



ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA DO MODELO ASM1 PARA O PROCESSO BIOLÓGICO DE LODOS ATIVADOS

B. L. NOGUEIRA¹, E. C. BISCAIA Jr¹ e A. R. SECCHI¹

¹Universidade Federal do Rio de Janeiro, PEQ/COPPE
E-mail para contato: bnogueira@peq.coppe.ufrj.br

RESUMO – O processo de lodos ativados é o tratamento secundário mais difundido em estações de tratamento de efluentes e se caracteriza por ser bastante robusto e adaptável a variações na carga. A família de modelos ASM (*Activated Sludge Model*) relatada pelo IWA – *International Water Association* - descreve o processo de lodos ativados. O modelo ASM1 apresenta os processos de degradação de matéria orgânica e de compostos nitrogenados pelos microrganismos, relacionando essas taxas ao consumo de oxigênio e nitrato e à produção de lodo. A análise de sensibilidade paramétrica nos permite identificar a influência dos parâmetros nas variáveis e assim gerar informações importantes para o desenvolvimento do modelo e otimização do processo. Deste modo, foi realizada neste trabalho a análise de sensibilidade paramétrica para alguns parâmetros deste modelo via duas técnicas distintas, uma por perturbação numérica e outra via integração numérica. A técnica utilizando integração numérica mostrou maior precisão e menor esforço computacional, enquanto que a técnica utilizando perturbação numérica apresentou alta dependência com o valor da perturbação e, assim, sujeito a erros bastante elevados.

1. INTRODUÇÃO

O processo de lodos ativados é um tratamento biológico para efluentes domésticos e industriais que se destaca por ser robusto e adaptável à variabilidade do efluente. Devido a seu difundido uso, este é considerado o processo biológico convencional de uma unidade de tratamento de efluentes. Este tratamento é constituído basicamente de um tanque de aeração e de um sedimentador. O afluente ao entrar no processo passa pelo tanque de aeração onde a matéria orgânica e a nitrogenada são degradadas pelos microrganismos que se encontram em suspensão. Logo após, o efluente passa por um sedimentador para que se possa realizar a sua separação dos microrganismos. Uma porção do lodo é descartada enquanto que a outra parte retorna ao reator a fim de manter uma alta concentração dos microrganismos no tanque de aeração e assim atingir melhores níveis de rendimento do processo.

O modelo *Activated Sludge Model* N° 1, ASM1 descrito em Henze *et al.* (2000) é considerado um modelo padrão do processo de lodos ativados, sendo bastante utilizado na indústria e na academia. Este modelo descreve as taxas de remoção de substâncias orgânicas e de compostos nitrogenados pelos microrganismos, relacionando essas taxas ao consumo de oxigênio e de nitrato e à produção de lodo.

Segundo os trabalhos de Maly e Petzold (1996), Petzold *et al.* (2006) e Levy (2007) a análise de sensibilidade paramétrica dos modelo é de grande importância, uma vez que nos permite a identificação dos principais parâmetros e dos seus respectivos efeitos sobre o processo. Ela gera informações essenciais para o desenvolvimento do modelo, otimização do projeto, estimação de parâmetros, controle ótimo, redução de modelo e projeto experimental. Conseqüentemente, os algoritmos que realizam este tipo de análise de uma maneira eficiente e rápida são de valor inestimável para pesquisas em muitos campos.

Neste trabalho, foi desenvolvida a análise de sensibilidade para o modelo ASM1 por duas técnicas distintas. Na primeira, os coeficientes de sensibilidade, que mostram o quanto o modelo é sensível às variações do parâmetro, são calculados por perturbação numérica, consistindo na aproximação das derivadas por diferenças finitas. Na segunda, os coeficientes são determinados por procedimento de integração numérica de maneira simultânea à simulação do modelo.

2. ASM1 – ACTIVATED SLUDGE MODEL N°1

O modelo ASM1 foi desenvolvido pela IWA – *International Water Association*. A unidade de medida escolhida para o desenvolvimento do modelo foi a DQO, pois esta fornece uma associação útil entre o substrato orgânico, a concentração de biomassa e o consumo de oxigênio, e, além disto, os balanços de massa podem ser realizados nesta unidade.

A matéria orgânica do efluente é classificada de acordo com sua biodegradabilidade e solubilidade. As substâncias não-biodegradáveis são denominadas inertes, e estas podem estar tanto na forma particuladas quanto solúveis no efluente. O substrato prontamente biodegradável é considerado como solúvel enquanto que o lentamente biodegradável é tratado como se fosse particulado.

Os microrganismos foram classificados em dois grupos: heterotróficos e autotróficos. Os heterotróficos são os responsáveis pelo consumo da matéria orgânica prontamente biodegradável, enquanto que os autotróficos pelo consumo de amônio. O decaimento da biomassa gera substrato lentamente biodegradável e produtos particulados, que são inertes à ação microbiana.

Os compostos nitrogenados foram divididos em biodegradáveis e não-biodegradáveis. Estes últimos estão associados à matéria orgânica não-biodegradável. Já a fração biodegradável pode ser classificada em amônio, nitrato, nitrogênio orgânico solúvel e nitrogênio orgânico particulado. O nitrogênio orgânico particulado sofre hidrólise juntamente com o material orgânico lentamente biodegradável enquanto que o nitrogênio orgânico solúvel é convertido a amônio pelas bactérias heterotróficas. Foi desprezada a presença de nitrito neste modelo, de modo que a nitrificação foi considerada apenas em uma etapa, ou seja, uma conversão direta de amônio para nitrato.

Desta maneira, todos os processos descritos no modelo podem ser sumarizados e representados pelas suas taxas que estão descritas na Tabela 1.



Tabela 1 – Processos que compõem o modelo ASM1

Processo	Taxa do processo, P_i ($\text{ML}^{-3}\text{T}^{-1}$)
P1: Crescimento aeróbio dos heterotróficos	$\mu_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) X_{B,H}$ (1)
P2: Crescimento anóxico dos heterotróficos	$\mu_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{B,H}$ (2)
P3: Crescimento aeróbio dos autotróficos	$\mu_A \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A}$ (3)
P4: Decaimento dos heterotróficos	$b_H X_{B,H}$ (4)
P5: Decaimento dos autotróficos	$b_A X_{B,A}$ (5)
P6: Amonificação do nitrogênio solúvel	$k_A S_{ND} X_{B,H}$ (6)
P7: Hidrólise do material orgânico particulado	$\left[\left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + k \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right] \frac{X_S}{X_{B,H}} \times K_h \frac{X_S / X_{B,H}}{K_X + X_S / X_{B,H}} X_{B,H}$ (7)
P8: Hidrólise dos compostos orgânicos nitrogenados particulados	$P7 \left(\frac{X_{ND}}{X_S} \right)$ (8)

Assim, a partir destes processos podem ser representadas com o uso de parâmetros estequiométricos as taxas de reação das substâncias envolvidas no modelo. A Tabela 2 apresenta as taxas de todos os componentes envolvidos no modelo ASM1.

Tabela 2 – Taxas reacionais das substâncias envolvidas no modelo ASM1

Substância	Taxa reacional (R_i)
Matéria Orgânica solúvel (S_S)	$-\frac{1}{Y_H} P1 - \frac{1}{Y_H} P2 + P7$ (9)
Matéria Orgânica Particulada (X_S)	$(1 - f_p)(P4 + P5) - P7$ (10)
Biomassa Heterotrófica ($X_{B,H}$)	$P1 + P2 - P4$ (11)
Biomassa Autotrófica ($X_{B,A}$)	$P3 - P5$ (12)
Produtos Particulados (X_P)	$f_p(P4 + P5)$ (13)
Oxigênio Dissolvido (S_O)	$-\frac{1 - Y_H}{Y_H} P1 - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A} P3$ (14)
Nitrato (S_{NO})	$-\frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} P2 + \frac{1}{Y_A} P3$ (15)
Amônio (S_{NH})	$-i_{XB}(P1 + P2) - \left(\frac{1}{Y_A} + i_{XB} \right) P3 + P6$ (16)
Compostos orgânicos nitrogenados solúveis (S_{ND})	$-P6 + P8$ (17)
Compostos orgânicos nitrogenados solúveis (X_{ND})	$(i_{XB} - f_p i_{XP})(P4 + P5) - P8$ (18)



3. MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático utilizado neste trabalho parte de algumas considerações. Primeiramente, as reações biológicas ocorrem apenas no tanque de aeração, ou seja, não continuam a ocorrer no sedimentador. O tanque de aeração é considerado bem misturado e perfeitamente aerado, de forma que não há zonas anóxicas no mesmo. O sedimentador foi tratado como um separador ideal.

Desta maneira a Equação 19 descreve o balanço de massa utilizado no tanque de aeração.

$$\frac{1}{\tau_{ras}} \cdot C_{ent,i} + \frac{r}{\tau_{ras}} \cdot C_{rec,i} - \frac{1}{\tau_{ras}} \cdot (1+r) \cdot C_i + R_i = \frac{dC_i}{dt} \quad (19)$$

O balanço de massa no sedimentador é representado pelas Equações 20 e 21.

$$C_{rec,i} = \left[\frac{1+r}{k_i+r} \right] \cdot C_i \quad (20)$$

$$C_{saida,i} = k_i \left[\frac{1+r}{k_i+r} \right] \cdot C_i \quad (21)$$

onde o índice i representa as espécies químicas, k_i é o fator de separação, quanto maior o valor de k_i maior é a quantidade da substância que sai do sistema e r é a razão de reciclo.

Devido à diferença na ordem de grandeza das diversas variáveis descritas no modelo, as mesmas foram adimensionadas. Deste modo, pode-se realizar uma melhor análise dos resultados e verificar quais variáveis sofrem maior ou menor influência de cada parâmetro. O adimensionamento realizado está descrito nas Equações 22 a 30.

$$y_{S_S} = \frac{C_{SS}}{C_{ent,ss}} \quad (22)$$

$$y_{X_S} = \frac{3 \cdot C_{X_S}}{(1-f_p)(b_H Y_H C_{ent,ss} + b_A Y_A C_{ent,snh})} \quad (23)$$

$$y_{X_{B,H}} = \frac{C_{X_{B,H}}}{Y_H C_{ent,ss}} \quad (24)$$

$$y_{X_{B,A}} = \frac{C_{X_{B,A}}}{Y_A C_{ent,snh}} \quad (25)$$

$$y_{X_P} = \frac{C_{X_P}}{f_p(b_H Y_H C_{ent,ss} + b_A Y_A C_{ent,snh})} \quad (26)$$

$$y_{S_{NO}} = \frac{C_{S_{NO}}}{Y_A C_{ent,snh}} \quad (27)$$

$$y_{S_{NH}} = \frac{C_{S_{NH}}}{C_{ent,snh}} \quad (28)$$

$$y_{S_{ND}} = \frac{C_{S_{ND}}}{(i_{X_B} - f_p i_{X_P})(b_H Y_H C_{ent,ss} + b_A Y_A C_{ent,snh})} \quad (29)$$

$$y_{X_{ND}} = \frac{3 \cdot C_{X_{ND}}}{(i_{X_B} - f_p i_{X_P})(b_H Y_H C_{ent,ss} + b_A Y_A C_{ent,snh})} \quad (30)$$



4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

4.1. Sensibilidade Via Perturbação Numérica

O cálculo dos coeficientes de sensibilidade por perturbação numérica consiste em aproximar a derivada das variáveis em relação aos parâmetros por diferenças finitas, conforme a Equação 31.

$$S_i = \frac{\partial y}{\partial p_i} \simeq \frac{\Delta y}{\Delta p_i} \quad (31)$$

Para realizar este cálculo é necessário inserir uma perturbação (ε) no parâmetro e realizar a simulação verificando o comportamento da variável para este novo valor do parâmetro.

Quando esta aproximação da derivada é realizada por diferenças centrais a simulação deve ser realizada com a adição e subtração desta perturbação. Assim, é necessária a simulação do modelo com esses dois valores de parâmetros. E o coeficiente de sensibilidade (s) é calculado de acordo com a Equação 32.

$$S_i \simeq \frac{y(p_i+\varepsilon)-y(p_i-\varepsilon)}{(p_i+\varepsilon)-(p_i-\varepsilon)} = \frac{y(p_i+\varepsilon)-y(p_i-\varepsilon)}{2 \cdot \varepsilon} \quad (32)$$

Este método pode ser utilizado quando a derivada da função não está disponível. No entanto, este método é bastante dependente do valor da perturbação podendo haver perdas em de informação caso esta perturbação seja muito elevada. Caso a perturbação seja muito pequena pode ocorrer das variáveis não serem afetadas pela mesma.

Deste modo, existem diversos critérios para selecionar a perturbação necessária para os parâmetros de modo a evitar tais erros. Assim, Maly e Petzold (1996) sugerem um critério baseado diretamente na grandeza do parâmetro. Critério este descrito na Equação 33, onde u é o erro de arredondamento da máquina.

$$\varepsilon_i = \sqrt{u} \cdot |p_i| \quad (33)$$

4.2. Sensibilidade Via Integração Numérica

Os coeficientes de sensibilidade também podem ser obtidos a partir da integração numérica de equações de sensibilidade resolvidas simultaneamente com o modelo.

Considere um sistema genérico de equações algébrico-diferenciais.

$$F(t, y, y', p) = 0, \quad y(0) = y_0 \quad (34)$$

Diferenciando o sistema acima em relação aos n_p parâmetros do modelo surge um sistema de equações adicionais de dimensão $n_s = n \times n_p$, que são as equações de sensibilidade.



$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad (35)$$

onde

$$s_i = \frac{\partial y}{\partial p_i} \quad (36)$$

$$s'_i = \frac{\partial y'}{\partial p_i} \quad (37)$$

Chegando-se, assim, nas seguintes equações de sensibilidade.

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot s_i + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot s'_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n_p \quad (38)$$

Dessa forma, o sistema a ser calculado apresenta a dimensão $n + n_s$. As matrizes jacobianas presentes nas equações de sensibilidade podem ser obtidas por diferenciação simbólica ou automática da Equação (34). Com o uso de tais informações o esforço e o tempo computacionais podem ser reduzidos, além de a análise ser mais precisa podendo detectar variações bruscas das derivadas.

6. SIMULAÇÕES

O modelo que é composto de equações algébrico-diferenciais foi implementado no software EMSO utilizando o integrador DASSLC para a resolução numérica do sistema, com tolerâncias relativa e absoluta de 10^{-6} e 10^{-8} , respectivamente.

Os valores dos parâmetros utilizados para a resolução deste sistema são referentes aos encontrados na publicação de Henze *et al.* (2000) a 20°C e estão relatados na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros do modelo ASM1 utilizados na simulação

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
μ_H	6,0	dia ⁻¹	k_A	0,08	m ³ /(g.dia)
K_S	20,0	gDQO/m ³	K_h	3,0	g DQO/(g DQO.dia)
$K_{O,H}$	0,2	g O ₂ /m ³	K_X	0,03	g DQO/g DQO
μ_A	0,8	dia ⁻¹	Y_H	0,67	g DQO/g DQO
K_{NH}	1,0	g NH ₃ -N/m ³	f_p	0,08	Adimensional
$K_{O,A}$	0,4	g O ₂ /m ³	Y_A	0,24	g DQO/g N
b_H	0,62	dia ⁻¹	i_{XB}	0,086	g N/g DQO
b_A	0,1	dia ⁻¹	i_{XP}	0,08	g N/g DQO

Os demais parâmetros usados na simulação, que são a concentração de oxigênio, as concentrações de alimentação, a taxa de reciclo, tempo de residência e as eficiências de separação estão na Tabela 4.



Tabela 4 – Parâmetros do processo utilizados na simulação

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
τ_{res}	0,25	dia	$C_{ent,Xbh}$	9,37	g DQO/m ³
r	0,5	Adimensional	$C_{ent,Xba}$	4	g DQO/m ³
k_i^*	1	Adimensional	$C_{ent,Xp}$	5	g DQO/m ³
S_0	8	g/m ³	$C_{ent,Snh}$	30	g N/m ³
$C_{ent,SS}$	765	g DQO/m ³	$C_{ent,Snd}$	15	g N/m ³
$C_{ent,Xs}$	85	g DQO/m ³	$C_{ent,Sno}$	2	g N/m ³

*exceto para biomassa que o valor é 0,6.

A análise de sensibilidade neste trabalho foi realizada apenas para alguns parâmetros, que são μ_H , μ_A , K_s e Y_H , o que possibilitou a verificação de suas influências nas variáveis do modelo. Para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade, utilizando tanto a técnica por diferenças finitas quanto a técnica por integração numérica, os valores dos parâmetros estão descritos nas Tabelas 3 e 4.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A simulação do modelo foi realizada no software EMSO até um tempo final de 3 dias, onde já é possível verificar o estabelecimento de um estado estacionário. A análise de sensibilidade foi realizada por ambas as técnicas, integração e perturbação numérica.

O critério de seleção da perturbação descrito na Equação 33 mostrou-se bastante adequado para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade dos parâmetros avaliados do modelo. Este fato foi observado devido às respostas utilizando ambas as técnicas resultarem em valores com diferença absoluta inferiores a 10^{-5} .

Para efetuar a análise de sensibilidade dos parâmetros, o tempo médio de simulação usando a técnica via perturbação numérica foi de 0,407s, enquanto que para a técnica via integração numérica o tempo médio foi de 0,146s. O que evidencia o maior esforço computacional com o uso da primeira técnica para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade.

A análise de sensibilidade do parâmetro μ_H – máxima taxa de crescimento específico da biomassa heterotrófica – mostrou que este parâmetro altera apenas a velocidade do processo de degradação da matéria orgânica sem modificar significativamente o estado estacionário final. Na Figura 1-a, observa-se a sensibilidade da matéria orgânica solúvel e da biomassa heterotrófica em relação ao parâmetro μ_H . Nesta figura, verifica-se que há um aumento do consumo de matéria orgânica e um crescimento acelerado da biomassa heterotrófica na fase transiente do modelo, mas que não interferem no estado estacionário final como pode ser observado com os coeficientes de sensibilidade tendendo a zero.

Assim como o parâmetro μ_H , a análise de sensibilidade do parâmetro μ_A – máxima taxa de crescimento específico da biomassa autotrófica – revela que o parâmetro exerce maior influência na velocidade dos processos e altera pouco o estado estacionário final do sistema. Na Figura 1-b, observa-se a sensibilidade do amônio e da biomassa autotrófica em relação ao



parâmetro μ_A . O que se pode verificar é que há um aumento do consumo de amônio e da quantidade de biomassa autotrófica na fase transiente, enquanto que no estado estacionário pouca alteração é observada.

O parâmetro K_S – coeficiente de saturação para organismos heterotróficos – apresentou pouca influência nas variáveis do modelo tanto na fase transiente como na estacionária, sendo que os coeficientes de sensibilidade na ultrapassam o valor 10^{-2} . Na Figura 1-c observa-se a sensibilidade da matéria orgânica solúvel e da biomassa heterotrófica em relação ao parâmetro K_S . Nota-se através desta os baixos valores dos coeficientes de sensibilidade e a pouca influência exercida por esse parâmetro no modelo.

Diferente dos parâmetros analisados anteriormente, o parâmetro Y_H – rendimento heterotrófico – apresenta influência significativa nas variáveis do modelo tanto na fase transiente como na estacionária. Na Figura 1-d, observa-se a sensibilidade da matéria orgânica solúvel e da biomassa heterotrófica em relação ao parâmetro Y_H . Observe que devido ao maior aproveitamento do consumo da matéria orgânica para o crescimento dos microrganismos há um aumento da concentração da primeira durante a fase transiente que, porém, não é alterada no estado estacionário. Observa-se também que este maior aproveitamento torna a quantidade de microrganismos heterotróficos mais elevada, modificando o estado estacionário final do sistema.

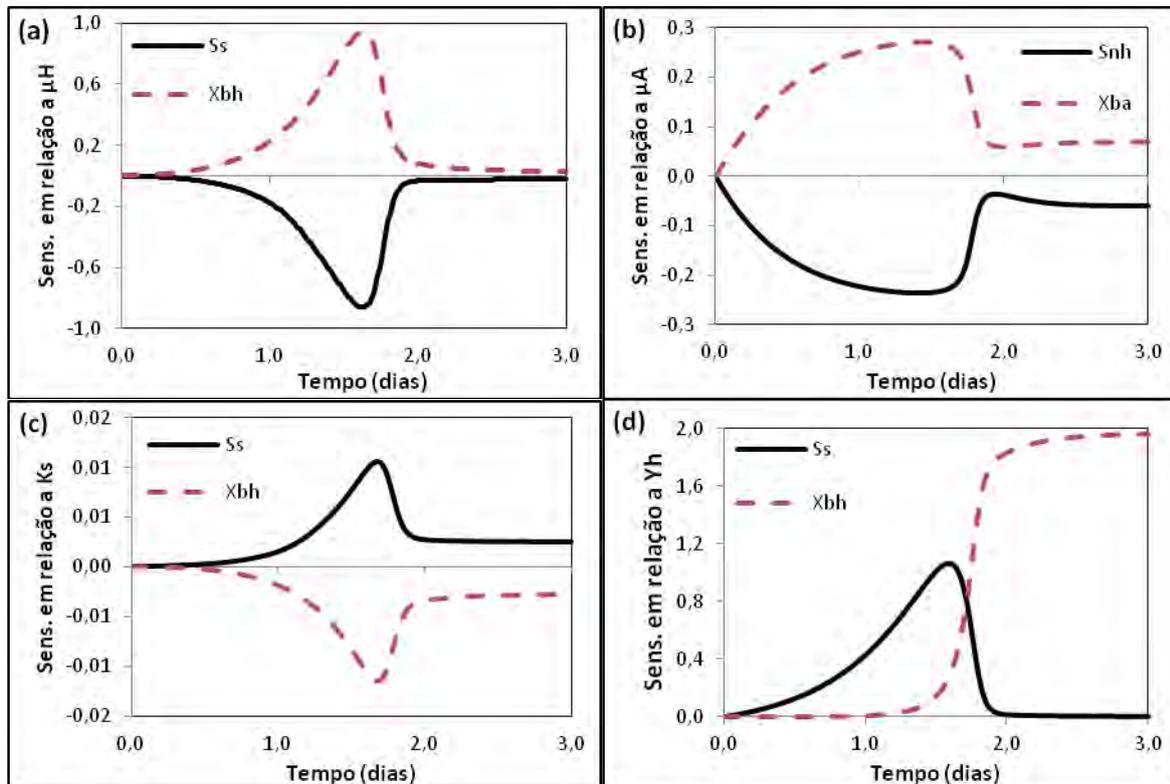


Figura 1 – Sensibilidade em relação aos parâmetros μ_H (a), μ_A (b), K_S (c) e Y_H (d).

A fim de ilustrar a necessidade de uma perturbação adequada na técnica de perturbação numérica foi realizada a análise de sensibilidade para alguns valores distintos de perturbação e observada a resposta. Na Figura 2-a podem-se observar os valores dos coeficientes de sensibilidade do amônio em relação ao parâmetro K_S calculados a partir de diferentes perturbações incluindo a descrita pela Equação 33, que para este parâmetro é 2×10^{-7} , além dos resultados obtidos através da técnica via integração numérica. Nota-se que valores elevados de perturbação não conseguem detectar corretamente as variações nos coeficientes de sensibilidade e que valores de perturbação muito pequenos não conseguem capturar as modificações nas respostas das variáveis com a variação do parâmetro. Deste modo, o uso inadequado dos valores de perturbação acarretam erros e dão margem a interpretações distorcidas da análise de sensibilidade.

Na Figura 2-b é apresentado o desvio do valor do coeficiente de sensibilidade do amônio em relação ao parâmetro K_S calculado para diversas perturbações em relação ao valor deste calculado pela técnica de integração numérica. Nesta figura, está apresentado o logaritmo da perturbação para a melhor visualização do comportamento do desvio. O tempo escolhido para calcular o desvio foi de 1,82 dias que equivale ao momento onde o coeficiente de sensibilidade atinge seu valor máximo. Note que este desvio torna-se maior tanto para valores de perturbação pequenos quanto grandes, o que realça a necessidade da escolha adequada da perturbação para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade.

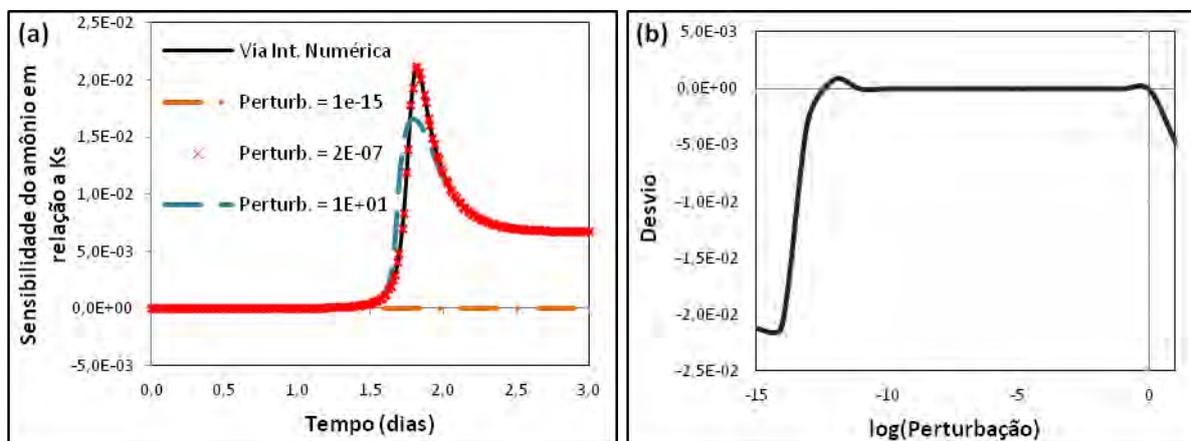


Figura 2 – Influência da perturbação para a análise de sensibilidade.

8. CONCLUSÕES

O modelo ASM1 do processo de lodos ativados foi implementado no simulador EMSO e realizada a análise de sensibilidade para os parâmetros μ_H , μ_A , K_S e Y_H por duas técnicas distintas. Uma técnica via perturbação numérica e outra via integração numérica das equações do sistema.

Observou-se com a análise de sensibilidade que os parâmetros μ_H e μ_A exercem influência na parte transiente do modelo, não modificando muito o estado estacionário final.

Já o parâmetro K_S não apresentou grandes influências enquanto que a sensibilidade em relação ao parâmetro Y_H representou grande importância para o valor final das variáveis.

Verificou-se nas simulações que ambas as técnicas apresentaram resultados semelhantes para os coeficientes de sensibilidade. Porém, sabe-se que a técnica via integração numérica apresenta uma maior precisão na resposta, conseguindo detectar grandes variações dos coeficientes de sensibilidade, além de proporcionar menor custo computacional. Para a técnica de perturbação, esta resposta está completamente relacionada ao critério utilizado para a seleção da perturbação nos parâmetros. Verificou-se a influência do valor da perturbação utilizado na técnica via diferenças finitas observando que tanto valores elevados como pequenos podem acarretar grandes erros no cálculo dos coeficientes de sensibilidade.

9. REFERÊNCIAS

MALY, T.; PETZOLD, L. Numerical Methods and software for sensitivity analysis of differential-algebraic systems. *Applied Numerical Mathematics*, v. 20, pp. 57-79, 1996.

HENZE, M.; GUJER, W.; MINO, T.; LOOSDRECHT, MCM. Activated sludge models ASM1, ASM2, ASM2d, e ASM3. *Scientific an technical report No. 9, IWA Publishing*, London, UK. 2000.

PETZOLD, L.; LI, S.; CAO, Y.; SERBAN, R. Sensitivity analysis of differential-algebraic equations and partial differential equations. *Computers and Chemical Engineering*, v. 30, pp. 1553-1559, 2006.

LEVY, A.L.L. Modelagem e análise de sensibilidade do processo de tratamento de lodo ativado com reciclo. *Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.