tag{27}$$

Tal critério corresponde a considerar que a distância entre $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ na iteração ***N*** é, pela primeira vez, inferior a δ.

3-) O valor de ***N*** é calculado tal que :

$$p_{N+1} \le \delta \quad \text{e} \quad p_N > \delta \tag{28}$$

Tal critério corresponde a considerar que a distância entre ***a*** e $\boldsymbol{x_1}$ (igual à distância entre ***b*** e $\boldsymbol{x_2}$) na iteração ***N*** é, pela primeira vez, inferior a δ.

APÊNDICE I

NÚMEROS DE FIBONACCI

Forma Recursiva: $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ para $i =$ 1, 2, 3, $\cdots$ (I-1)

com : $F_0 = F_1 = 1$

Aplicando a forma recursiva acima, chega-se a:

i	F_i	*i*	F_i	*i*	F_i	*i*	F_i
0	1						
1	1	6	13	11	144	16	1597
2	2	7	21	12	233	17	2584
3	3	8	34	13	377	18	4181
4	5	9	55	14	610	19	6765
5	8	10	89	15	987	20	10946

Identificando os valores característicos associados à equação de diferenças (I-1) como as raízes do polinômio:

$$r^2 = r + 1 \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0$$

isto é: $\begin{cases} r_1 = -\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -\dfrac{1}{\rho} \\ r_2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \rho \end{cases}$, em que: $r_1 + r_2 = 1$; $r_1 \cdot r_2 = -1$ e $r_2 - r_1 = \sqrt{5}$

Desse modo, a solução de (I-1) [equação de diferenças linear, de segunda ordem e homogênea] é dada por: $F_i = A \cdot r_1^i + B \cdot r_2^i$, onde as constantes *A* e *B* são determinadas a partir das condições de contorno associadas ao problema.

Assim: $\begin{cases} \text{CC1}: F_0 = A + B = 1 \\ \text{CC2}: F_1 = A \cdot r_1 + B \cdot r_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{r_2 - 1}{r_2 - r_1} = -\dfrac{r_1}{\sqrt{5}} \\ B = \dfrac{r_1 - 1}{r_2 - r_1} = \dfrac{r_2}{\sqrt{5}} \end{cases}$, logo:

$$\boxed{F_i = \frac{r_2^{i-1} - r_1^{i-1}}{\sqrt{5}}} \text{ para } i = 0, 1, 2, ... \qquad \text{(I-2)}$$

1 Razão entre dois números de Fibonacci sucessivos

Definindo-se: $q_i = \dfrac{F_{i+1}}{F_i}$ para $i =$ 0, 1, 2, $\cdots$, tem-se: $q_0 = \dfrac{F_1}{F_0} = 1$, em vista de (I-2),

$\dfrac{F_i}{F_{i-1}} = 1 + \dfrac{F_{i-2}}{F_{i-1}}$ para $i =$ 1, 2, 3, $\cdots$, identificando: $q_{i-1} = \dfrac{F_i}{F_{i-1}}$ e $q_{i-2} = \dfrac{F_{i-1}}{F_{i-2}}$, tem-se a:

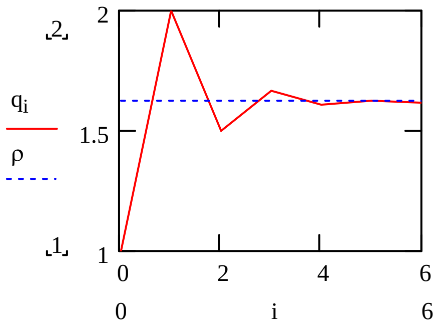
Equação Recursiva: $$q_i = 1 + \frac{1}{q_{i-1}} \quad \text{para } i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \qquad \text{(I-3)}$$

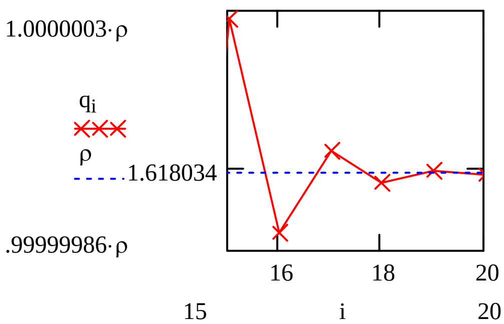
com $q_0 = 1$

A equação (I-3) é uma equação de diferenças não linear de primeira ordem que pode ser resolvida recursivamente, dando origem a:

i	q_i	i	q_i	i	q_i	i	q_i
0	1						
1	2	6	1.61538462	11	1.61805556	16	1.61803381
2	1.5	7	1.61904762	12	1.61802575	17	1.61803406
3	1.66666667	8	1.61764706	13	1.61803714	18	1.61803396
4	1.6	9	1.61818182	14	1.61803279	19	1.61803400
5	1.625	10	1.61797753	15	1.61803445	20	1.61803399

Ou, em forma gráfica:





A Equação (I-3) apresenta os *pontos de equilíbrio* que são as raízes da equação:

$$q_{eq} = 1 + \frac{1}{q_{eq}} \Rightarrow q_{eq}^2 - q_{eq} - 1 = 0 \Rightarrow q_{eq} = \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \\ \lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \rho > 0 \end{cases}$$

, identificando na equação recursiva (I-3) a *função iteração*: $f_{iter}(q) = 1 + \frac{1}{q}$, em que:

$$q_i = 1 + \frac{1}{q_{i-1}} = f_{iter}(q_{i-1}) \quad \text{para } i = \ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$, tem-se:

$$f'_{iter}(q) = -\frac{1}{q^2} \Rightarrow \begin{cases} f'_{iter}(\lambda_1) = -\dfrac{1}{\lambda_1^2} = -\dfrac{1}{1+\lambda_1} = -\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \left|f'_{iter}(\lambda_1)\right| = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \\ f'_{iter}(\lambda_2) = -\dfrac{1}{\lambda_2^2} = -\dfrac{1}{1+\lambda_2} = -\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \left|f'_{iter}(\lambda_2)\right| = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 \end{cases}$$

Dessa forma, conclui-se que o ponto ①, no qual $q = \lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, é um ponto de equilíbrio *instável* da Equação (I-3) e o ponto ②, no qual $q = \lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \rho$, é um ponto de equilíbrio *estável* da Equação (I-3). Isto permite concluir que:

$\boxed{\lim_{i\to\infty} q_i = q_\infty = \lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \rho}$, conforme indicado nas figuras da página anterior!

2 Determinação de $S_i = F_{i+1} \cdot F_{i+2} - F_i \cdot F_{i+3}$ para $i = 0, 1, 2, \cdots$

Para i =0 tem-se: $S_0 = F_1 \cdot F_2 - F_0 \cdot F_3 = 1\cdot 2 - 1\cdot 3 = -1$.

Com i genérico: $S_i = F_{i+1} \cdot F_{i+2} - F_i \cdot F_{i+3}$

e substituindo: $i \to i-1 \Rightarrow S_{i-1} = F_i \cdot F_{i+1} - F_{i-1} \cdot F_{i+2}$,

Assim: $S_i + S_{i-1} = F_{i+2} \cdot \left(F_{i+1} - F_{i-1}\right) + F_i \left(F_{i+1} - F_{i+3}\right)$, mas, em vista de:

$F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \Rightarrow F_{i+1} - F_{i-1} = F_i$ e $F_{i+3} = F_{i+1} + F_{i+2} \Rightarrow F_{i+1} - F_{i+3} = -F_{i+2}$, tem-se:

$S_i + S_{i-1} = F_{i+2} \cdot F_i + F_i \left(-F_{i+2}\right) \equiv 0 \Rightarrow S_i = -S_{i-1}$ para $i = 1, 2, \cdots$ com $S_0 = -1$, isto é:

$S_1 = +1$; $S_2 = -1$; $S_3 = +1$;$\cdots$, logo: $\boxed{S_i = \left(-1\right)^{i+1} \quad \text{para} \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots}$

3 Determinação de $T_i = F_i \cdot F_{i+2} - \left(F_{i+1}\right)^2$ para $i = 0, 1, 2, \cdots$

Para i =0 tem-se: $T_0 = F_0 \cdot F_2 - \left(F_1\right)^2 = 1\cdot 2 - 1 = +1$.

Com i: genérico: $T_i = F_i \cdot F_{i+2} - \left(F_{i+1}\right)^2$

e substituindo: $i \to i-1 \Rightarrow T_{i-1} = F_{i-1} \cdot F_{i+1} - \left(F_i\right)^2$,

Assim: $T_i + T_{i-1} = F_{i+1} \cdot \left(F_{i-1} - F_{i+1}\right) + F_i \cdot \left(F_{i+2} - F_i\right)$, mas, em vista de:

$F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \Rightarrow F_{i-1} - F_{i+1} = -F_i$ e $F_{i+2} = F_i + F_{i+1} \Rightarrow F_{i+2} - F_i = F_{i+1}$, tem-se:

$T_i + T_{i-1} = F_{i+1} \cdot \left(-F_i\right) + F_i \cdot F_{i+1} \equiv 0 \Rightarrow T_i = -T_{i-1}$ para $i = 1, 2, \cdots$ com $T_0 = +1$, isto é:

$T_1 = -1$;$T_2 = +1$;$T_3 = -1$; $\cdots$, logo: $\boxed{T_i = \left(-1\right)^i \quad \text{para} \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots}$