PROBLEMA VARIACIONAL – EQUAÇÃO DE EULER

Seja $F(x,y,z)$ uma função contínua com derivadas primeiras e segundas contínuas em relação a todos seus argumentos. Então, entre todas as funções $y(x)$ que são continuamente diferenciáveis no intervalo $a \le x \le b$ e que satisfazem às condições de contorno: $y(a)=A$ e $y(b)=B$, determine a função $y(x)$ para qual a *funcional*: $J\left[y(x)\right]=\int_{x=a}^{x=b} F\left[x,y,y'\right]\cdot dx$ apresenta um extremo *fraco*.

A Equação de Euler: $\boxed{\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0}$ estabelece uma condição necessária para que $J\left[y(x)\right]$ apresente um extremo em $y(x)$

Casos Particulares:

1-) $F\left[x,y,y'\right]$ não depende explicitamente de *y*, isto é: $F\left[x,y,y'\right]=F\left[x,y'\right]$, desse modo: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$; $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=g(x,y')=C$ que é uma EDO de primeira ordem que não depende explicitamente de *y*;

2-) $F\left[x,y,y'\right]$ não depende explicitamente de *x*, isto é: $F\left[x,y,y'\right]=F\left[y,y'\right]$, assim:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}\right)\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'}\right)\cdot\frac{dy'}{dx}=\frac{\partial^2 F(y,y')}{\partial y\partial y'}\cdot y'+\frac{\partial^2 F(y,y')}{\partial y'^2}\cdot y''$$, obtendo-se:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\right)y'-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right)y''=0$$, multiplicando essa última equação por y' obtém-se:

$$y'\frac{\partial F}{\partial y}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\right)(y')^2-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right)y'y''=\frac{d}{dx}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y}\right)=0 \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}-F=C$$ que é uma EDO de primeira ordem na variável *y*.

3-) $F\left[x,y,y'\right]$ não depende explicitamente de y', isto é: $F\left[x,y,y'\right]=F\left[x,y\right]$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$, assim

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y'}\right)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=g(x,y)=0$$ que é uma função algébrica em duas variáveis.

4-) $F\left[x,y,y'\right]=f(x,y)\cdot\sqrt{1+(y')^2} \Rightarrow F\left[x,y,y'\right]\cdot dx=f(x,y)\cdot\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=f(x,y)\cdot ds$, nesse caso obtêm-se:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}\sqrt{1+(y')^2}=f_y\sqrt{1+(y')^2}$$;

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{(f_x+y'\cdot f_y)\cdot y'}{\sqrt{1+(y')^2}}+f\left(\frac{\sqrt{1+(y')^2}-\dfrac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}}{1+(y')^2}\right)y''=\frac{(f_x+y'\cdot f_y)\cdot y'}{\sqrt{1+(y')^2}}+f\left(\frac{1}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}\right)y''$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=f_y\sqrt{1+(y')^2}-\frac{(f_x+y'\cdot f_y)\cdot y'}{\sqrt{1+(y')^2}}-\frac{f\cdot y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}\left[f_y-f_x\cdot y'-\frac{f\cdot y''}{1+(y')^2}\right]=0$$

Ou seja: $f_y-f_x\cdot y'-\dfrac{f\cdot y''}{1+(y')^2}=0$ que é uma EDO de segunda ordem na variável *y*.

O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Tempo que leva um sólido de massa m para ir de um ponto A $\left(0, h_{inicial}\right)$ a um ponto B $\left(L, h_{final}\right)$, sendo $0 < h_{final} < h_{inicial}$ apenas sob a ação da gravidade, partindo do repouso. Assim: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dt} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \dfrac{dx}{dt}$, da conservação da energia:

$\dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot \left(h_{inicial} - h\right) = m \cdot g \cdot y \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot y}$, logo: $\dfrac{\sqrt{2 \cdot g}}{L} \cdot dt = d\tau = \sqrt{\dfrac{1 + \left[y'(x)\right]^2}{y(x)}} \cdot dx$.

Resultando na busca do mínimo de: $T = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{\dfrac{1 + \left[y'(x)\right]^2}{y(x)}} \cdot dx$ com as condições de contorno:

em x=0 tem-se y=0;

em x=1 $\begin{cases} y(1) = h_{inicial} - h_{final} = y_{final} \geq 0 \text{ extremidade fixa} \\[2ex] \left.\dfrac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1} = 0 \text{ extremidade livre} \end{cases}$

Identificando: $F\left[y, y'\right] = \sqrt{\dfrac{1 + \left(y'(x)\right)^2}{y(x)}}$ que não depende explicitamente de <u>x</u> (caso 2), assim a equação de Euler apresenta a forma: $F - \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial y'} = c_0$.

Sendo: $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{y \cdot \left[1 + (y')^2\right]}}$ que pode ser reescrita na forma:

$\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{dy}{dx} \dfrac{F}{1 + (y')^2} = \dfrac{dy}{dx} \dfrac{F}{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, assim: $F - \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial y'} = F \cdot \left[1 - \dfrac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\right] = \dfrac{F}{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = c_0$,

mas: $\dfrac{F}{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{y \cdot \left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}} = c_0 \Rightarrow c_0 \cdot \sqrt{y \cdot \left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]} = 1$, elevando ao quadrado ambos os membros da expressão acima, tem-se:

$c_0^2 \cdot y \cdot \left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] = 1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{1 - c_0^2 \cdot y}{c_0^2 \cdot y}} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{c_0^2 \cdot y}{1 - c_0^2 \cdot y}} dy = dx$, integrando membro a membro de x=0 a $x > 0$, tem-se: $\sqrt{\dfrac{y}{c_0^2} - y^2} - \dfrac{1}{2 \cdot c_0^2} \left[\text{arcsen}\left(2 \cdot c_0^2 \cdot y - 1\right)\right]_{y=0}^{y(x)} = x$,ou seja:

$\sqrt{\dfrac{y}{c_0^2} - y^2} - \dfrac{1}{2 \cdot c_0^2} \left[\text{arcsen}\left(2 \cdot c_0^2 \cdot y - 1\right) + \dfrac{\pi}{2}\right] = x$, adotando:

$\theta = -\left[\text{arcsen}\left(2 \cdot c_0^2 \cdot y - 1\right) + \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(\theta) = 1 - 2 \cdot c_0^2 \cdot y$ e $\text{sen}(\theta) = -2 \cdot c_0^2 \sqrt{\dfrac{y}{c_0^2} - y^2}$, obtêm-se:

$\begin{cases} x(\theta) = r \cdot [\theta - \text{sen}(\theta)] \\ y(\theta) = r \cdot [1 - \cos(\theta)] \end{cases}$, em que: $r = \dfrac{1}{2 \cdot c_0^2}$

Note que em x=0 e y=0 tem-se: $\theta = \theta_0 = 0$

Primeiro Problema: extremidade final fixa, isto é: $y(1)=y_{final}$ para determinar o valor de r e de θ_f , deve-se resolver o sistema de equações:

$\begin{cases} 1 = r \cdot [\theta_f - \text{sen}(\theta_f)] \\ y_{final} = r \cdot [1 - \cos(\theta_f)] \end{cases} \Rightarrow [1 - \cos(\theta_f)] - y_{final} \cdot [\theta_f - \text{sen}(\theta_f)] = 0$ com $\theta_f > 0$, após a determinação de θ_f, deve-se calcular r segundo: $r = \dfrac{1}{[\theta_f - \text{sen}(\theta_f)]}$ · e o valor de T_{min}, pode ser então calculado tendo em vista:

$$\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} \cdot dx = \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right]} \cdot d\theta = r \cdot \sqrt{[1 - \cos(\theta)]^2 + [\text{sen}(\theta)]^2} \cdot d\theta = ,$$

$$= r \cdot \sqrt{2 \cdot [1 - \cos(\theta)]} \cdot d\theta = \sqrt{2 \cdot r \cdot y(\theta)} \cdot d\theta \Rightarrow F\|y, y'\| dx = \sqrt{2 \cdot r} \cdot d\theta$$

Resultando em: $T_{\min} = \sqrt{2 \cdot r} \cdot \theta_f$

Segundo Problema: extremidade final livre, isto é: $\left.\dfrac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1} = 0$, para determinar o valor de r e θ_f, deve-se resolver o sistema de equações:

$$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} \cdot \left.\frac{dy(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta_f} = \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=1} \cdot r \cdot \text{sen}(\theta_f) = 0 \Rightarrow \theta_f = \pi \text{ ; } r = \frac{1}{[\theta_f - sen(\theta_f)]} = \frac{1}{\pi} \cdot \text{ ;}$$

$$y_{final} = r \cdot [1 - \cos(\theta_f)] = \frac{2}{\pi} \text{ e } T_{\min} = \sqrt{2 \cdot r} \cdot \theta_f = \sqrt{2 \cdot \pi}$$

POR QUADRATURA DE GAUSS-RADAU

Buscar o mínimo de: $T = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x)}} \cdot dx$ com as condições de contorno:

em x=0 , y=0;

em x=1 $\begin{cases} y(1) = y_{final} \geq 0 \text{ extremidade fixa} \\ \left.\dfrac{dy(x)}{dx}\right|_{x=1} = 0 \text{ extremidade livre} \end{cases}$

Adotando na integral acima a mudança de variável dependente:

$$y(x) = x \cdot u(x) \Rightarrow y'(x) = x \cdot u'(x) + u(x) \Rightarrow \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x)}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1 + (x \cdot u'(x) + u(x))^2}{u(x)}} \cdot dx \text{ , assim:}$$

$T = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1 + (x \cdot u'(x) + u(x))^2}{u(x)}} \cdot dx \cong \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j \cdot \sqrt{\frac{1 + (x_j \cdot u'(x_j) + u_j)^2}{u_j}}$ (por quadratura de Gauss-Radau), em que: $u(x) \cong u^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} l_j(x) \cdot u_j$, $u_{n+1} = y_{final}$ e $u'(x_j) \cong \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} A_{j,k} \cdot u_k$,

x_j são as raízes de $P_n^{\left(1,-\frac{1}{2}\right)}(x)$ e $\omega_j = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{\sqrt{x}} l_j(x) \cdot dx$.

Ou seja: $T(\boldsymbol{u}) \cong \sum_{j=1}^{n+1} \omega_j \cdot \sqrt{\frac{1+\left(x_j \cdot u'_j + u_j\right)^2}{u_j}}$ em que $u'_j = \sum_{k=1}^{n+1} A_{j,k} \cdot u_k$

Assim o problema transforma-se em determinar os valores de u_j para $j = 1, \cdots, n$ com $u_{n+1} = y_{final}$ se a extremidade final for fixa, ou determinar os valores de u_j para $j = 1, \cdots, n+1$ se a extremidade final for livre, que minimizam a função algébrica $T(\boldsymbol{u})$.