
Lista de exercícios (Capítulo 4)

1) Em dois reatores tanque de mistura perfeita é conduzida a reação em fase líquida: $A+B \rightarrow C+D$ de forma isotérmica. Os balanços estacionários de massa do reagente A neste sistema são descritos pelas equações algébricas:

$$\text{Primeiro reator: } k \cdot C_1^2 = \frac{q}{V} \cdot [C_0 - C_1]$$

$$\text{Segundo reator: } k \cdot C_2^2 = \frac{q}{V} \cdot [C_1 - C_2]$$

Onde k : constante de velocidade da reação = 0,075 L/mol/min;

q : vazão volumétrica de alimentação do sistema = 30 L/min;

V : volume dos reatores (L)

C_0 : concentração de A na alimentação do sistema = 1,6 mol/L;

C_1 : concentração de A na saída do primeiro reator [mol/L];

C_2 : concentração de A na saída do segundo reator [mol/L].

Calcule o volume dos reatores sabendo-se que a conversão global de A é igual a 80%. Generalize seus resultados para n reatores iguais em série e compare o volume de um PFR que conduz à mesma conversão.

Adotando-se as seguintes variáveis e parâmetro adimensionais:

$$y_i = \frac{C_i}{C_0} \text{ para } i=0, 1, \dots, n \text{ e } \alpha = \frac{k \cdot C_0 \cdot V}{q}$$

$$[\text{note que : } y_n = \frac{C_n}{C_0} = \frac{C_0 \cdot (1-X)}{C_0} = 1-X = 1-0,8 = 0,2 \text{ e } y_0 = \frac{C_0}{C_0} \equiv 1]$$

Tem-se:

$$\text{Primeiro reator: } \alpha \cdot y_1^2 = y_0 - y_1 \Rightarrow y_0 = y_1 \cdot (1 + \alpha \cdot y_1)$$

$$\text{Segundo reator: } \alpha \cdot y_2^2 = y_1 - y_2 \Rightarrow y_1 = y_2 \cdot (1 + \alpha \cdot y_2)$$

.....

$$i\text{-ésimo reator: } \alpha \cdot y_i^2 = y_{i-1} - y_i \Rightarrow y_{i-1} = y_i \cdot (1 + \alpha \cdot y_i)$$

.....

$$n\text{-ésimo reator: } \alpha \cdot y_n^2 = y_{n-1} - y_n \Rightarrow y_{n-1} = y_n \cdot (1 + \alpha \cdot y_n)$$

Para expressar y_i em função de y_{i-1} resolve-se: $y_{i-1} = y_i \cdot (1 + \alpha \cdot y_i) \Rightarrow \alpha \cdot y_i^2 + y_i - y_{i-1} = 0$

Assim, a única raiz com significado físico é: $y_i = \frac{\sqrt{1+4 \cdot \alpha \cdot y_{i-1}} - 1}{2 \cdot \alpha}$, para evitar a indeterminação que ocorre quando $\alpha \rightarrow 0$, multiplicam-se o numerador e denominador da expressão por: $\sqrt{1+4 \cdot \alpha \cdot y_{i-1}} + 1$, resultando em:

$$y_i = \frac{2}{\sqrt{1+4 \cdot \alpha \cdot y_{i-1}} + 1} \cdot y_{i-1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \text{ com } y_0 = 1.$$

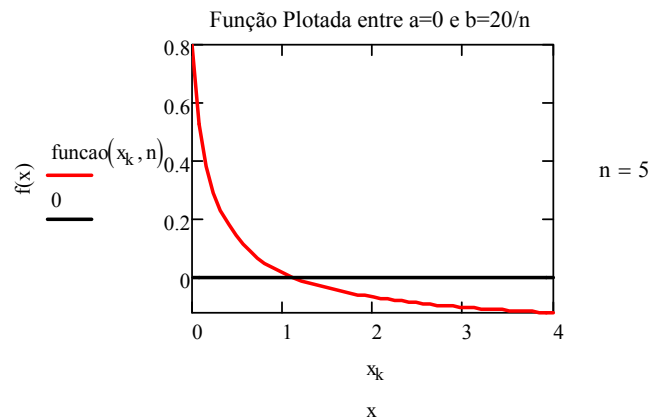
Deseja-se calcular o valor de α que conduz a: $y_n = 0,2$, assim, deve-se calcular a raiz da função: $f(\alpha) = y_n(\alpha) - 0,2$.

Com $\alpha = 0$, tem-se $y_n = \dots = y_1 = y_0 = 1 \Rightarrow f(\alpha)|_{\alpha=0} = 0,8$

Com $n=1$, ter-se-ia: $\alpha \cdot 0,2^2 + 0,2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 20$ (apenas 1 reator!), com $n > 1$ seguramente para $\alpha = \frac{20}{n}$ tem-se uma conversão maior que 80%, isto é: $y_n < 0,2 \Rightarrow f(\alpha)|_{\alpha=\frac{20}{n}} < 0$.

Deste modo, procura-se o valor de α no intervalo: $0 < \alpha < \frac{20}{n}$.

Na figura abaixo, plota-se a função $f(\alpha)$ contra α para $n=5$.



Para calcular a derivada de $f(\alpha)$ define-se a variável: $v_i(\alpha) = \frac{dy_i(\alpha)}{d\alpha}$, da equação:

$$\alpha \cdot y_i^2 + y_i - y_{i-1} = 0 \Rightarrow y_i^2 + 2 \cdot \alpha \cdot y_i \cdot v_i + v_i - v_{i-1} = 0 \Rightarrow v_i = \frac{v_{i-1} - y_i^2}{1 + 2 \cdot \alpha \cdot y_i} \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ com}$$

$$v_0(\alpha) = \frac{dy_0}{d\alpha} \equiv 0, \text{ sendo } \frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dy_n(\alpha)}{d\alpha} = v_n(\alpha).$$

Resumindo: $f(\alpha) = y_n(\alpha) - 0,2$ e $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = v_n(\alpha)$, calculando-se os valores

$$\text{de } y_i \text{ e } v_i \text{ de forma recursiva segundo: } \begin{cases} y_i = \frac{2}{\sqrt{1+4 \cdot \alpha \cdot y_{i-1}} + 1} \cdot y_{i-1} \\ v_i = \frac{v_{i-1} - y_i^2}{1 + 2 \cdot \alpha \cdot y_i} \end{cases} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \text{ com } y_0 = 1 \text{ e } v_0 = 0$$

Com $\alpha = 0$, tem-se $y_n = \dots = y_1 = y_0 = 1 \Rightarrow f(\alpha)|_{\alpha=0} = 0,8$, assim:

$v_i = v_{i-1} - 1$ e com $v_0 = 0 \Rightarrow v_n = -n = \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$. Deste modo o valor de α após a primeira iteração de Newton-Raphson com $\alpha^{(0)} = 0$ será: $\alpha^{(1)} = \frac{0,8}{n}$ que será o valor adotado para α (valor de α na extremidade inferior no primeiro intervalo de busca!).

Solução:

n	α	V (L)	V _{total} (L)
1	20,000	5000,0	5000,0
2	4,4062	1101,6	2203,2
4	1,4836	370,90	1483,6
10	0,4689	117,23	1172,3
20	0,2166	54,150	1083,0
100	0,0406	10,150	1015,0

Para o reator PFR, voltando à equação de balanço no reator i (em forma adimensional):

i -ésimo reator: $\alpha \cdot y_i^2 = y_{i-1} - y_i$, sendo $\alpha = \frac{k \cdot C_0 \cdot V}{q}$. Considerando o volume total dos reatores: $V_{total} = n \cdot V$ e definindo o novo parâmetro adimensional:

$\lambda = \frac{k \cdot C_0 \cdot V_{total}}{q} = n \cdot \frac{k \cdot C_0 \cdot V}{q} = n \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{n}$, substituindo essa nova forma de α no balanço

do i -ésimo reator, resulta: $\frac{\lambda}{n} \cdot y_i^2 = y_{i-1} - y_i$ ou: $\boxed{\lambda \cdot y_i^2 = n \cdot (y_{i-1} - y_i)}$

Para um valor muito elevado de n , considera-se: $\Delta z = \frac{1}{n}$ e $\Delta y = y_i - y_{i-1} = y(z_i) - y(z_{i-1})$,

sendo $z_i = i \cdot \Delta z = \frac{i}{n}$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Deste modo a equação $\lambda \cdot y_i^2 = n \cdot (y_{i-1} - y_i)$ pode ser

interpretada como a forma discretizada da equação diferencial: $\lambda \cdot [y(z)]^2 = -\frac{dy(z)}{dz}$, ou seja:

$\frac{dy(z)}{dz} = -\lambda \cdot [y(z)]^2$ para $0 < z < 1$ e com a condição de entrada: $y(z)|_{z=0} = 1$, sendo a

concentração de saída: $y_{saída} = y(z)|_{z=1}$

A solução dessa equação diferencial é: $y(z) = \frac{1}{1 + \lambda \cdot z}$, assim: $\boxed{y_{saída} = y(z)|_{z=1} = \frac{1}{1 + \lambda}}$

Como $y_{saída} = 0,2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \lambda = 4$ (para um PFR), logo:

$$V_{total} = \frac{\lambda \cdot q}{k \cdot C_0} = \frac{4 \cdot (30 \text{ L/min})}{(0,075 \text{ L/mol/min}) \cdot (1,6 \text{ mol/L})} = 1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3.$$

Que é o menor volume total do sistema para uma conversão de 80%. Observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda = 4$, como mostra a tabela abaixo.

n	α	λ
1	20,000	20,000
2	4,4062	8,8124
4	1,4836	5,9343
10	0,4689	4,6888
20	0,2166	4,3325
100	0,0406	4,0648

2) A equação de estado de Van der Waals é descrita por:

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right) \cdot (v - b) = R \cdot T$$

onde P é a pressão (atm);

v é o volume específico molar (L/mol);

T é a temperatura absoluta (K);

R é a constante universal dos gases = 0,082054 L.atm/mol/K;

a é uma constante dependente do gás (L².atm/mol²)

b é uma constante dependente do gás (L/mol)..

Os valores das constantes a e b para diferentes gases são tabelados abaixo:

Gás	a (L ² .atm/mole ²)	b (L/mol)
Gás carbônico	3,592	0,04267
Anilina dimetílica	37,49	0,1970
Hélio	0,03412	0,02370
Óxido nítrico	1,340	0,02789

Sabendo-se que a temperatura crítica do gás (temperatura acima da qual o gás não pode se liquefazer) é dada por: $T_c = \frac{8}{27} \cdot \frac{a}{R \cdot b}$, resolva o problema adotando $T > T_c$ e neste caso mostre que para qualquer pressão há apenas uma solução da equação. Adotando $T < T_c$ adote valores de P em que há apenas 1 solução e valores de P em que a equação apresenta três soluções, neste último caso: $v_1 < v_2 < v_3$ sendo v_1 o volume específico molar da fase líquida, v_3 o volume específico molar da fase gás e v_2 não apresenta significado físico. Mostre também como calcular a faixa de pressão dentro da qual o sistema apresenta três soluções.

Reescrevendo a equação de Van der Waals em termos das variáveis adimensionais:

$$\theta = \frac{T}{T_c} \text{ (temperatura adimensional); } v = \frac{v}{b} \text{ (volume específico molar adimensional) e}$$

$p = P \cdot \frac{b^2}{a}$ (pressão adimensional), resulta:

$$\theta(v) = \frac{27}{8} \cdot \left(p + \frac{1}{v^2} \right) \cdot (v-1)$$

Note que a(s) solução(ões) do problema estão contidas obrigatoriamente entre $v=1$ e

$$v = \frac{8 \cdot \theta}{27 \cdot p} \quad (v \gg 1), \text{ isto é todas as soluções se situam no domínio: } 1 < v \leq \frac{8 \cdot \theta}{27 \cdot p}$$

Em que se considera θ como uma função de v e a variável p como um parâmetro da curva, notando-se que para cada valor de v que $\theta \uparrow$ (aumenta) com (o aumento de) $p \uparrow$.

Obtém-se: $\frac{d\theta(v)}{dv} = \frac{27}{8} \cdot \left[\left(p + \frac{1}{v^2} \right) - \frac{2}{v^3} \cdot (v-1) \right] = \frac{27}{8} \cdot \left[p - \frac{1}{v^2} + \frac{2}{v^3} \right]$

e $\frac{d^2\theta(v)}{dv^2} = \frac{27}{8} \cdot \left[\frac{2}{v^3} - \frac{6}{v^4} \right] = \frac{27}{4 \cdot v^4} \cdot (v-3)$.

Então, como para $v=3 \Rightarrow \frac{d^2\theta(v)}{dv^2} = 0$, tem-se para esse valor de v um ponto de inflexão da

curva independente do valor do *parâmetro* p . Como no ponto de inflexão se tem o valor extremo da derivada primeira, nesse caso *valor mínimo* pois

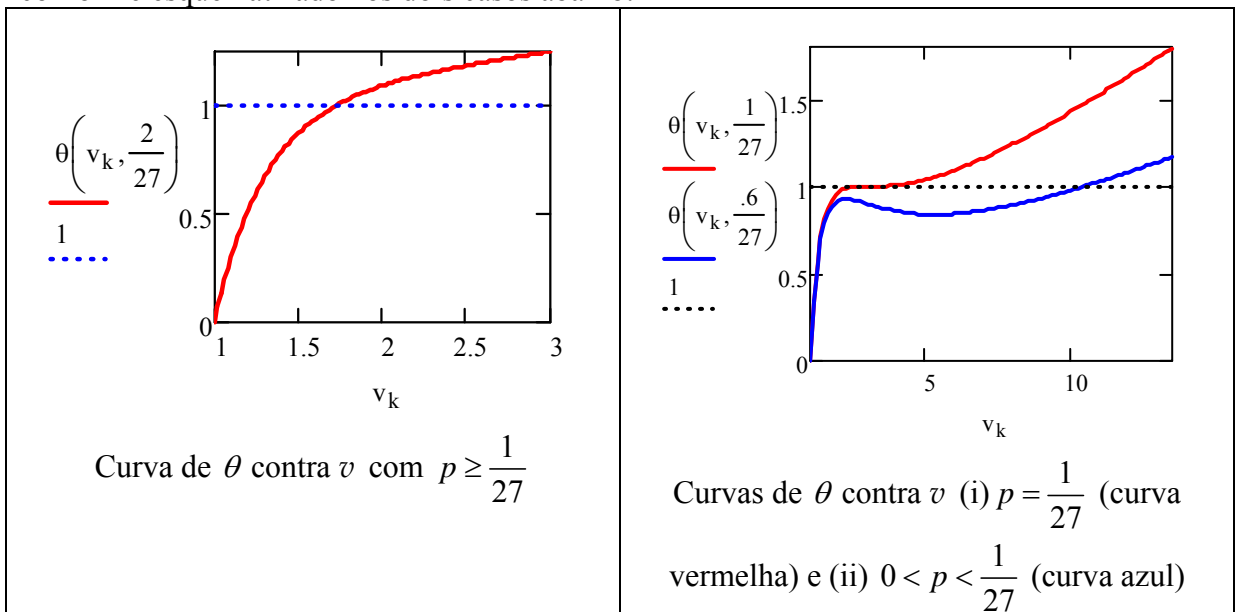
$$\left. \frac{d^3\theta(v)}{dv^3} \right|_{v=3} = \left[\frac{81}{4 \cdot v^5} \cdot (4-v) \right]_{v=3} > 0,$$

impondo-se $\left. \frac{d\theta(v)}{dv} \right|_{v=3} = \frac{27}{8} \cdot \left[p - \frac{1}{9} + \frac{2}{27} \right] = \frac{27}{8} \cdot \left[p - \frac{1}{27} \right] \geq 0 \Rightarrow p \geq \frac{1}{27}$ é garantido que a

derivada $\frac{d\theta(v)}{dv}$ será sempre positiva para todo p e v . Além disso, como no ponto de

inflexão da curva com $p = \frac{1}{27}$ tem-se $\theta(v) = \theta(3) = \frac{27}{8} \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{9} \right) \cdot (3-1) = \frac{1}{4} \cdot (1+3) = 1$, os

valores de θ em que um máximo local pode ocorrer (o que só ocorre se $p < 1/27$ e para v entre 1 e 3) serão obrigatoriamente menores que 1 ($\theta \downarrow$ com $p \downarrow$). Essa característica garante que se $\theta \geq 1 \Rightarrow T \geq T_c$ a curva de θ contra v só interceptada em um ponto por retas horizontais, conforme esquematizado nos dois casos abaixo:



Para ilustrar a solução do problema no caso em que há apenas 1(uma) raiz real, adota-se $\theta > 1$, ou seja $\frac{27}{8} \cdot \left(p + \frac{1}{v^2}\right) \cdot (v-1) > 1$ e uma valor qualquer de p . Por exemplo, $\theta = 2$ e $p = 1$

resultando na equação: $\frac{27}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) \cdot (v-1) = 2 \Rightarrow 27 \cdot (v^2 + 1) \cdot (v-1) = 16 \cdot v^2$

ou seja: $27 \cdot v^3 - 43 \cdot v^2 + 27 \cdot v - 27 = 0$, com esses coeficientes as raízes são determinadas: Pela regra de Descartes conclui-se que pode existir 3 ou 1 raiz real positiva e nenhuma raiz real negativa. Usando o método de Newton-Raphson com $v^{(0)} = 1$ obtém-se $v = 1,3906$; Para se certificar que essa é a única solução, utiliza-se como chute inicial o maior valor possível de v , isto é: $v^{(0)} = 1 + \frac{8 \cdot \theta}{27 \cdot p} = 1 + \frac{16}{27} = 1,5926$ e novamente se obtém: $v = 1,3906$.

Para ilustrar a solução do problema no caso em que há 3 (três) raízes reais, considera-se

$0 < p < \frac{1}{27}$ e o valor de $\theta(v) = \theta(3) = \frac{27}{8} \cdot \left(p + \frac{1}{9}\right) \cdot (3-1) = \frac{1}{4} \cdot (27 \cdot p + 3)$, isto é o valor de θ

correspondente ao ponto de inflexão que ocorre em $v = 3$, assim:

$\frac{27}{8} \cdot \left(p + \frac{1}{v^2}\right) \cdot (v-1) = \frac{27}{4} \cdot \left(p + \frac{1}{9}\right) \Rightarrow p \cdot v^3 - \left(3 \cdot p + \frac{2}{9}\right) \cdot v^2 + v - 1 = 0$. Mas:

$p \cdot v^3 - \left(3 \cdot p + \frac{2}{9}\right) \cdot v^2 + v - 1 = (v-3) \cdot \left(p \cdot v^2 - \frac{2}{9} \cdot v - \frac{1}{3}\right) = 0$, ou seja, as duas outras soluções

são as raízes de $p \cdot v^2 - \frac{2}{9} \cdot v + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow v = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 27 \cdot p}}{9 \cdot p}$, adotando-se $p = 0,02$ e

$\theta = \theta(3) = \frac{27}{8} \cdot \left(0,02 + \frac{1}{9}\right) \cdot (3-1) = 0,8850$ tem-se: a primeira solução:

$v_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 27 \cdot 0,02}}{9 \cdot 0,02} = 1,7876$ (fase líquida), a segunda solução: $v_2 = 3$ (fase instável) e a

terceira solução $v_3 = \frac{1 + \sqrt{1 - 27 \cdot 0,02}}{9 \cdot 0,02} = 9,3235$ (fase vapor).

3) Em problemas de transferência de calor é importante calcular as raízes reais positivas da

equação: $\frac{tg(\lambda)}{\lambda} = K$, onde K é uma constante conhecida, note que, exceto no caso em que

$K = 1, \lambda = 0$ **não é raiz desta equação**. Para evitar as discontinuidades da função tangente

reescreve-se a equação original na forma: $f(\lambda) = sen(\lambda) - K \cdot \lambda \cdot cos(\lambda) = 0$. Apresente o

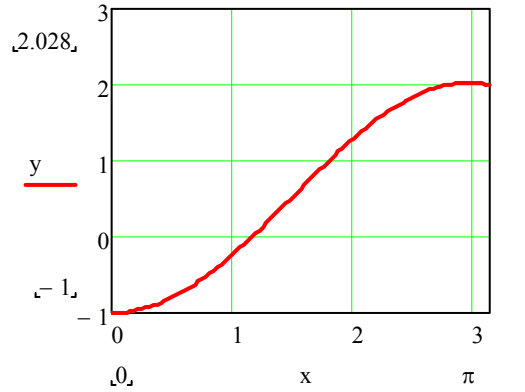
procedimento iterativo que traduz o método de *Newton-Raphson* aplicado a esta equação e

aplique-o para determinar a primeira raiz positiva, com uma precisão até a quarta casa

decimal, da equação com $K = 2$, mostrando claramente em seu procedimento como evitou o

valor $\lambda = 0$. Sugira uma metodologia para determinar as 10 primeiras raízes desta equação.

Plotando-se a função: $y(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda} = \frac{sen(\lambda)}{\lambda} - K \cdot cos(\lambda) = \begin{cases} 1 - K & \text{se } \lambda = 0 \\ \frac{sen(\lambda)}{\lambda} - K \cdot cos(\lambda) & \text{se } \lambda \neq 0 \end{cases}$



Da figura verifica-se que há uma solução nas proximidades de $\lambda = 1$, sendo em 0 o valor da função igual a $1 - K = -1$. Excluindo-se a possibilidade de $\lambda = 0$ ser solução do problema, adota-se novamente $f(\lambda) = \text{sen}(\lambda) - K \cdot \lambda \cdot \cos(\lambda)$ e

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \cos(\lambda) - K \cdot \cos(\lambda) + K \cdot \lambda \cdot \text{sen}(\lambda) = (1 - K) \cdot \cos(\lambda) + K \cdot \lambda \cdot \text{sen}(\lambda).$$

Então o procedimento iterativo correspondente ao método de *Newton-Raphson* seria:

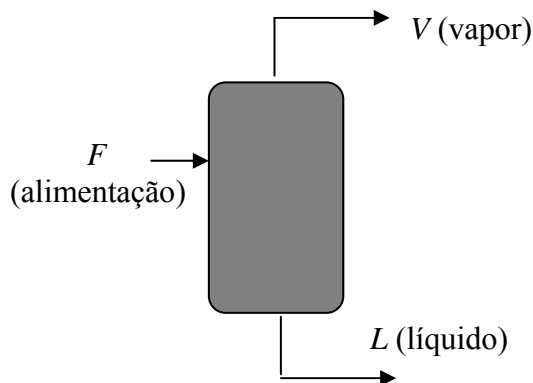
$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \left[\frac{\text{sen}(\lambda) - K \cdot \lambda \cdot \cos(\lambda)}{(1 - K) \cdot \cos(\lambda) + K \cdot \lambda \cdot \text{sen}(\lambda)} \right]_{\lambda^{(k)}} \quad \text{com } \lambda^{(0)} = 1 \text{ que converge ao valor } 1,1656$$

após 11 iterações. Para determinar a segunda raiz se adota: $\lambda^{(0)} = 1,1656 + \pi = 4,3072$, convergindo-se ao valor 4,6042 após 6 iterações. Para determinar a terceira raiz se adota: $\lambda^{(0)} = 4,6042 + \pi = 7,7458$, convergindo-se ao valor 7,7899 após 4 iterações.

E assim sucessivamente:

Raiz	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Valor Convergido	10,9499	14,1017	17,2498	20,3958	23,5407	26,6848	29,8284

4) F moles por hora de gás natural são alimentados continuamente em um vaso de *flash*, em acordo com o esquema abaixo:



A operação estacionária deste vaso é descrita pelos balanços:

Balanco global: $F = L + V$

Balanco do componente i : $F \cdot z_i = V \cdot y_i + L \cdot x_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$

Relação de equilíbrio: $y_i = K_i \cdot x_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Além destas equações as restrições algébricas, decorrentes da definição de fração molar, devem também ser respeitadas: $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ e $\sum_{i=1}^n y_i = 1$

Mostre como manipulando estas equações se obtém a equação não-linear:

$$\sum_{i=1}^n \frac{K_i \cdot z_i}{\phi \cdot (K_i - 1) + 1} = 1, \text{ em que } \phi = V/F.$$

Sabendo-se que as composições de alimentação e constantes de equilíbrio, à temperatura do vaso, são conhecidas e tabeladas abaixo, determine os valores de ϕ , x_i e y_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Componente	z_i	K_i
Gás carbônico	0,0046	1,650
Metano	0,8345	3,090
Etano	0,0381	0,720
Propano	0,0163	0,390
Isobutano	0,0050	0,210
n-Butano	0,0074	0,175
Pentanos	0,0287	0,093
Hexanoss	0,0220	0,065
Heptanos ⁺	0,0434	0,036
	$\Sigma=1,0000$	

Resolução: Utilizando a definição de $\phi = V/F$ no balanço global: $F = L + V$, resulta:

$1 = L/F + \phi \rightarrow L/F = 1 - \phi$. Utilizando essa equação e a relação de equilíbrio no balanço do componente i $z_i = \phi \cdot y_i + \frac{L}{F} \cdot x_i = (\phi \cdot K_i + 1 - \phi) \cdot x_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, ou seja:

$$x_i = \frac{z_i}{(K_i - 1) \cdot \phi + 1} \text{ e } y_i = K_i \cdot x_i = \frac{K_i \cdot z_i}{(K_i - 1) \cdot \phi + 1}.$$

$$\text{Mas : } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^n y_i = 1, \text{ logo: } \sum_{i=1}^n \left(\frac{z_i}{(K_i - 1) \cdot \phi + 1} \right) = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_i \cdot z_i}{(K_i - 1) \cdot \phi + 1} \right) = 1.$$

Ou seja, para determinar ϕ há duas alternativas equivalentes:

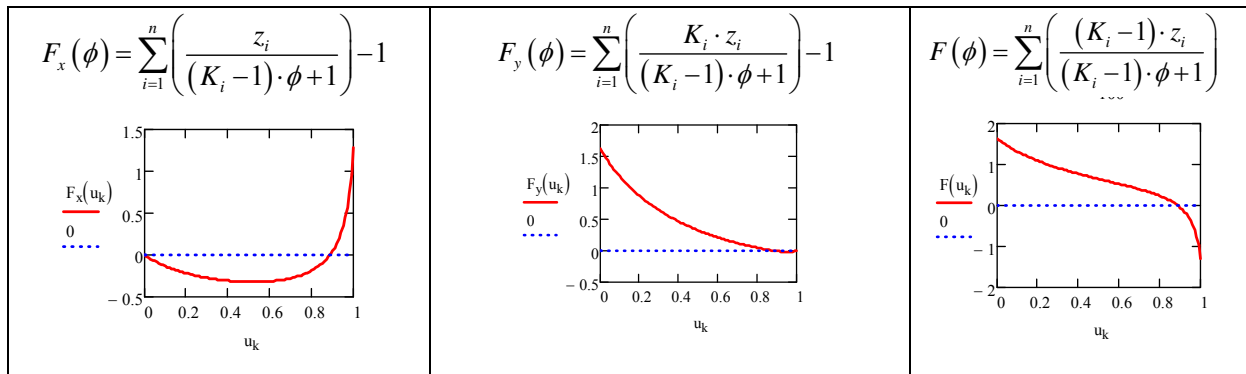
- i. Determinar a raiz de $F_x(\phi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{z_i}{(K_i - 1) \cdot \phi + 1} \right) - 1 = 0$
- ii. Determinar a raiz de $F_y(\phi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_i \cdot z_i}{(K_i - 1) \cdot \phi + 1} \right) - 1 = 0$

Note que: (a): $F_x(\phi)|_{\phi=0} = \sum_{i=1}^n z_i - 1 = 0$, isto é $\phi = 0$ (inexistência da fase vapor) é raiz da primeira equação; (b): $F_y(\phi)|_{\phi=1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_i \cdot z_i}{(K_i - 1) + 1} \right) - 1 = \sum_{i=1}^n z_i - 1 = 0$, isto é $\phi = 1$ (inexistência da fase líquida) é raiz da segunda equação. Para eliminar essas duas soluções *triviais*, subtrai-se (i) de (ii), isto é: $F(\phi) = F_y(\phi) - F_x(\phi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(K_i - 1) \cdot z_i}{(K_i - 1) \cdot \phi + 1} \right) = 0$, note

agora que: $F(\phi)|_{\phi=0} = F_y(\phi)|_{\phi=0} - F_x(\phi)|_{\phi=0} = \sum_{i=1}^n [(K_i - 1) \cdot z_i] \neq 0$

e $F(\phi)|_{\phi=1} = F_y(\phi)|_{\phi=1} - F_x(\phi)|_{\phi=1} = \sum_{i=1}^n \left[\left(1 - \frac{1}{K_i} \right) \cdot z_i \right] \neq 0$

As três alternativas de funções capazes de resolver o problema são plotadas a seguir.



Nas três formas, vê-se que há uma raiz próxima de 0,9. Outro bom chute para o valor de ϕ é 0,8345, que é a fração molar do metano na alimentação do vaso de *flash* (o metano por ser o componente mais abundante e ao mesmo tempo mais volátil na carga do vaso deve sair – a maior parte do vaso – na fase vapor, sendo o metano o componente mais presente no vapor).

Utilizando o chute inicial $\phi^{(0)} = 0,8345$ e a função $F(\phi)$ o método de Newton-Rapshon converge para o valor 0,8867 de ϕ . Os valores das composições na fase líquida e vapor são

calculadas, respectivamente, por: $x_i = \frac{z_i}{(K_i - 1) \cdot \phi + 1}$ e $y_i = K_i \cdot x_i = \frac{K_i \cdot z_i}{(K_i - 1) \cdot \phi + 1}$.

Resultando em:

Componente	z_i	x_i	y_i
Gás carbônico	0,0046	0,0029	0,0048
Metano	0,8345	0,2925	0,9038
Etano	0,0381	0,0507	0,0365
Propano	0,0163	0,0355	0,0138
Isobutano	0,0050	0,0167	0,0035
n-Butano	0,0074	0,0276	0,0048
Pentanos	0,0287	0,1466	0,0136
Hexanoss	0,0220	0,1287	0,0084
Heptanos ⁺	0,0434	0,2989	0,0108

5) Uma reação química de primeira ordem, irreversível e em fase líquida é conduzida em um reator tanque operando de forma cíclica. Assim, conduz-se uma batelada por um tempo t e, depois de transcorrido este tempo, esvazia-se e se limpa o reator, levando esta última operação um tempo igual a t_c . Após passar pela etapa de esvaziamento/limpeza conduz-se novamente uma batelada por um tempo t , e assim sucessivamente. Pode-se demonstrar que o tempo ótimo da fase batelada que maximiza a taxa de produção do processo é obtido através da equação não-linear:

$$\left[1 + k \cdot (t + t_c)\right] \cdot e^{-k \cdot t} - 1 = 0 \quad (1)$$

ou na forma logarítmica:

$$k t - \ln\left[1 + k \cdot (t + t_c)\right] = 0 \quad (2)$$

Sendo k : constante de velocidade da reação = $2,5 \text{ h}^{-1}$

t_c : tempo da operação de esvaziamento/limpeza = $0,5 \text{ h}$.

Para calcular t tentam-se dois procedimentos iterativos:

(a) de (1) tem-se: $t = \frac{e^{k \cdot t} - 1}{k} - t_c$ sugerindo a seguinte forma recursiva:

$$t^{(j+1)} = \frac{e^{k \cdot t^{(j)}} - 1}{k} - t_c \quad \text{para } j = 0, 1, \dots \quad \text{com } t^{(0)} = t_c$$

(b) de (2) tem-se: $t = \frac{\ln\left[1 + k \cdot (t + t_c)\right]}{k}$, sugerindo a seguinte forma recursiva:

$$t^{(j+1)} = \frac{\ln\left[1 + k \cdot (t^{(j)} + t_c)\right]}{k} \quad \text{para } j = 0, 1, \dots \quad \text{com } t^{(0)} = t_c$$

O procedimento (a) não converge, enquanto que o procedimento (b) converge à solução do problema (para o conjunto de parâmetros utilizados) $t = 0,50155 \text{ h}$ após 6 iterações. Explique porque isto ocorre.

Resolução:

No caso (a) a função iteração é: $g(t) = \frac{e^{k \cdot t} - 1}{k} - t_c \Rightarrow \frac{dg(t)}{dt} = e^{k \cdot t} > 1$ para todo $t > 0$, dessa forma o procedimento será sempre não-convergente para qualquer chute inicial $t^{(0)} > 0$.

No caso (b) a função iteração é:

$$g(t) = \frac{\ln\left[1 + k \cdot (t + t_c)\right]}{k} \Rightarrow \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{1 + k \cdot (t + t_c)} \Rightarrow 0 < \frac{dg(t)}{dt} < 1 \quad \text{para todo } t > 0, \text{ dessa}$$

forma o procedimento será sempre convergente para qualquer chute inicial $t^{(0)} > 0$.

6) Os balanços de massa de reagente e de energia em um reator de mistura perfeita onde é conduzida uma reação de segunda ordem, irreversível e exotérmica são expressos pelas seguintes equações (em forma adimensional):

$$\text{Balanço de massa do reagente: } 1 - x = Da \cdot x^2 \cdot \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\right] \quad (1)$$

$$\text{Balanço de Energia: } \theta - 1 = \beta \cdot Da \cdot x^2 \cdot \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\right] \quad (2)$$

Onde x é a concentração adimensional do reagente e θ é a temperatura adimensional da mistura reacional no interior do reator; Da , β e γ são parâmetros adimensionais que tem os seguintes valores numéricos: $Da = 0,02381$, $\beta = 0,65$ e $\gamma = 20$.

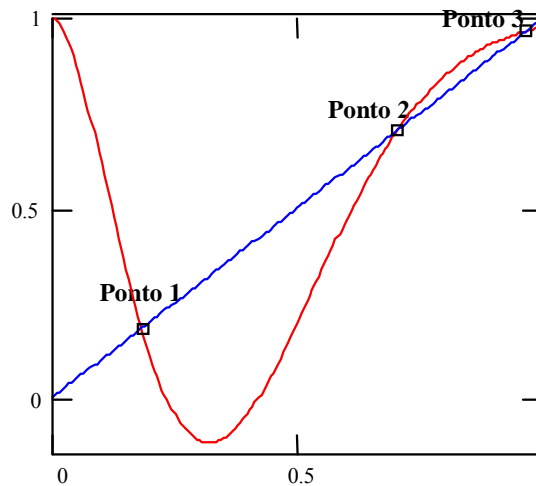
Multiplicando a Eq. (1) por β e subtraindo esta nova equação de (2), chega-se a:

$$\theta - 1 = \beta \cdot (1 - x) \Rightarrow \theta = 1 + \beta \cdot (1 - x),$$

substituindo esta última expressão em (1), chega-se finalmente a:

$$1 - x = Da \cdot x^2 \cdot \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{1 + \beta \cdot (1 - x)}\right)\right] \quad \text{ou} \quad x = 1 - Da \cdot x^2 \cdot \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{1 + \beta \cdot (1 - x)}\right)\right] = g(x)$$

Esta função $g(x)$ é plotada na figura abaixo assim como a bissetriz do primeiro quadrante, $y = x$.



os três pontos de interseções destas curvas são: 0,182249 [ponto 1]; 0,705667 [ponto 2] e 0,96563 [ponto 3].

a) Mostre porque quando se utiliza o procedimento iterativo:

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \quad \text{para } k=0, 1, 2, \dots, \text{ apenas o ponto 3 é obtido.}$$

Resolução: como a função iteração empregada é:

$$g(x) = 1 - Da \cdot x^2 \cdot \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{1 + \beta \cdot (1 - x)}\right)\right], \text{ tem-se:}$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = Da \cdot x \cdot \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{1 + \beta \cdot (1 - x)}\right)\right] \left\{ \frac{\gamma \cdot \beta \cdot x}{[1 + \beta \cdot (1 - x)]^2} - 2 \right\}$$

Para o ponto 1: $x=0,182249$ $\frac{dg(x)}{dx} = -4,442$: solução oscilatória e instável.

Para o ponto 2: $x=0,705667$ $\frac{dg(x)}{dx} = 1,862$: solução não oscilatória e instável.

Para o ponto 3: $x=0,96563$ $\frac{dg(x)}{dx} = 0,356$: solução não oscilatória e estável.

b) Sugira um procedimento iterativo que assegure a convergência do processo de busca das três raízes do problema. Mostre claramente em seu procedimento a condição inicial a ser adotada na determinação de cada solução.

Resolução: empregando o método de Newton-Raphson diretamente a:

$$f(x) = x - 1 + Da \cdot x^2 \cdot \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{1 + \beta \cdot (1-x)}\right)\right] = x - g(x), \text{ resulta:}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 1 + Da \cdot x \cdot \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{1 + \beta \cdot (1-x)}\right)\right] \cdot \left\{2 - \frac{\gamma \cdot \beta \cdot x}{[1 + \beta \cdot (1-x)]^2}\right\}$$

Dando origem ao procedimento iterativo: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$.

Para o ponto 1: $x^{(0)}=0,1$ obtém-se a solução 0,182249 após 4 iterações.

Para o ponto 2: $x^{(0)}=0,5$ obtém-se a solução 0,705667 após 5 iterações.

Para o ponto 3: $x^{(0)}=1$ obtém-se a solução 0,96563 após 3 iterações.

7) Sugere-se o seguinte procedimento para determinar iterativamente as raízes de uma simples função não-linear, $f(x) = 0$:

Busca-se o mínimo de $g(x) = [f(x)]^2$ isto é os valores de x que anulam a derivada de $g(x)$:

$\frac{dg(x)}{dx} = 2 \cdot f(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}$, ou seja, buscam-se as raízes de uma nova função:

$$F(x) = \frac{dg(x)}{dx} = 2 \cdot f(x) \cdot \frac{df(x)}{dx}.$$

Aplice o método de Newton-Raphson a esta nova função $F(x)$ e mostre o algoritmo recursivo correspondente e compare-o com o obtido aplicando-se diretamente o método de Newton-Raphson à função original.

Ilustre o processo iterativo, em ambos os casos, aplicando-o a uma função simples de sua escolha, por exemplo: $f(x) = x^2 - 2$ ou $f(x) = e^{-x} - x$. Analise e comente os resultados obtidos.

Resolução: A aplicação direta do método de Newton-Raphson à função $f(x)$ dá origem ao procedimento iterativo: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$. A aplicação do método de Newton-Raphson à

função $F(x)$, em vista de: $\frac{dF(x)}{dx} = 2 \cdot \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2 \cdot \left[1 + \frac{f(x)}{\left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]$, dá origem ao

procedimento iterativo: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \cdot \frac{1}{1 + \frac{f(x^{(k)})}{\left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x^{(k)}}}$.

Note que à medida que o último procedimento converge à solução, isto é: $f(x^{(k)}) \cong 0$, os dois métodos se assemelham.

Exemplos ilustrativos:

(i) $f(x) = x^2 - 2$, $\frac{df(x)}{dx} = 2 \cdot x$.

$$F(x) = 4 \cdot x \cdot (x^2 - 2) \quad \text{e} \quad \frac{dF(x)}{dx} = 4 \cdot (3 \cdot x^2 - 2)$$

Método de Newton-Raphson aplicado a $f(x)$: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)} \right)^2 - 2}{2 \cdot x^{(k)}}$

Método de Newton-Raphson aplicado a $F(x)$: $x^{(k+1)} = x^{(k)} \cdot \left[1 - \frac{\left(x^{(k)} \right)^2 - 2}{3 \cdot \left(x^{(k)} \right)^2 - 2} \right]$

Com $x^{(0)} = 1$ obtém-se a solução 1,41421 após 4 iterações no primeiro procedimento e após 5 iterações no segundo procedimento.

(ii) $f(x) = e^{-x} - x$, $\frac{df(x)}{dx} = -(1 + e^{-x})$.

$$F(x) = -2 \cdot (e^{-x} - x) \cdot (1 + e^{-x}) \quad \text{e} \quad \frac{dF(x)}{dx} = 2 \cdot (1 + e^{-x})^2 + 2 \cdot e^{-x} \cdot (e^{-x} - x)$$

Método de Newton-Raphson aplicado a $f(x)$: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{e^{-x^{(k)}} - x^{(k)}}{e^{-x^{(k)}} + 1}$

Método de Newton-Raphson aplicado a $F(x)$:

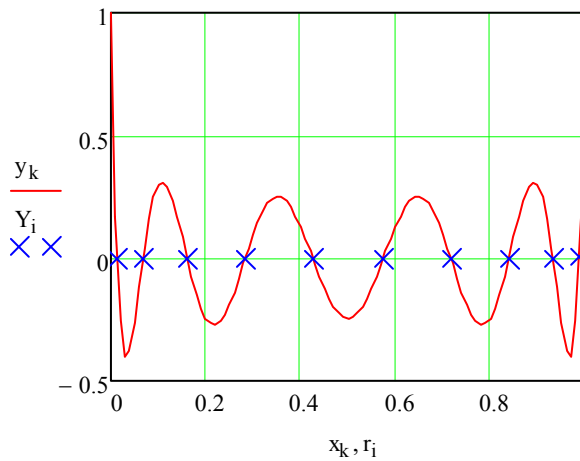
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \left[\frac{(e^{-x} - x) \cdot (1 + e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2 + e^{-x} \cdot (e^{-x} - x)} \right]_{x=x^{(k)}}$$

Com $x^{(0)} = 1$ obtém-se a solução 0,56714 após 3 iterações no primeiro procedimento e após 5 iterações no segundo procedimento.

Os dois exemplos ilustrativos demonstram a baixa eficiência do novo procedimento, pois demanda mais iterações e cada iteração exige mais cálculos.

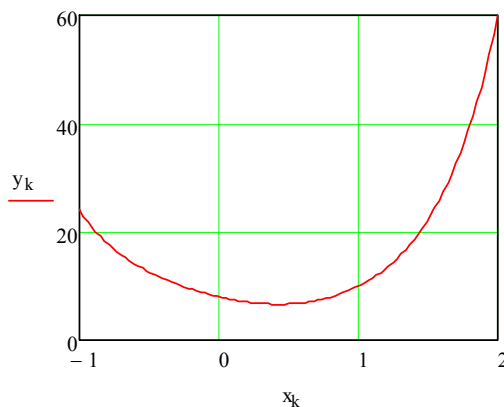
8) Determinar todas as raízes dos seguintes polinômios:

$$(a) P_{10}(x) = 184756x^{10} - 923780x^9 + 1969110x^8 - 2333760x^7 + 1681680x^6 - 756756x^5 + 210210x^4 - 34320x^3 + 2970x^2 - 110x + 1$$

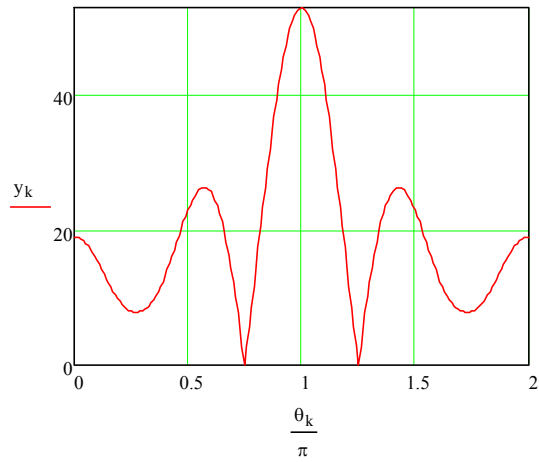


	0
0	0.0130467
1	0.0674683
2	0.1602952
3	0.2833023
4	0.4255628
5	0.5744372
6	0.7166884
7	0.8397441
8	0.9324713
9	0.9869836

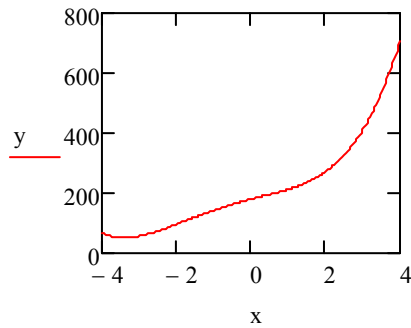
$$(b) P_6(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 + x^3 + 6x^2 - 6x + 8$$



$$r_6 = \begin{pmatrix} -1 - i \\ -1 + i \\ 0.5 - 0.8660254i \\ 0.5 + 0.8660254i \\ 1.5 + 1.3228757i \\ 1.5 - 1.3228757i \end{pmatrix}$$

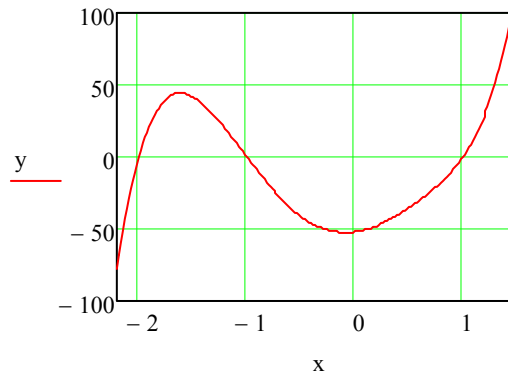


(c) $P_4(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 32x + 180$



$$r_4 = \begin{pmatrix} -3.5838506 + 1.1512902i \\ -3.5838506 - 1.1512902i \\ 2.0838506 + 2.8915306i \\ 2.0838506 - 2.8915306i \end{pmatrix}$$

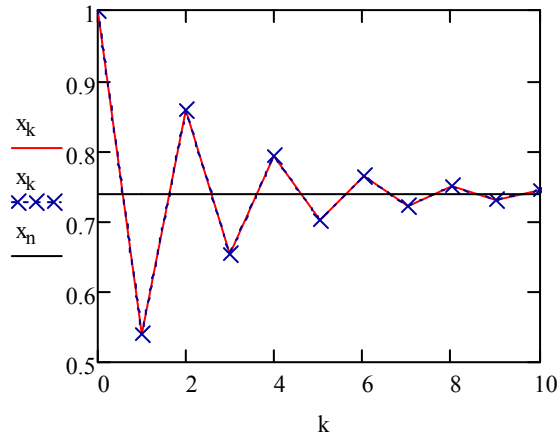
(d) $P_7(x) = x^7 + 4x^6 + 10 \cdot x^5 - 8 \cdot x^4 - 21 \cdot x^3 + 56 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 52$



$$r_7 = \begin{pmatrix} -2.0000004 \\ -1.9999998 + 3i \\ -1.9999998 - 3i \\ -1 \\ 1 - i \\ 1 + i \\ 1 \end{pmatrix}$$

9) Sendo ASC o número de Algoritmos Significativos Corretos,

(a) Resolva $x = \cos x$ por substituições sucessivas, considerando $x^{(0)} = 1$. (6 ASC)



$$n = 40$$

$$x_n - x_{n-1} = 9.125543 \times 10^{-8}$$

$$x_n = 0.739085$$

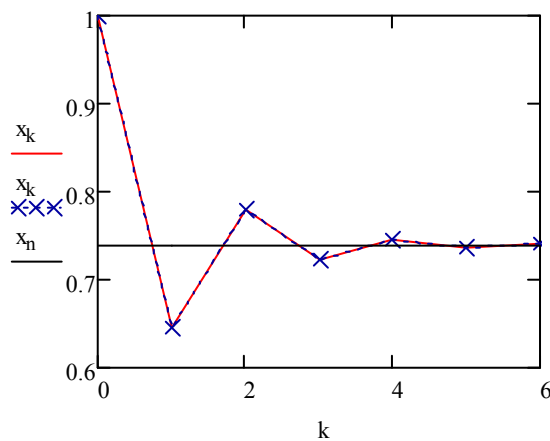
(b) Mostre que $x = \cos x$ pode ser transformado em $x = 1 - (\sin^2 x) / (1 + x)$, verificando em quantos passos obtém-se a mesma solução do problema anterior.

Elevando membro a membro de: $x = \cos(x)$ ao quadrado, resulta: $x^2 = [\cos(x)]^2$

Como $[\cos(x)]^2 = 1 - [\sin(x)]^2 \Rightarrow x^2 = 1 - [\sin(x)]^2$, ou seja:

$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1) = -[\sin(x)]^2 \Rightarrow x-1 = -\frac{[\sin(x)]^2}{1+x}$ chegando-se finalmente a:

$$x = 1 - \frac{[\sin(x)]^2}{1+x}$$



$$n = 19$$

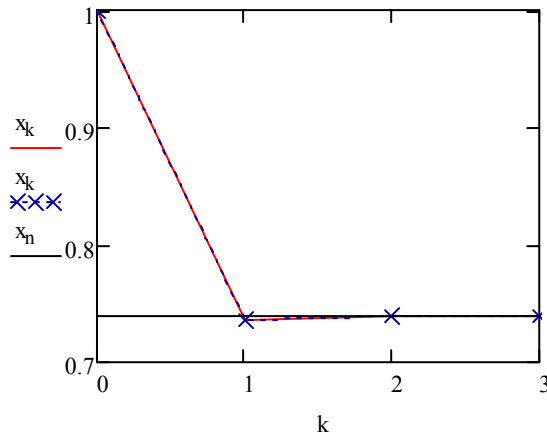
$$x_n - x_{n-1} = -5.896101 \times 10^{-8}$$

$$x_n = 0.739085$$

(c) Mostre que $x = \cos x$ pode ser transformado em $x = (x \cos x)^{1/2}$, verificando em quantos passos obtém-se a mesma solução do problema anterior.

Multiplicando membro a membro de: $x = \cos(x)$ por x , resulta:

$$x^2 = x \cdot \cos(x) \Rightarrow x = \sqrt{x \cdot \cos(x)}$$

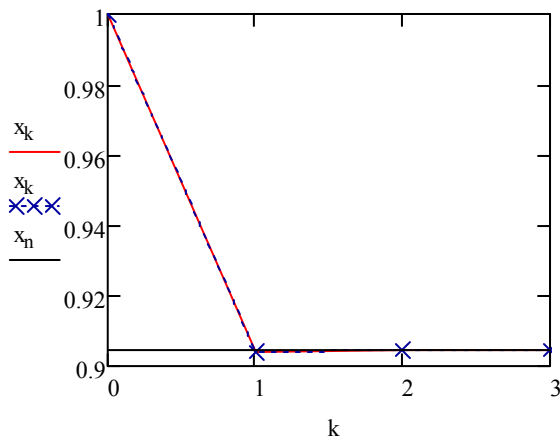
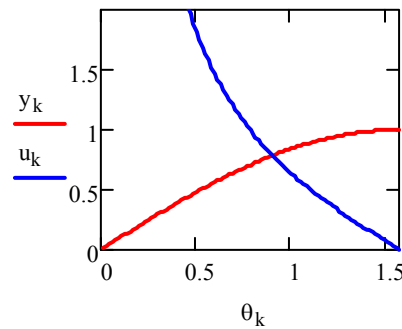


$$n = 8$$

$$x_n - x_{n-1} = 6.498843 \times 10^{-8}$$

$$x_n = 0.739085$$

(d) Esboce o gráfico da função $\sin x = \cotg x$ e resolva pelo método de Newton, considerando $x^{(0)} = 1$. (6 ASC)



$$n = 3$$

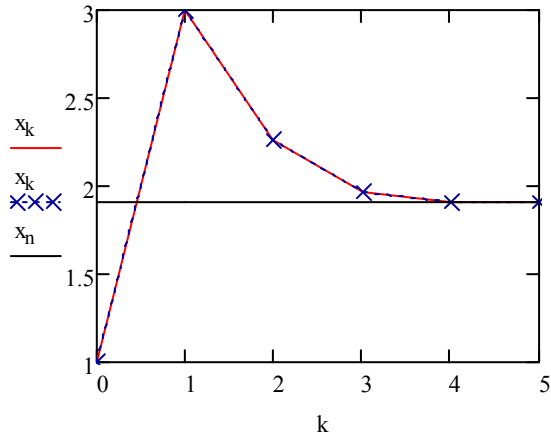
$$x_n - x_{n-1} = -6.170307 \times 10^{-9}$$

$$x_n = 0.904557$$

(e) Formule as iterações de Newton para calcular raízes cúbicas e calcule $x = \sqrt[3]{7}$, considerando $x^{(0)} = 2$. (6 ASC)

$f(x) = x^3 - \alpha \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2$, logo a função iteração do método de Newton será:

$$F(x) = x - \left(\frac{x^3 - \alpha}{3 \cdot x^2} \right) = \frac{2 \cdot x^3 + \alpha}{3 \cdot x^2}$$



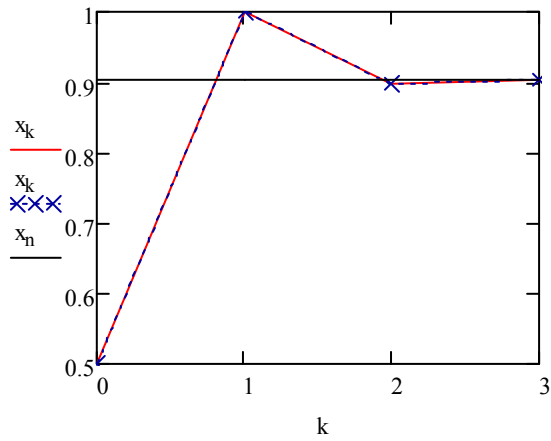
$$n = 7$$

$$x_n - x_{n-1} = -3.850253 \times 10^{-13}$$

$$x_n = 1.912931$$

$$\sqrt[3]{7} = 1.912931$$

(f) Resolva o problema (d) usando o método da secante, considerando como pontos de partida $x^{(0)} = 0,5$ e $x^{(1)} = 1$, e compare os resultados. (6 ASC)



$$n = 5$$

$$x_n - x_{n-1} = -6.629015 \times 10^{-10}$$

$$x_n = 0.904557$$

(g) Resolva $e^x + x^4 + x = 2$ pelo método da bisseção no intervalo $[0, 1]$. (4 ASC)

$$\text{funcao}(x) := e^x + x(1 + x^3) - 2$$

```

Biseção(a, b, ε, δ, M) :=
  flag ← 0
  k ← 0
  Δ ← b - a
  f_a ← funcao(a)
  f_b ← funcao(b)
  while flag = 0
    k ← k + 1
    x ← (a + b) / 2
    F ← funcao(x)
    if f_a · F > 0
      a ← x
      f_a ← F
    otherwise
      b ← x
      f_b ← F
    flag ← 1 if |F| < δ
    flag ← 1 if |b - a| < ε
    flag ← 1 if k ≥ M
  R_0 ← a
  R_1 ← b
  R_2 ← f_a
  R_3 ← f_b
  R_4 ← k
  R

```

$\underline{\underline{\epsilon}} := 10^{-9}$ $\underline{\underline{\delta}} := 10^{-9}$ $M := 100$ $\underline{\underline{R}} := \text{Biseção}(0, 1, \epsilon, \delta, M)$

$$R = \begin{pmatrix} 0.429494 \\ 0.429494 \\ -1.241796 \times 10^{-9} \\ 1.415625 \times 10^{-9} \\ 30 \end{pmatrix}$$

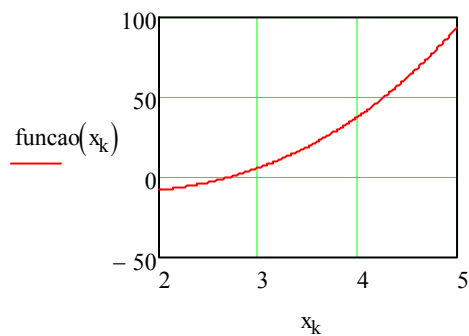
(h) Encontre a solução real da equação $x^3 = 5x + 6$ pelos métodos da regra falsi e da regra falsi modificado. (4 ASC) com: a=2 e b=5

```

Wegstein (a,b,ε,δ,M) :=
  flag ← 0
  k ← 0
  Δ ← b - a
  fa ← funcao(a)
  fb ← funcao(b)
  while flag = 0
    k ← k + 1
    x ← a +  $\frac{f_a}{f_a - f_b} \cdot \Delta$ 
    F ← funcao(x)
    crit ← fa · F
    if crit > 0
      a ← x
      fa ← F
    otherwise
      b ← x
      fb ← F
    flag ← 1 if |F| < δ
    Δ ← b - a
    flag ← 1 if |Δ| < ε
    flag ← 1 if k ≥ M
  R0 ← a
  R1 ← b
  R2 ← fa
  R3 ← fb
  R4 ← k
  R

```

R := Wegstein(a, b, 10⁻⁹, 10⁻⁹, 100)

$$R = \begin{pmatrix} 2.689095 \\ 5 \\ -7.347793 \times 10^{-10} \\ 94 \\ 45 \end{pmatrix}$$


10) No desenvolvimento de uma modificação do método de Weigstein se utiliza uma nova parametrização do intervalo de busca de acordo com a expressão:

$$x = \left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right) \text{ com } -1 \leq \lambda \leq +1$$

Nessa nova forma se verifica:

- (i) com $\lambda = -1 \Rightarrow x = a$ (extremidade inferior do intervalo de busca);
- (ii) com $\lambda = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{a+b}{2}\right)$ (ponto médio do intervalo de busca);
- (iii) com $\lambda = +1 \Rightarrow x = b$ (extremidade superior do intervalo de busca).

Para determinar o valor de λ em cada iteração se utiliza uma interpolação quadrática inversa fundamentada nos 3 pontos:

x	a	$\frac{a+b}{2}$	b
$y = f(x)$	$f(a) = y_a$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = y_m$	$f(b) = y_b$
λ	-1	0	+1

Essa interpolação quadrática inversa é descrita por:

$$p_2(y) = \frac{(y - y_b) \cdot (y - y_m)}{(y_b - y_a) \cdot (y_a - y_m)} + \frac{(y - y_a) \cdot (y - y_m)}{(y_b - y_a) \cdot (y_b - y_m)}, \text{ calculando o valor de } \lambda \text{ na iteração por:}$$

$$\lambda_{\text{iteração}} = p_2(0) = \frac{y_b \cdot y_m}{(y_b - y_a) \cdot (y_a - y_m)} + \frac{y_a \cdot y_m}{(y_b - y_a) \cdot (y_b - y_m)}$$

Este novo procedimento é traduzido através do algoritmo:

Dados: a, b ($b > a$), ε, δ e k_{MAX} , calcule: $y_a \leftarrow f(a)$ e $y_b \leftarrow f(b)$, caso $y_a \cdot y_b > 0$ ENTÃO entrar com novos valores de a e b . $k \leftarrow 0$

FAÇA

$$y_m \leftarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ e } \lambda = \frac{y_b \cdot y_m}{(y_b - y_a) \cdot (y_a - y_m)} + \frac{y_a \cdot y_m}{(y_b - y_a) \cdot (y_b - y_m)}$$

$$x \leftarrow \left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$y \leftarrow f(x)$$

SE $y \cdot y_a > 0$ ENTÃO $y_a \leftarrow y$ e $a \leftarrow x$

SENÃO $y_b \leftarrow y$ e $b \leftarrow x$

$$\Delta \leftarrow |b - a| ; k \leftarrow k + 1$$

ENQUANTO ($|y| > \delta$ ou $\Delta > \varepsilon$) e $k < k_{MAX}$

(a) Existe alguma limitação à aplicação deste novo procedimento? Qual? Justifique sua resposta.

Resposta:

$$p_2(y) = \frac{(y - y_m)}{(y_b - y_a)} \cdot \left[\frac{(y - y_b)}{(y_a - y_m)} + \frac{(y - y_a)}{(y_b - y_m)} \right]$$

Para que seja possível a interpolação inversa a cada valor de y só pode corresponder um valor de λ e vice-versa. Desse modo, a curva de $f(x)$ versus x não pode apresentar um máximo ou mínimo no interior do intervalo $[a, b]$, ou seja deve ser monótona crescente ou decrescente em todo o intervalo. Isso também garante que $y_a - y_m \neq 0$ e $y_b - y_m \neq 0$

- (b) Aplique o procedimento na determinação da raiz real positiva da função: $f(x) = e^{-x} - 2 \cdot x^2$, considerando o primeiro intervalo de busca: $0 < x < 1$. Compare a velocidade de convergência do método com a obtida no método da bisseção. (Considere em sua explanação apenas as cinco primeiras iterações).

Resposta:

Na Tabela abaixo, apresenta-se o procedimento iterativo resultante da aplicação do método proposto:

k	1	2	3	4	5	6	7
a	0	0	0	0	0	0	0
y_a	1	1	1	1	1	1	1
b	1	0,55	0,542	0,5404	0,54	0,5399	0,5398
y_B	-1,63	-0,02	-0,006	-0,0015	-0,0004	-0,0001	-0,0000
x_m	0,5	0,274	0,271	0,2702	0,27	0,2699	0,2699
y_m	0,11	0,61	0,62	0,6172	0,6176	0,6177	0,6177
λ	0,097	0,98	0,994	0,9985	0,9996	0,9999	1
x	0,55	0,542	0,5404	0,54	0,5399	0,5398	0,5398
y	-0,02	-0,006	-0,0015	-0,0004	-0,0001	-0,0000	-0,0000

Convergindo na sexta iteração.

Na Tabela abaixo mostramos o processo iterativo resultante da aplicação do método da bisseção.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5313	0,5313	0,5391	0,5391	0,5391
y_a	1	0,1065	0,1065	0,1065	0,1065	0,0234	0,0234	0,0021	0,0021	0,0021
b	1	1	0,75	0,625	0,5625	0,5625	0,5469	0,5469	0,5430	0,5410
y_B	-1,63	-1,63	-0,6526	-0,246	-0,063	-0,063	-0,0194	-0,0194	-0,0086	-0,0032
x_m	0,5	0,75	0,625	0,5625	0,5313	0,5459	0,5391	0,5430	0,5410	0,5400
y_m	0,1065	-0,6526	-0,246	-0,063	0,0234	-0,0194	0,0021	-0,0086	-0,0032	-0,0006

Na décima quinta iteração converge para a solução: 0,5398

Verifica-se assim a maior velocidade de convergência do procedimento, entretanto deve-se enfatizar que cada passo do novo procedimento envolve mais cálculos do que a do método da bisseção!