

5. MÉTODO DE ENXAME DE PARTÍCULAS (*PARTICLE SWARM*)

5.1. [Analogia Compartamental: *todos por um e um por todos*](#)

5.2. [A Tradução Matemática: o algoritmo básico](#)

5.3. [A Programação do Algoritmo](#)

5.4. [Exemplos Ilustrativos](#)

5. MÉTODO DE ENXAME DE PARTÍCULAS

5.1. **Analogia Comportamental : *todos por um e um por todos***



Figura 1 –Uma imensa nuvem de pássaros [red-billed queleas] retornam a seu viveiro natural ao pôr do sol, Delta do Okavango, Botswana, África

O método de *enxame de partículas* pode ser explicado de uma forma simples através de uma analogia de comportamento social apresentada por M. Clerc [*The Swarm & The Queen. Towards a Deterministic and Adaptive Particle Swarm Optimization* de Maurice Clerc – Artigo disponibilizado na Internet na *Home Page* <http://clerc.maurice.free.fr/PSO/>]. O autor sugere a seguinte situação fictícia: “Suponha que você e alguns amigos estão à busca de um tesouro enterrado em uma ilha. Cada membro da expedição tem um rádio-comunicador-receptor, podendo se comunicar com todos os membros informando-os sobre a situação em que se encontra, bem como ouvir todos os comunicados trocados entre os membros. Assim, cada explorador sabe a localização de toda a equipe e está informado sobre a situação (quão próximo está do encontro do tesouro) de cada membro. O seu próximo deslocamento será feito fundamentado em sua própria experiência e nos relatos ouvidos em seu rádio. Desta forma, havendo real cooperação e troca de informações entre os membros da equipe, o tesouro será achado em um tempo bem menor do que se você fosse escavar sozinho vários buracos na ilha...” .Em suma, o aspecto cooperativo da busca do tesouro poderia ter como epíteto a famosa frase encontrada no final do Capítulo 9 do livro “Os Três Mosqueteiros” de Alexandre Dumas “ *todos por um e um por todos, este é nosso lema, não é ?* ”.

Este mesmo comportamento cooperativo e de troca de informações é encontrado entre várias espécies animais: em revoadas de pássaros, em cardumes de peixes, em enxames de abelhas, etc. Cientistas de diferentes áreas tentaram modelar estes comportamentos e simulá-los, em particular Reynolds [Reynolds, C.W. (1987) – “*Flocks, herds and schools : a distributed behavioral model*” em *Computer Graphics*, 21 (4): 25-34] discute a riqueza do movimento de revoadas de pássaros, de manadas de animais terrestres ou de cardumes de peixes procurando estabelecer regras básicas do comportamento individual que justifiquem o comportamento do grupo. O objetivo do trabalho foi o desenvolvimento da *animação*, por computação gráfica, do movimento de cada membro do grupo, estando portanto fora do escopo do presente curso. Entretanto, a conclusão mais pertinente do artigo se refere ao fato do movimento simulado da revoada de pássaros ser o resultado de comportamentos relativamente simples do movimento de cada um dos indivíduos (pássaros). Um outro trabalho pioneiro é o de Heppner & Grenander [Heppner, F & Grenander, U. (1990) – “*A stochastic nonlinear model for coordinated birds flocks*” em “*The Ubiquity of Chaos*” Editado por S. Krasner , AAAS Publications, Washington DC] trabalho conjunto entre um biólogo (primeiro autor!) e um matemático que busca estabelecer as regras que descrevam a perfeita sincronia do movimento de um grande número de pássaros tanto em suas súbitas e bem orquestradas mudanças de direção, como no seu espalhamento e posterior reagrupamento.

O primeiro trabalho sobre o algoritmo de otimização natural denominado *ENXAME DE PARTÍCULAS* (*Particle swarm* em Inglês) é o de Eberhart & Kennedy [Kennedy, J. & Eberhart, R. (1995), - “*Particle Swarm Optimization*” em *Proceedings IEEE International Conference on Neural Networks (Perth, Austrália)* páginas 1942-1948 , artigo disponibilizado na Internet na *Home Page*: <http://www.engr.iupui.edu/~shi/Coference/psopap4.html>] que, motivados pelo comportamento gregário do movimento de animais (pássaros, peixes, abelhas, gado, etc.) , propuseram um algoritmo de otimização não determinístico bastante eficiente, robusto e de simples implementação computacional.

A tradução matemática do algoritmo de Eberhart & Kennedy é apresentado no próximo item, entendendo-se que o termo partícula se refere a cada um dos indivíduos do grupo (termo equivalente a indivíduo no algoritmo genético) e o termo enxame se refere ao grupo de indivíduos. É importante enfatizar que neste algoritmo, de forma distinta do algoritmo genético, o indivíduo (a partícula) é mantido íntegro durante todo o processo, *sobrevivendo* sem envelhecer até o final do procedimento, a única modificação sofrida pelo indivíduo é sua localização no espaço.

[voltar para ENXAME DE PARTÍCULAS](#)

5.2. A Tradução Matemática: o algoritmo básico

No artigo de Eberhart & Kennedy (1995) não se encontra demonstração formal alguma do algoritmo proposto pelos autores, o método proposto já está apresentado em sua forma recursiva adequada para implementação computacional. Uma tentativa de apresentar este algoritmo é apresentada neste item, resultando desta nova formulação uma versão modificada do algoritmo

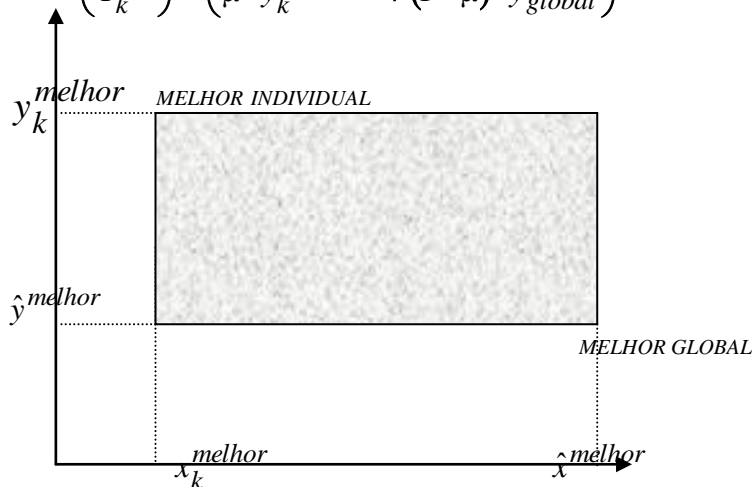
originalmente proposto.

A idéia fundamental do algoritmo é o estabelecimento, em cada passo ou iteração, do movimento de cada uma das partículas do grupo composto por n partículas (sendo o valor de n escolhido pelo usuário!). Este movimento é norteado pela *lembrança* da *melhor* posição (melhor valor da função objetivo) no espaço que a partícula já encontrou em seu movimento e no *conhecimento* da *melhor* posição já encontrada por todo o grupo. A utilização da melhor posição individual da partícula pode ser classificada como uma espécie de autoconfiança (ou coloquialmente como o comportamento *sou-mais-eu!*) e a informação da melhor posição do grupo pode ser classificada como um comportamento gregário do indivíduo (ou coloquialmente como o comportamento *maria-vai-com-as-outras!*). Para assegurar a existência de uma certa *personalidade* em cada indivíduo se dota cada indivíduo do grupo de um comportamento distinto e aleatório em que a ponderação destas duas informações é *sorteada* ao longo do processo, assumindo assim um valor diferente para cada uma das partículas e variando este valor ao longo do processo iterativo (procurando traduzir uma certa mudança humor do indivíduo ao longo do tempo). Assim, considerando o movimento da partícula em um plano ou em um espaço bi-dimensional e sua localização neste espaço caracterizada por suas coordenadas:

Partícula k posição no plano xy no passo ou iteração i : $(x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$ onde $k = 1, 2, \dots, n$ (número total de partículas no enxame) e $i = 1, 2, \dots, m$ (número total de passos); melhor posição da partícula k : $(x_k^{(melhor)}, y_k^{(melhor)})$ e melhor posição já encontrada pelo enxame (todas as partículas) $(\hat{x}_{global}, \hat{y}_{global})$.

A *Força Motriz* que movimentará cada uma das partículas será proporcional à distância entre a posição atual da partícula e o ponto resultante da média ponderada entre a melhor posição individual da partícula e a melhor posição do enxame, isto é :

$$\mathbf{X}_k^{(i)} = \begin{pmatrix} X_k^{(i)} \\ Y_k^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_k^{(melhor)} + (1-\lambda) \cdot \hat{x}_{global} \\ \mu \cdot y_k^{(melhor)} + (1-\mu) \cdot \hat{y}_{global} \end{pmatrix} \text{ onde } \lambda \text{ e } \mu \text{ são dois números aleatórios } \in [0,1].$$



O retângulo sombreado na figura acima representa a região no plano xy de todos os

pontos $X_k^{(i)}$.

Considerando o movimento de cada partícula análogo ao do movimento do sistema mecânico carrinho+mola+amortecedor resulta no balanço de forças (em forma adimensional!):

$$\text{Na direção } x: \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} = -2 \cdot \xi_k \cdot \frac{dx_k(t)}{dt} - [x_k(t) - X_k^{(i)}]$$

$$\text{e na direção } y: \frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} = -2 \cdot \zeta_k \cdot \frac{dy_k(t)}{dt} - [y_k(t) - Y_k^{(i)}]$$

estas duas equações diferenciais são resolvidas no intervalo de tempo (tempo artificial adimensional, que na realidade *mede*, em sua forma discreta, as iterações do processo) :

$t_i = i \cdot \Delta t < t \leq (i+1) \cdot \Delta t = t_{i+1}$. No *início* do intervalo se tem: $x_k(t_i) = x_k^{(i)}$; $y_k(t_i) = y_k^{(i)}$;

$\left. \frac{dx_k(t)}{dt} \right|_{t_i} = v_k^{(i)}$ e $\left. \frac{dy_k(t)}{dt} \right|_{t_i} = v_k^{(i)}$ (que são os dois componentes do vetor velocidade da partícula

no início do intervalo). Os parâmetros ξ_k e ζ_k são dois números aleatórios (adimensionais!) $\in [0,1]$.

Reescrevendo as duas equações diferenciais em termos dos dois componentes do vetor velocidade resulta no sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_k(t)}{dt} = -2 \cdot \xi_k \cdot v_k(t) - [x_k(t) - X_k^{(i)}] \\ \frac{dx_k(t)}{dt} = v_k(t) \\ \frac{dv_k(t)}{dt} = -2 \cdot \zeta_k \cdot v_k(t) - [y_k(t) - Y_k^{(i)}] \\ \frac{dy_k(t)}{dt} = v_k(t) \end{array} \right.$$

Resolvendo numericamente estas equações pelo método de Euler explícito, resulta no final do intervalo:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_k^{(i+1)} = v_k^{(i)} - 2 \cdot \xi_k \cdot \Delta t \cdot v_k^{(i)} - \Delta t \cdot [x_k^{(i)} - X_k^{(i)}] \\ x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} + \Delta t \cdot v_k^{(i)} \\ v_k^{(i+1)} = v_k^{(i)} - 2 \cdot \zeta_k \cdot \Delta t \cdot v_k^{(i)} - \Delta t \cdot [y_k^{(i)} - Y_k^{(i)}] \\ y_k^{(i+1)} = y_k^{(i)} + \Delta t \cdot v_k^{(i)} \end{array} \right.$$

Definindo as variáveis : $V_x = \Delta t \cdot v$ e $V_y = \Delta t \cdot v$ resulta:

$$\begin{cases} V_{x,k}^{(i+1)} = V_{x,k}^{(i)} - 2 \cdot \xi_k \cdot \Delta t \cdot V_{x,k}^{(i)} - \Delta t^2 \cdot [x_k^{(i)} - X_k^{(i)}] \\ x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} + V_{x,k}^{(i)} \\ V_{y,k}^{(i+1)} = V_{y,k}^{(i)} - 2 \cdot \zeta_k \cdot \Delta t \cdot V_{y,k}^{(i)} - \Delta t^2 \cdot [y_k^{(i)} - Y_k^{(i)}] \\ y_k^{(i+1)} = y_k^{(i)} + V_{y,k}^{(i)} \end{cases}$$

Agrupando os parâmetros das expressões acima chega-se à forma iterativa do método conforme sugerida por Eberhart & Kennedy (1995)¹:

$$\begin{cases} V_{x,k}^{(i+1)} = \omega^{(i)} \cdot V_{x,k}^{(i)} + c_1 \cdot \lambda \cdot [x_k^{melhor} - x_k^{(i)}] + c_2 \cdot \mu \cdot [\hat{x}_{global} - x_k^{(i)}] \\ x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} + V_{x,k}^{(i+1)} \\ V_{y,k}^{(i+1)} = \omega^{(i)} \cdot V_{y,k}^{(i)} + c_1 \cdot \eta \cdot [y_k^{melhor} - y_k^{(i)}] + c_2 \cdot \varepsilon \cdot [\hat{y}_{global} - y_k^{(i)}] \\ y_k^{(i+1)} = y_k^{(i)} + V_{y,k}^{(i+1)} \end{cases}$$

para $i = 0, 1, \dots, \underline{m}-1$; sugere-se adotar a *ponderação* $\omega^{(i)}$ decrescente com i de forma linear segundo a expressão: $\omega^{(i)} = \omega_{inicial} + (\omega_{final} - \omega_{inicial}) \cdot \left(\frac{i}{m-1}\right)$ com $\omega_{final} < \omega_{inicial}$; as constantes c_1 e c_2

são valores reais positivos escolhidos pelo usuário e os parâmetros λ , μ , η e ε são valores randômicos ou aleatórios *sorteados* em cada passo do processo iterativo. As posições e velocidades iniciais das partículas podem ser definidas pelo usuário ou então geradas aleatoriamente pelo computador.

Uma forma alternativa do procedimento recursivo pode também ser obtida (sendo referenciada a partir deste instante como algoritmo modificado de enxame de partículas, abreviadamente PSO-modificado, em contraposição ao de Eberhart & Kennedy denominado de PSO-clássico) através da solução analítica, em cada intervalo de tempo, do sistema original de EDO's:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + 2 \cdot \xi_k \cdot \frac{dx_k(t)}{dt} + [x_k(t) - X_k^{(i)}] = 0 \\ \frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} + 2 \cdot \zeta_k \cdot \frac{dy_k(t)}{dt} + [y_k(t) - Y_k^{(i)}] = 0 \end{cases}$$

congelando os valores de $X_k^{(i)}$ e $Y_k^{(i)}$ em seus valores no início do intervalo, *sorteando* os valores de ξ_k e ζ_k apenas uma vez em t_i e resolvendo o sistema com as condições iniciais:

¹ Note que na discretização das equações diferenciais o procedimento de integração da posição é o Euler implícito enquanto que o das velocidades é o Euler explícito!

$$x_k(t_i) = x_k^{(i)} ; y_k(t_i) = y_k^{(i)} ; \left. \frac{dx_k(t)}{dt} \right|_{t_i} = v_k^{(i)} \text{ e } \left. \frac{dy_k(t)}{dt} \right|_{t_i} = v_k^{(i)}, \text{ resulta:}$$

$$\begin{cases} x_k^{(i+1)} = X_k^{(i)} + \exp(-\xi_k \cdot \Delta t) \cdot \left\{ \left(x_k^{(i)} - X_k^{(i)} \right) \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) + \left[\xi_k \cdot \left(x_k^{(i)} - X_k^{(i)} \right) + v_k^{(i)} \right] \cdot \frac{\text{sen}(\omega \cdot \Delta t)}{\omega} \right\} \\ v_k^{(i+1)} = \exp(-\xi_k \cdot \Delta t) \cdot \left\{ v_k^{(i)} \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) - \left[\left(\omega^2 + \xi_k^2 \right) \cdot \left(x_k^{(i)} - X_k^{(i)} \right) + \xi_k v_k^{(i)} \right] \cdot \frac{\text{sen}(\omega \cdot \Delta t)}{\omega} \right\} \\ y_k^{(i+1)} = Y_k^{(i)} + \exp(-\varsigma_k \cdot \Delta t) \cdot \left\{ \left(y_k^{(i)} - Y_k^{(i)} \right) \cdot \cos(\sigma \cdot \Delta t) + \left[\varsigma_k \cdot \left(y_k^{(i)} - Y_k^{(i)} \right) + v_k^{(i)} \right] \cdot \frac{\text{sen}(\sigma \cdot \Delta t)}{\sigma} \right\} \\ v_k^{(i+1)} = \exp(-\varsigma_k \cdot \Delta t) \cdot \left\{ v_k^{(i)} \cdot \cos(\sigma \cdot \Delta t) - \left[\left(\sigma^2 + \varsigma_k^2 \right) \cdot \left(y_k^{(i)} - Y_k^{(i)} \right) + \varsigma_k v_k^{(i)} \right] \cdot \frac{\text{sen}(\sigma \cdot \Delta t)}{\sigma} \right\} \end{cases}$$

onde: $\omega = \sqrt{1 - \xi_k^2}$ e $\sigma = \sqrt{1 - \varsigma_k^2}$.

Esta forma modificada do algoritmo só necessita (além da especificação do número de partículas, do número de iterações e dos valores iniciais das posições e velocidades das partículas) da especificação do parâmetro $\Delta t > 0$. Este é a grande vantagem deste método modificado (no algoritmo clássico se deve especificar os valores das constantes c_1 , c_2 e de $\omega_{inicial}$ e ω_{final}) e a maior complexidade do algoritmo é apenas aparente já que o procedimento recursivo é análogo ao do clássico diferindo apenas no cálculo em cada passo dos valores de funções trigonométricas simples (seno e cosseno) e da função exponencial o que não aumenta em nada o custo computacional do código.

[voltar para ENXAME DE PARTÍCULAS](#)

5.3. A Programação do Algoritmo

As duas formas do algoritmo são, sob o ponto de vista de implementação, semelhantes diferindo apenas nas expressões matemáticas de cálculo da posição e da velocidade de cada partícula ao cabo de cada iteração e nas especificações das constantes pertinentes.

O algoritmo PSO-clássico para a busca do máximo de uma função $f(x,y)$ pode assim ser sumarizado pelo pseudo-código abaixo:

Etapa Inicial (Iteração zero): Entre com \mathbf{n} (o número de partículas do enxame), \mathbf{m} (o número de iterações), especifique os valores de ω_{final} , $\omega_{inicial}$, c_1 , c_2 e os valores mínimos e máximos de x e de y . Gere as condições iniciais segundo o procedimento²:

$$\text{para } k = 1, \dots, \mathbf{n} \text{ faça } \lambda \leftarrow \text{rnd}(1); x_k \leftarrow x_{\min} + \lambda \cdot (x_{\text{MAX}} - x_{\min}) \text{ e } x_k^{\text{melhor}} \leftarrow x_k$$

² Nos procedimentos a função $\text{rnd}(\alpha)$ gera números aleatórios com distribuição uniforme entre 0(zero) e α .

$$\mu \leftarrow rnd(1) ; y_k \leftarrow y_{\min} + \mu \cdot (y_{MAX} - y_{\min}) \text{ e } y_k^{melhor} \leftarrow y_k$$

$V_{x,k} \leftarrow 0$ e $V_{y,k} \leftarrow 0$ (optou-se neste caso para partir com as partículas em repouso!).

$$\text{Faça } \hat{x}^{melhor} \leftarrow x_1 ; \hat{y}^{melhor} \leftarrow y_1 ; f_1^{(melhor)} \leftarrow f(x_1, y_1) \text{ e } \hat{f}_{global} \leftarrow f_1^{(melhor)} ;$$

Etapa a) para $i = 2, \dots, n$ faça $f_i^{(melhor)} \leftarrow f(x_i, y_i)$

se $f_i^{(melhor)} > \hat{f}_{global}$ então faça $\hat{x}^{melhor} \leftarrow x_i ; \hat{y}^{melhor} \leftarrow y_i$ e

$\hat{f}_{global} \leftarrow f_i^{(melhor)}$ volte para o início da **Etapa a** com o próximo i ;

se $f_i^{(melhor)} \leq \hat{f}_{global}$ volte para o início da **Etapa a** com o próximo i ;

Etapa 1 (Iteração i) Para $i = 1, \dots, m$ faça $\omega \leftarrow \omega_{inicial} + (\omega_{final} - \omega_{inicial}) \cdot \left(\frac{i-1}{m-1} \right)$

Etapa 1-a) Para $k = 1, \dots, n$ faça: $\lambda \leftarrow rnd(1) ; \mu \leftarrow rnd(1) ; \eta \leftarrow rnd(1)$ e $\varepsilon \leftarrow rnd(1)$

$$V_{x,k} \leftarrow \omega \cdot V_{x,k} + c_1 \cdot \lambda \cdot [x_k^{melhor} - x_k] + c_2 \cdot \mu \cdot [\hat{x}_{global} - x_k]$$

$$V_{y,k} \leftarrow \omega \cdot V_{y,k} + c_1 \cdot \eta \cdot [y_k^{melhor} - y_k] + c_2 \cdot \varepsilon \cdot [\hat{y}_{global} - y_k]$$

$$x_k \leftarrow x_k + V_{x,k} \text{ e } y_k \leftarrow y_k + V_{y,k}$$

Se $x_k > x_{MAX}$ faça $x_k \leftarrow x_{MAX}$ e $V_{x,k} \leftarrow 0$

Se $x_k < x_{\min}$ faça $x_k \leftarrow x_{\min}$ e $V_{x,k} \leftarrow 0$

Se $y_k > y_{MAX}$ faça $y_k \leftarrow y_{MAX}$ e $V_{y,k} \leftarrow 0$

Se $y_k < y_{\min}$ faça $y_k \leftarrow y_{\min}$ e $V_{y,k} \leftarrow 0$

Calcule $f_{atual} \leftarrow f(x_k, y_k)$

Se $f_{atual} > f_k^{(melhor)}$ faça $f_k^{(melhor)} \leftarrow f_{atual}$, $x_k^{(melhor)} \leftarrow x_k$ e $y_k^{(melhor)} \leftarrow y_k$;
 verifique a seguir se $f_{atual} > \hat{f}_{global}$ faça $\hat{f}_{global} \leftarrow f_{atual}$, $\hat{x}_{global} \leftarrow x_k$ e
 $\hat{y}_{global} \leftarrow y_k$; caso $f_{atual} \leq \hat{f}_{global}$ volte ao início Etapa 1-a) com o próximo k se

k < n, caso contrário [k ≥ n] vá para o início da Etapa 1 com o próximo i se i < m,
 caso contrário [i ≥ m] vá para a Etapa 2

Se $f_{atual} \leq f_k^{(melhor)}$ volte ao início Etapa 1-a) com o próximo k se k < n, caso
 contrário [k ≥ n] vá para o início da Etapa 1 com o próximo i se i < m, caso contrário
 [i ≥ m] vá para a Etapa 2

Etapa 2 O processo iterativo terminou os *melhores* valores de x e y são : \hat{x}_{global} e \hat{y}_{global} e
 neste ponto o valor da função é : \hat{f}_{global}

FIM

O algoritmo PSO-modificado para a busca do máximo de uma função $f(x,y)$ pode assim ser
 sumarizado pelo pseudo-código abaixo:

Etapa Inicial (Iteração zero): Entre com n (o número de partículas do enxame), m (o número
 de iterações), especifique o valor de $\Delta t > 0$ e os valores mínimos e máximos de x e de y. Gere as
 condições iniciais segundo o procedimento:

para k = 1, ..., n faça $\lambda \leftarrow rnd(1)$; $x_k \leftarrow x_{min} + \lambda \cdot (x_{MAX} - x_{min})$ e $x_k^{(melhor)} \leftarrow x_k$

$\mu \leftarrow rnd(1)$; $y_k \leftarrow y_{min} + \mu \cdot (y_{MAX} - y_{min})$ e $y_k^{(melhor)} \leftarrow y_k$

$v_k \leftarrow 0$ e $v_k \leftarrow 0$ (optou-se neste caso para partir com as partículas em
 repouso!).

Faça $\hat{x}^{(melhor)} \leftarrow x_1$; $\hat{y}^{(melhor)} \leftarrow y_1$; $f_1^{(melhor)} \leftarrow f(x_1, y_1)$ e $\hat{f}_{global} \leftarrow f_1^{(melhor)}$;

Etapa a) para i = 2, ..., n faça $f_i^{(melhor)} \leftarrow f(x_i, y_i)$

se $f_i^{(melhor)} > \hat{f}_{global}$ então faça $\hat{x}^{(melhor)} \leftarrow x_i$; $\hat{y}^{(melhor)} \leftarrow y_i$ e

$\hat{f}_{global} \leftarrow f_i^{(melhor)}$ volte para o início da Etapa a) com o próximo i;

se $f_i^{(melhor)} \leq \hat{f}_{global}$ volte para o início da Etapa a com o próximo i ;

Etapa 3 (Iteração i) Para $i = 1, \dots, m$ execute Etapa 1-a)

Etapa 1-a) Para $k = 1, \dots, n$ faça: $\lambda \leftarrow rnd(1)$; $\eta \leftarrow rnd(1)$; $\xi \leftarrow rnd(1)$ e $\varsigma \leftarrow rnd(1)$

Calcule : $\omega \leftarrow \sqrt{1-\xi^2}$; $X \leftarrow \lambda \cdot x_k^{(melhor)} + (1-\lambda) \cdot \hat{x}_{global}$; $A \leftarrow x_k - X$;

$$B \leftarrow \frac{\xi \cdot A + v_k}{\omega} ; f_1 \leftarrow \exp(-\xi \cdot \Delta t) \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) \text{ e } f_2 \leftarrow \exp(-\xi \cdot \Delta t) \cdot \text{sen}(\omega \cdot \Delta t)$$

$$x_k \leftarrow X + A \cdot f_1 + B \cdot f_2$$

$$v_k \leftarrow v_k \cdot f_1 - (\omega \cdot A + \xi \cdot B) \cdot f_2$$

Se $x_k > x_{MAX}$ faça $x_k \leftarrow x_{MAX}$ e $v_k \leftarrow 0$

Se $x_k < x_{min}$ faça $x_k \leftarrow x_{min}$ e $v_k \leftarrow 0$

a seguir calcule : $\sigma \leftarrow \sqrt{1-\varsigma^2}$; $Y \leftarrow \eta \cdot y_k^{(melhor)} + (1-\eta) \cdot \hat{y}_{global}$; $C \leftarrow y_k - Y$;

$$D \leftarrow \frac{\varsigma \cdot C + v_k}{\sigma} ; g_1 \leftarrow \exp(-\varsigma \cdot \Delta t) \cdot \cos(\sigma \cdot \Delta t) \text{ e } g_2 \leftarrow \exp(-\varsigma \cdot \Delta t) \cdot \text{sen}(\sigma \cdot \Delta t)$$

$$y_k \leftarrow Y + C \cdot g_1 + D \cdot g_2$$

$$v_k \leftarrow v_k \cdot g_1 - (\sigma \cdot C + \varsigma \cdot D) \cdot g_2$$

Se $y_k > y_{MAX}$ faça $y_k \leftarrow y_{MAX}$ e $v_k \leftarrow 0$

Se $y_k < y_{min}$ faça $y_k \leftarrow y_{min}$ e $v_k \leftarrow 0$

Calcule $f_{atual} \leftarrow f(x_k, y_k)$

Se $f_{atual} > f_k^{(melhor)}$ faça $f_k^{(melhor)} \leftarrow f_{atual}$, $x_k^{(melhor)} \leftarrow x_k$ e $y_k^{(melhor)} \leftarrow y_k$;

verifique a seguir se $f_{atual} > \hat{f}_{global}$ faça $\hat{f}_{global} \leftarrow f_{atual}$, $\hat{x}_{global} \leftarrow x_k$ e

$\hat{y}_{global} \leftarrow y_k$; caso $f_{atual} \leq \hat{f}_{global}$ volte ao início Etapa 1-a) com o próximo k se

$k < \mathbf{n}$, caso contrário [$k \geq \mathbf{n}$] vá para o início da Etapa 1 com o próximo i se $i < \mathbf{m}$, caso contrário [$i \geq \mathbf{m}$] vá para a Etapa 2

Se $f_{atual} \leq f_k^{(melhor)}$ volte ao início Etapa 1-a) com o próximo k se $k < \mathbf{n}$, caso contrário [$k \geq \mathbf{n}$] vá para o início da Etapa 1 com o próximo i se $i < \mathbf{m}$, caso contrário [$i \geq \mathbf{m}$] vá para a Etapa 2

Etapa 4 O processo iterativo terminou os *melhores* valores de x e y são : \hat{x}_{global} e \hat{y}_{global} e neste ponto o valor da função é : \hat{f}_{global} .

FIM

A seleção dos valores dos parâmetros/constantes dos dois algoritmos é uma tarefa de *tentativa-e-erro*, a recomendação que se dá nestes casos e para estes tipos de algoritmos é a execução de um grande número de experimentos numéricos. A prática adquirida através da implementação computacional dos algoritmos e a resolução de exercícios simples é fundamental para se adquirir alguma sensibilidade sobre os valores destes parâmetros/constantes. Mesmo assim se deve alertar que não há *valores mágicos* destes parâmetros/constantes e sempre desconfie de artigos científicos que sugiram de forma categórica valores particulares destes parâmetros como os *melhores*.

[voltar para ENXAME DE PARTÍCULAS](#)

5.4. Exemplos Ilustrativos

Para entender o significado dos parâmetros do método, considere a mesma função considerada nos algoritmos genéticos, que é a minimização de $F(x)$ apresentada abaixo.

$$F(x) = \frac{1}{10000} (x + 10) (x + 6) (x + 5) (x + 1) (x - 7) (x - 10)$$

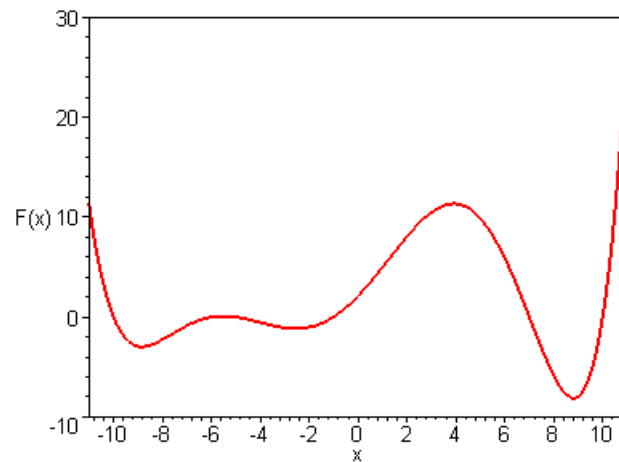


Figura 2 – Espaço de busca da função teste

- Observe que existem mínimos locais em $x \approx -8,834$, $x \approx -2,546$ e $x \approx 8,817$, sendo este último o mínimo global. A função apresenta máximos locais em $x \approx -5,518$ e $x \approx 3,914$.

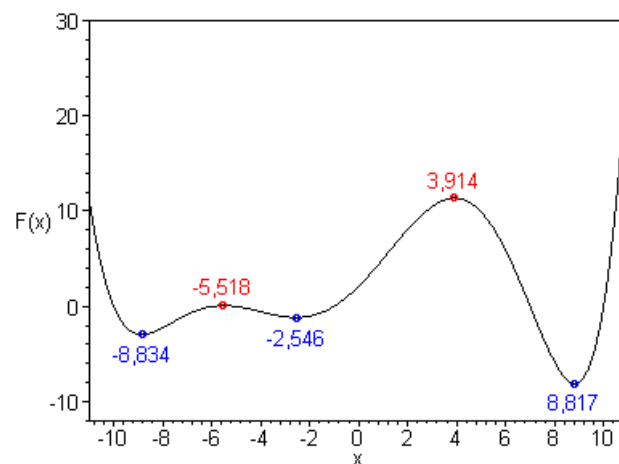


Figura 3 – Extremos da função teste

As duas versões do PSO foram implementadas computacionalmente. Abaixo é mostrada a evolução dos valores ótimos da função e da variável x ao longo do procedimento evolutivo com a forma clássica do algoritmo tendo sido utilizado os seguintes conjunto de parâmetros: $\omega_{inicial}=0,9$; $\omega_{final}=0$; $c_1=c_2=1$; $x_{MAX} = +12$ e $x_{min} = -12$. Adotando-se uma população de 10(dez) partículas, um máximo de 20 (vinte) iterações e partindo de localizações iniciais aleatórias (entre -12 e $+12$) e do repouso.

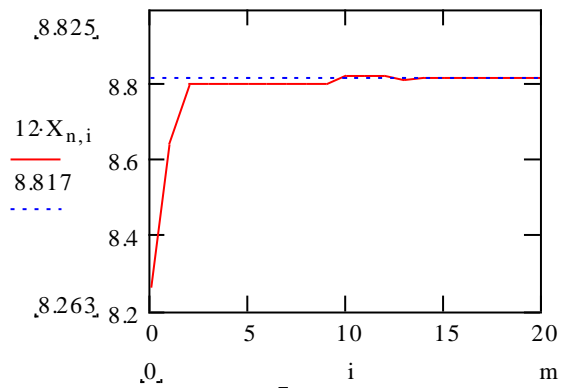


Figura 4 – Evolução dos Melhores Valores Globais da Função Teste

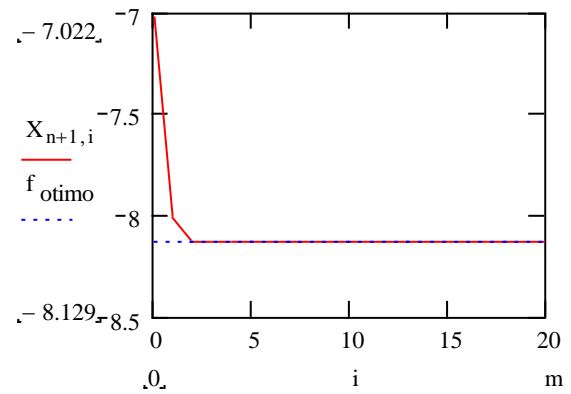


Figura 5 – Evolução dos Melhores Valores Globais da Variável

Uma animação desta solução pode ser reproduzida clicando-se no programa Univariável_PSO_clássico.

Abaixo é mostrada a evolução dos valores ótimos da função e da variável x ao longo do procedimento evolutivo com a forma modificada do algoritmo tendo sido utilizado os seguintes conjunto de parâmetros: $\Delta t=1$; $x_{MAX} = +12$ e $x_{min} = -12$. Adotando-se uma população de 10(dez) partículas, um máximo de 20 (vinte) iterações e partindo de localizações iniciais aleatórias (entre -12 e $+12$) e do repouso.

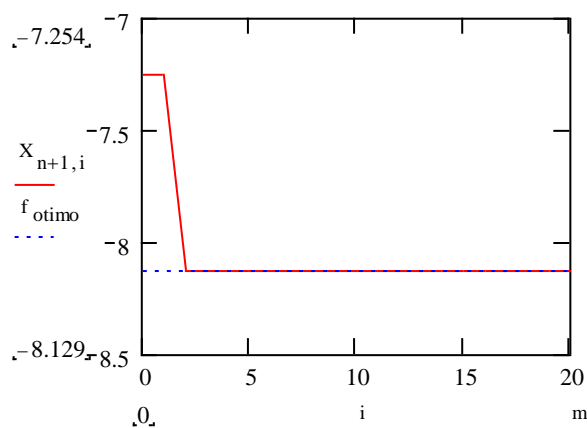


Figura 6 – Evolução dos Melhores Valores Globais da Função Teste

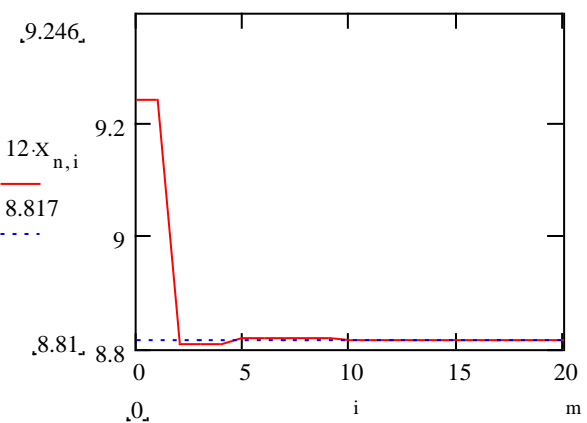


Figura 7 – Evolução dos Melhores Valores Globais da Variável

Uma animação desta solução pode ser reproduzida clicando-se no programa Univariável_PSO_modificado.

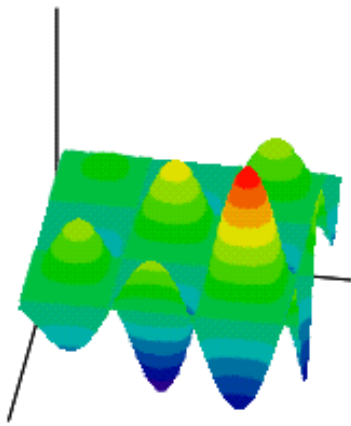
Notem que o desempenho das duas formas do algoritmo é idêntico, não sendo possível afirmar qual das duas formas é mais eficiente.

O funcionamento do algoritmo de enxame de partículas (PSO para os íntimos) é agora ilustrado com a maximização de uma função de duas variáveis, a chamada Função Alpina que é representada pela equação :

$$f(x, y) = \sqrt{x \cdot y} \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$$

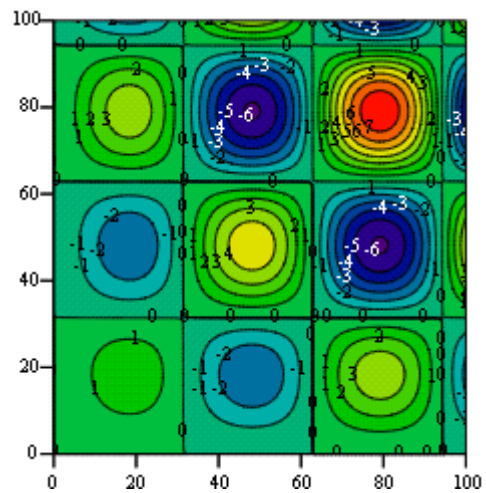
no domínio : $0 < x < 10$ e $0 < y < 10$.

Esta função é mostrada nas duas figuras a seguir:



a

Figura 8 – A Função Alpina



a

Figura 9 – A Função Alpina em Curvas de Nível

O máximo global desta função, na região considerada, é em $x = y \approx 7,917$ onde a função assume o valor $f_{MAXIMO} \approx 7,8856$.

Abaixo é mostrada a evolução dos valores ótimos da função ao longo do procedimento evolutivo com a forma clássica do algoritmo tendo sido utilizado os seguintes conjunto de parâmetros: $\omega_{inicial}=0,9$; $\omega_{final}=0$; $c_1=c_2=1$; $x_{MAX}=y_{MAX}=+10$ e $x_{min}=y_{min}=0$. Adotando-se uma população de 20(vinte) partículas, um máximo de 20 (vinte) iterações e partindo de localizações iniciais aleatórias [entre (0,0) e (10,10)] e do repouso.

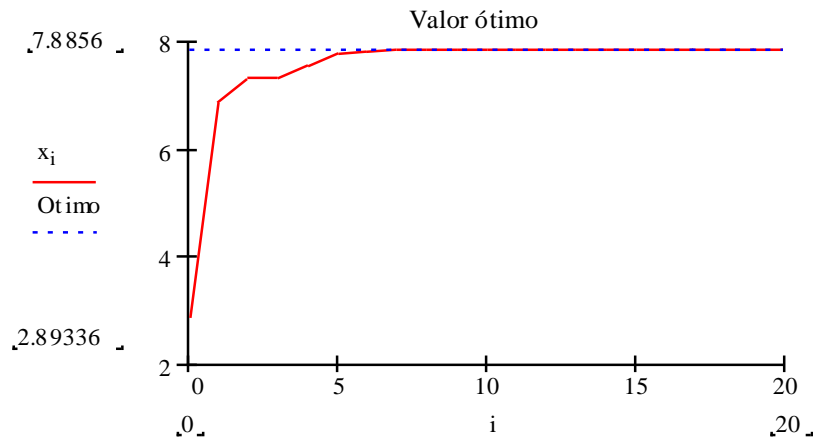


Figura 10 – Evolução dos Melhores Valores Globais da Função Alpina

Uma animação desta solução pode ser reproduzida clicando-se no programa *Alpina_PSO_Clássico*.

Abaixo é mostrada a evolução dos valores ótimos da função ao longo do procedimento evolutivo com a forma modificada do algoritmo tendo sido utilizado os seguintes conjunto de parâmetros: $\Delta t=1$; $x_{MAX}=y_{MAX}=+10$ e $x_{min}=y_{min}=0$. Adotando-se uma população de 20(vinte) partículas, um máximo de 20 (vinte) iterações e partindo de localizações iniciais aleatórias [entre (0,0) e (10,10)] e do repouso.

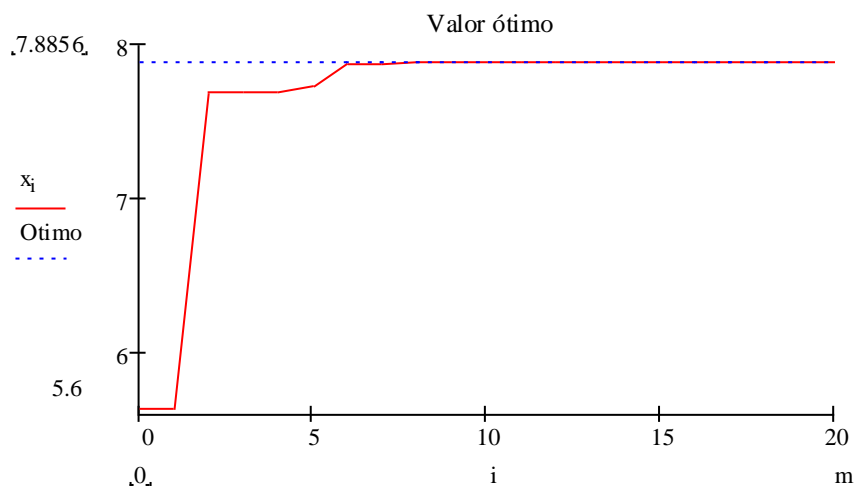


Figura 11 – Evolução dos Melhores Valores Globais da Função Alpina

Uma animação desta solução pode ser reproduzida clicando-se no programa *Alpina_PSO_Modificado*.

É importante novamente enfatizar que os *melhores* valores dos parâmetros/constantes das duas formas do algoritmo são muito dependentes do problema particular que se está resolvendo e que uma análise da sensibilidade da resolução do problema a valores particulares dos

parâmetros/constantes só pode ser feita após a execução de um grande número de simulações. Desta maneira, recomendamos fortemente que sejam feitos **todos** os exercícios da lista sobre o assunto e que dúvidas sejam tiradas por E-mail ou durante as sessões do *chat-room*.

[voltar para ENXAME DE PARTÍCULAS](#)