CAP. 7 - Lista de exercícios

1) Determine (a partir da definição de concavidade e convexidade) a concavidade ou convexidade das funções:

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 3\cdot(x_2 + 1)^2$ no domínio: $x_1, x_2 \geq 0$;

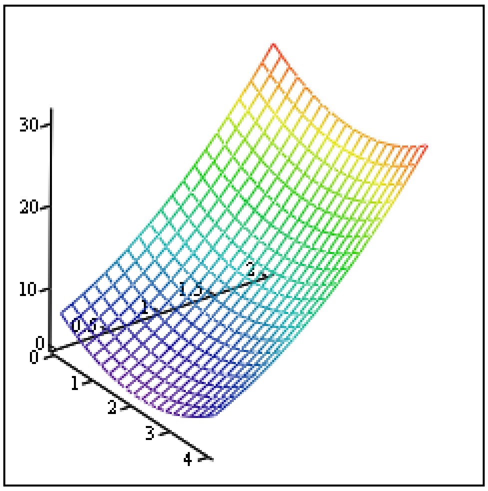
$G(x) := \nabla_x f1(x)$ $G(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot x_0 - 4 \\ 6\cdot x_1 + 6 \end{pmatrix}$

$H(x) := \text{Jacob}(G(x), x)$ $H(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

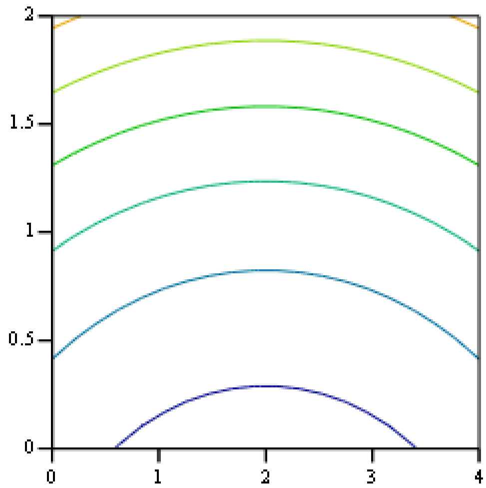
$\text{eigenvals}(H(x)) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ==> função convexa!

$f(y, z) := f1\left(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right)$

$M := \text{CreateMesh}(f, 0, 4, 0, 2)$



M



M

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = 2\cdot x_1^2 + x_2^2 - 3\cdot x_3^2$ no domínio: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

$G(x) := \nabla_x f2(x)$ $G(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 4\cdot x_0 \\ 2\cdot x_1 \\ -6\cdot x_2 \end{pmatrix}$

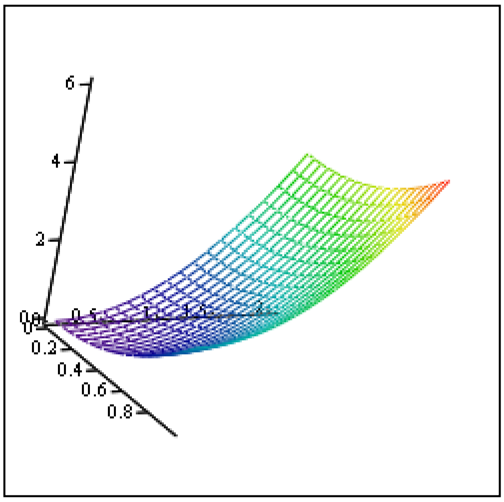
$H(x) := \text{Jacob}(G(x), x)$ $H(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$\text{eigenvals}(H(x)) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ ==> função nem côncava nem convexa!

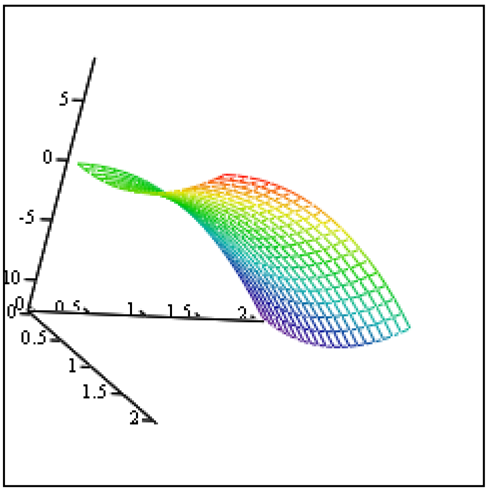
$$f\_0(y,z) := f2\left(\begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad f\_1(y,z) := f2\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ z \end{pmatrix}\right) \qquad f\_2(y,z) := f2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

M0 := CreateMesh (f_0, 0, 1, 0, 2) M1 := CreateMesh (f_1, 0, 2, 0, 2)

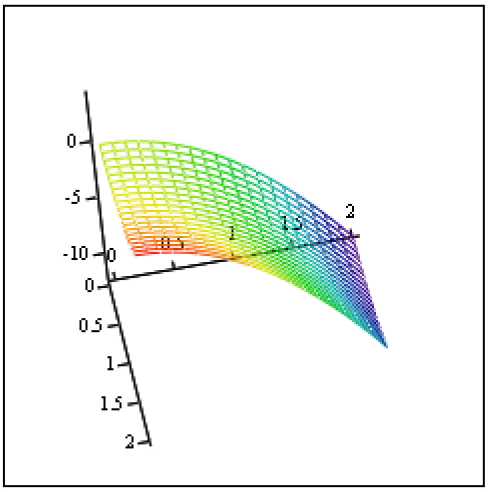
M2 := CreateMesh (f_2, 0, 2, 0, 2)



M0



M1



M2

2) Determine a localização e a natureza dos pontos estacionários das funções abaixo, determine também (em cada caso) o máximo e o mínimo globais:

$$\text{(a)}\, f(x) = \frac{2\cdot x}{1+x^2} \quad \text{para} \quad x \geq 0;$$

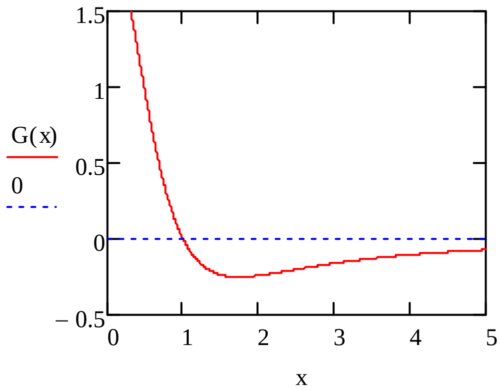
$$G(x) := \nabla_x fa(x) \qquad G(x) \text{ simplify } \rightarrow -\frac{2\cdot\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

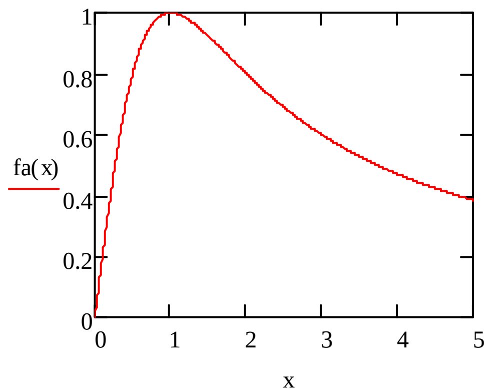
G(x) = 0 ==> xo := 1

$H(x) := \mathrm{Jacob}(G(x), x)$ $\qquad$ $H(x)\ \mathrm{simplify} \ \rightarrow \dfrac{4\cdot x\cdot\left(x^2 - 3\right)}{\left(x^2 + 1\right)^3}$

$H(xo) = -1$

==> máximo global





(b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}$ para $-\pi \le x \le \pi$;

$G(x) := \nabla_x fb(x)$ $\qquad$ $G(x)\ \mathrm{collect} \ \rightarrow -\dfrac{\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{x^2}$

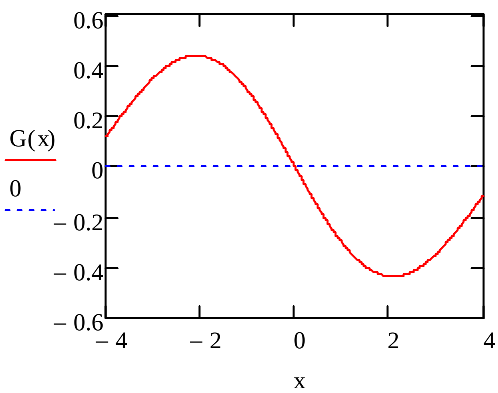
$xo := \mathrm{root}(G(x), x, -\pi, \pi)$ $\qquad$ $xo = 0$

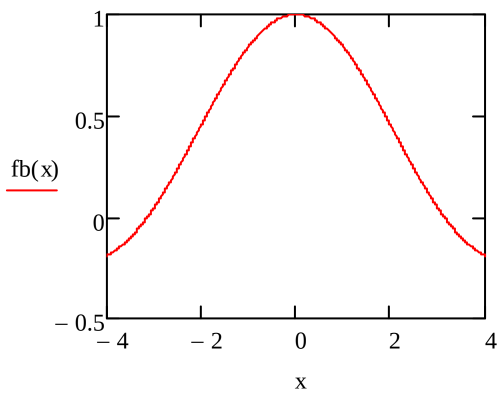
Nota: $\lim_{x \to 0} G(x) \ \rightarrow 0$

$H(x) := \mathrm{Jacob}(G(x), x)$ $\qquad$ $H(x)\ \mathrm{simplify} \ \rightarrow -\dfrac{x^2\cdot\sin(x) - 2\cdot\sin(x) + 2\cdot x\cdot\cos(x)}{x^3}$

$H(xo) = -0.333$

==> máximo global





$$(c)\ f(x) = e^{-x^2} \cdot \text{sen}(x) \quad \text{para } 0 \le x \le \pi;$$

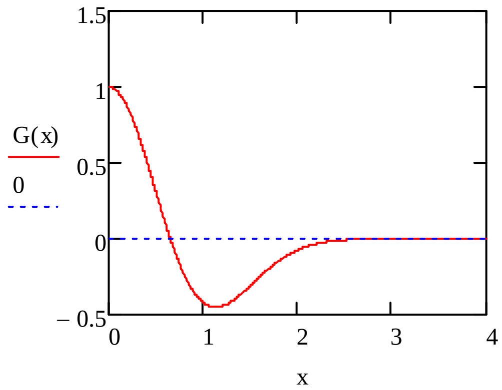
$G(x) := \nabla_x fc(x)$ $\qquad$ $G(x)\ \text{simplify} \rightarrow e^{-x^2} \cdot (\cos(x) - 2 \cdot x \cdot \sin(x))$

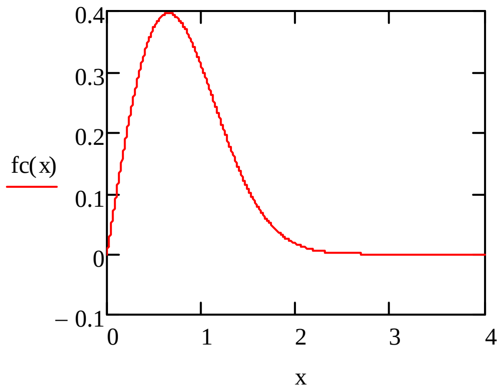
$xo := \text{root}(G(x), x, 0, \pi)$ $\qquad$ $xo = 0.653$

$H(x) := \text{Jacob}(G(x), x)$ $\qquad$ $H(x)\ \text{factor} \rightarrow e^{-x^2} \cdot \left(4 \cdot x^2 \cdot \sin(x) - 3 \cdot \sin(x) - 4 \cdot x \cdot \cos(x)\right)$

$H(xo) = -1.867$

==> máximo global





$$(d)\ f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_2^2;$$

$G(x) := \nabla_x fd(x)$ $\qquad$ $G(x)\ \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \cdot (x_0)^2 - 3 \cdot x_1 \\ 6 \cdot x_1 - 3 \cdot x_0 \end{bmatrix}$

$x0(x1) := 2 \cdot x1$

$r(x1) := 3 \cdot x0(x1)^2 - 3 \cdot x1\ \text{factor} \rightarrow 3 \cdot x1 \cdot (4 \cdot x1 - 1)$ = 0

$xo1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $G(xo1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $xo2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $G(xo2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H(x) := \text{Jacob}(G(x), x)$ $\qquad$ $H(x)\ \text{factor} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \cdot x_0 & -3 \\ -3 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix}$

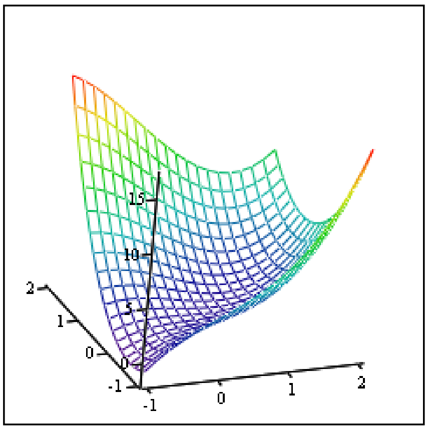
$H(xo1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $H(xo2) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$\text{eigenvals}(H(xo1)) = \begin{pmatrix} -1.243 \\ 7.243 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\text{eigenvals}(H(xo2)) = \begin{pmatrix} 1.146 \\ 7.854 \end{pmatrix}$

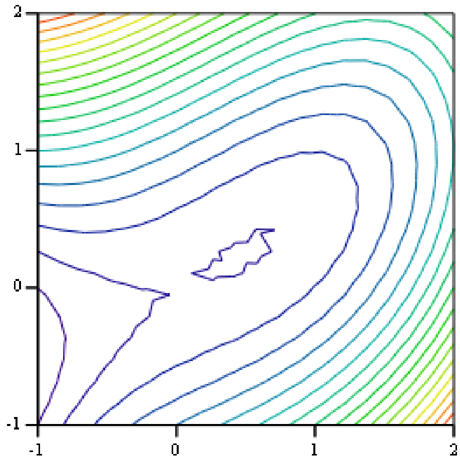
==> ponto sela $\qquad$ ==> mínimo global

$f(y,z) := fd\left(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right)$

$M := CreateMesh(f,-1,2,-1,2)$



M



M

$$\text{(e)}\, f(x_1,x_2) = -x_1^2 - \frac{1}{2}\cdot x_2^2 + x_1\cdot x_2 + x_1 \quad \text{para } x_1, x_2 \geq 0.$$

$G(x) := \nabla_x fe(x)$ $\qquad$ $G(x) \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - 2\cdot x_0 + 1 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix}$

$x0(x1) := x1$

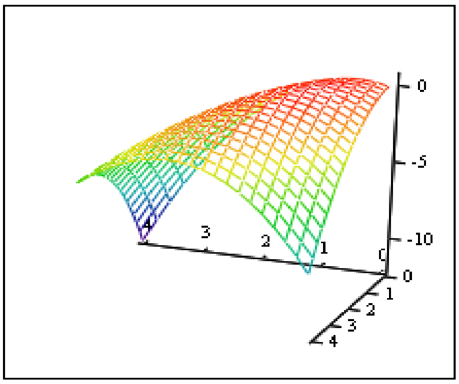
$r(x1) := x1 - 2\cdot x0(x1) + 1 \rightarrow 1 - x1 = 0$

$xo := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $G(xo) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

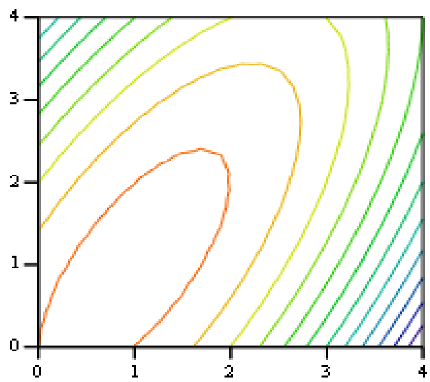
$H(x) := Jacob(G(x),x)$ $\qquad$ $H(x) \text{ factor } \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$eigenvals(H(xo)) = \begin{pmatrix} -2.618 \\ -0.382 \end{pmatrix}$ $\qquad$ ==> máximo global

$f(y,z) := fe\left(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right)$ $\qquad$ $M := CreateMesh(f,0,4,0,4)$



M



M

$TOL := 10^{-9}$

7) Em um reator químico é conduzida uma reação química irreversível de segunda ordem, o processo é em batelada. O balanço de massa do reagente é descrito pela equação diferencial:

$$\frac{dc(t)}{dt} = -k \cdot [c(t)]^2 \quad \text{com} \quad c(0) = c_0$$

A variação da concentração do reagente com o tempo é medida construindo-se a tabela:

t (min)	1	2	3	4	5	7	10	12	15	20	25
c x100 (mol/lit)	4.049	3.086	2.604	2.222	1.912	1.524	1.142	0.980	0.741	0.649	0.521

Baseado nestes dados estime os valores de k e de c_0.

<u>Resolução</u>: Reescrevendo a equação na forma:

$$-\frac{dc(t)}{[c(t)]^2} = k \cdot dt \Rightarrow \frac{1}{c(t)} - \frac{1}{c_0} = k \cdot t \Rightarrow c(t) = \frac{c_0}{1 + k \cdot c_0 \cdot t} = \frac{c_0}{1 + c_1 \cdot t} \quad \text{sendo: } c_1 = k \cdot c_0$$

Definindo: $S(c_0, c_1) = \sum_{i=1}^{11} \left[c_{\exp}(t_i) - \frac{c_0}{1 + c_1 \cdot t_i} \right]^2$, assim:

$$\frac{\partial S(c_0, c_1)}{\partial c_0} = -2 \sum_{i=1}^{11} \frac{1}{(1 + c_1 \cdot t_i)} \cdot \left[c_{\exp}(t_i) - \frac{c_0}{1 + c_1 \cdot t_i} \right] = 0 \Rightarrow c_0(c_1) = \frac{\sum_{i=1}^{11} \left(\frac{c_{\exp}(t_i)}{1 + c_1 \cdot t_i} \right)}{\sum_{i=1}^{11} \frac{1}{(1 + c_1 \cdot t_i)^2}}$$

e

$$\frac{\partial S(c_0, c_1)}{\partial c_1} = 2 c_0 \sum_{i=1}^{11} \frac{t_i}{(1 + c_1 \cdot t_i)^2} \cdot \left[c_{\exp}(t_i) - \frac{c_0}{1 + c_1 \cdot t_i} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$f(c_1) = \sum_{i=1}^{11} \frac{t_i}{(1 + c_1 \cdot t_i)^2} \cdot \left[c_{\exp}(t_i) - \frac{c_0(c_1)}{1 + c_1 \cdot t_i} \right] = 0$$

$$t := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 4.049 \\ 3.086 \\ 2.604 \\ 2.222 \\ 1.912 \\ 1.524 \\ 1.142 \\ .98 \\ .741 \\ .649 \\ .521 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} \qquad i := 0 .. 10$$

Solução do Problema *Linear* Considerando o Ajuste de 1/c *versus* t, para dar o chute inicial

$$y_i := \frac{1}{c_i} \qquad a_0 := \text{intercept}(t, y) \qquad a_1 := \text{slope}(t, y) \qquad C_0 := \frac{1}{a_0} \qquad C_1 := \frac{a_1}{a_0}$$

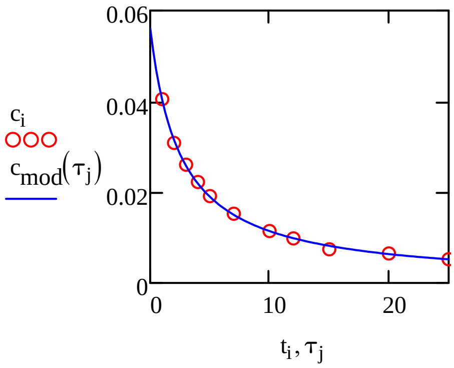
Primeiro Método: anulando as duas derivadas da soma do quadrado dos erros

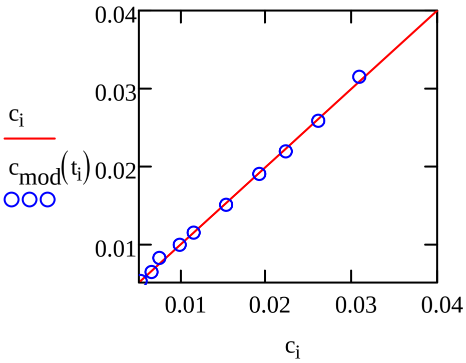
$$g(\alpha) := \frac{\sum_i \frac{c_i}{1+\alpha \cdot t_i}}{\sum_i \frac{1}{\left(1+\alpha \cdot t_i\right)^2}} \qquad f(\alpha) := \sum_i \left[\frac{t_i}{\left(1+\alpha \cdot t_i\right)^2} \cdot \left[c_i - \frac{g(\alpha)}{\left(1+\alpha \cdot t_i\right)}\right]\right] \qquad \alpha := C_1 \qquad f(\alpha) = 3.3165 \times 10^{-5}$$

$$\alpha := \mathrm{root}(f(\alpha), \alpha) \qquad \alpha = 0.391076$$

$$c_{inicial} := g(\alpha) \qquad k := \frac{\alpha}{c_{inicial}} \qquad c_{inicial} \cdot 100 = 5.610581 \qquad k = 6.970327$$

$$c_{mod}(t) := \frac{c_{inicial}}{1+\alpha \cdot t} \qquad d := \begin{pmatrix} c_{inicial} \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad j := 0 .. 100 \qquad \tau_j := t_{10} \cdot \frac{j}{100}$$





Segundo Método: usando direto a função Minimize do MATHCAD

$$S(C) := \sum_i \left(c_i - \frac{C_0}{1+C_1 \cdot t_i}\right)^2 \qquad C := \mathrm{Minimize}(S, C) \qquad C^T = (0.056106 \quad 0.391075)$$

$$C_{inicial} := C_0 \qquad K := \frac{C_1}{C_0} \qquad C_{inicial} \cdot 100 = 5.610571 \qquad K = 6.970315$$

$$S(C) = 1.247749 \times 10^{-6} \qquad S(d) = 1.247749 \times 10^{-6} \qquad |C - d| = 1.4 \times 10^{-6}$$

$$S(C) - S(d) = 1.842756 \times 10^{-15}$$

$TOL := 10^{-9}$

8) A intensidade de radiação de uma fonte radioativa é expressa por: $I(t) = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t}$.
Determine os valores de I_0 e de α que melhor ajustem os dados experimentais abaixo:

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I(t)	3.16	2.38	1.75	1.34	1.00	0.74	0.56

$i := 0..6$ $\qquad t_i := .2 + .1 \cdot i$ $\qquad I := \begin{pmatrix} 3.16 \\ 2.38 \\ 1.75 \\ 1.34 \\ 1.00 \\ 0.74 \\ 0.56 \end{pmatrix}$ $\qquad y := \ln(I)$

Solução do Problema *Linear* Considerando o Ajuste de ln[I(t)] *versus* t, para dar o chute inicial

$a_0 := \text{intercept}(t, y)$ $\qquad a_1 := \text{slope}(t, y)$ $\qquad a_0 := e^{a_0}$ $\qquad a^T = (5.631019 \quad -2.888285)$

Primeiro Método) Construindo a equação de diferenças como chute inicial e depois resolvendo a regressão não linear

$$p := \frac{\sum_{i=0}^{5} \left(I_i \cdot I_{i+1}\right)}{\sum_{i=0}^{5} \left(I_i\right)^2} \qquad p = 0.749248 \qquad C_1 := 10 \cdot \ln(p) \qquad C_0 := \frac{\sum_i \left(e^{C_1 \cdot t_i} \cdot I_i\right)}{\sum_i e^{2 \cdot C_1 \cdot t_i}} \qquad C^T = (5.629403 \quad -2.886846)$$

$$g(\alpha) := \frac{\sum_i \left(e^{\alpha \cdot t_i} \cdot I_i\right)}{\sum_i e^{2 \cdot \alpha \cdot t_i}} \qquad f(\alpha) := \sum_i \left[t_i \cdot e^{\alpha \cdot t_i} \cdot \left(I_i - g(\alpha) \cdot e^{\alpha \cdot t_i}\right)\right] \qquad \alpha := C_1 \qquad f(\alpha) = -3.01368 \times 10^{-4}$$

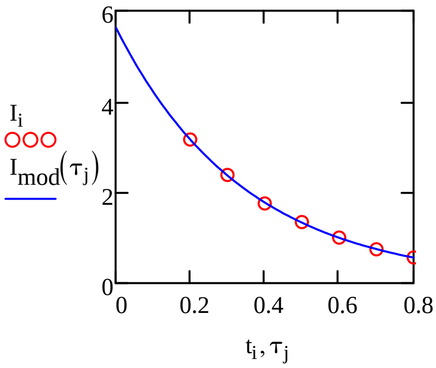
$\alpha := \text{root}(f(\alpha), \alpha)$ $\qquad C := \begin{pmatrix} g(\alpha) \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\qquad C^T = (5.636061 \quad -2.890593)$

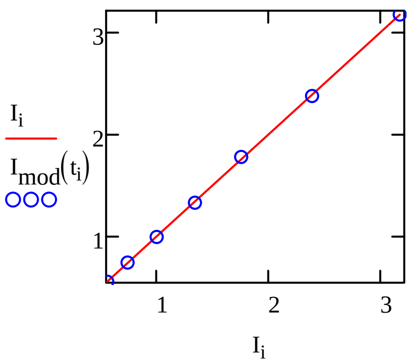
$$S(C) := \sum_i \left(I_i - C_0 \cdot e^{C_1 \cdot t_i}\right)^2 \qquad S(C) = 8.939661 \times 10^{-4} \qquad I_{mod}(t) := C_0 \cdot e^{C_1 \cdot t}$$

Segundo Método) Usando a função Minimize do MATHCAD

$c := \text{Minimize}(S, a)$ $\qquad c^T = (5.636061 \quad -2.890593)$ $\qquad S(c) = 8.939661 \times 10^{-4}$

$j := 0..100$ $\qquad \tau_j := t_6 \cdot \frac{j}{100}$





$TOL := 10^{-9}$

9) y é uma função de x dada pela tabela abaixo, sabe-se que esta dependência é expressa por: $y(x) = A \cdot e^{-\alpha \cdot x} + B \cdot e^{-\beta \cdot x}$. Determine os valores de A, B, α e β.

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
y(x)	2.31604	2.02877	1.78030	1.56513	1.37854	1.21651	1.07561	0.95289

$$x := \begin{pmatrix} .4 \\ .5 \\ .6 \\ .7 \\ .8 \\ .9 \\ 1.0 \\ 1.1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 2.31604 \\ 2.02877 \\ 1.78030 \\ 1.56513 \\ 1.37854 \\ 1.21651 \\ 1.07561 \\ 0.95289 \end{pmatrix}$$

Construindo a equação de diferenças como chute inicial e depois resolvendo a regressão não linear por Newton-Raphson

$$s := -\left[\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{5} (y_i)^2 & \sum_{i=0}^{5} (y_i \cdot y_{i+1}) \\ \sum_{i=0}^{5} (y_i \cdot y_{i+1}) & \sum_{i=0}^{5} (y_{i+1})^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{5} (y_i \cdot y_{i+2}) \\ \sum_{i=0}^{5} (y_{i+1} \cdot y_{i+2}) \end{bmatrix}\right] \qquad s = \begin{pmatrix} 0.79045 \\ -1.7799 \end{pmatrix} \qquad s_2 := 1$$

$$v := \text{polyroots}(s) \qquad v = \begin{pmatrix} 0.85039 \\ 0.92951 \end{pmatrix}$$

$$\lambda := 10 \cdot \ln(v) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} -1.62059 \\ -0.73095 \end{pmatrix}$$

$$i := 0..7 \qquad j := 0..1 \qquad A_{i,j} := e^{\lambda_j \cdot x_i} \qquad c := \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot y \qquad c^T = (2.99719 \quad 1.00284)$$

$$a := \begin{pmatrix} c_0 \\ \lambda_0 \\ c_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \qquad y_{mod}(x,\alpha) := \alpha_0 \cdot e^{\alpha_1 \cdot x} + \alpha_2 \cdot e^{\alpha_3 \cdot x} \qquad erro(i,\alpha) := y_i - y_{mod}(x_i,\alpha)$$

$$S(\alpha) := \sum_i erro(i,\alpha)^2 \qquad S(a) = 1.81 \times 10^{-11} \qquad \delta := 10^{-6} \qquad I := \text{identity}(4)$$

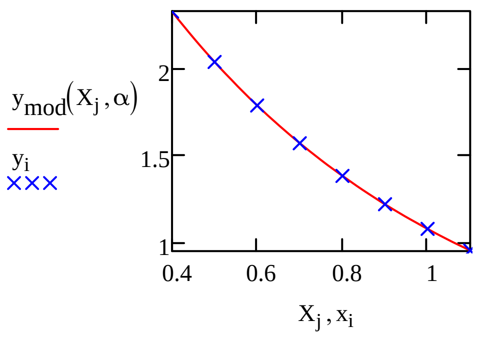
$$g(\alpha) := \left| \begin{array}{l} g_0 \leftarrow \sum_i \left(e^{\alpha_1 \cdot x_i} \cdot erro(i,\alpha)\right) \\ g_1 \leftarrow \sum_i \left(e^{\alpha_1 \cdot x_i} \cdot x_i \cdot erro(i,\alpha)\right) \\ g_2 \leftarrow \sum_i \left(e^{\alpha_3 \cdot x_i} \cdot erro(i,\alpha)\right) \\ g_3 \leftarrow \sum_i \left(e^{\alpha_3 \cdot x_i} \cdot x_i \cdot erro(i,\alpha)\right) \\ g \end{array} \right.$$

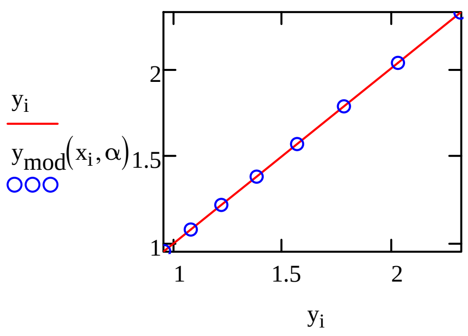
$$J(\alpha) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow g(\alpha) \\ \text{for } j \in 0..3 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \beta \leftarrow \alpha + \delta \cdot I^{\langle j \rangle} \\ J^{\langle j \rangle} \leftarrow \dfrac{g(\beta) - f}{\delta} \end{array} \right. \\ J \end{array} \right.$$

$$\text{solução}(\alpha) := \left| \begin{array}{l} flag \leftarrow 0 \\ f \leftarrow g(\alpha) \\ \text{while } flag = 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \beta \leftarrow \alpha - J(\alpha)^{-1} \cdot f \\ f \leftarrow g(\beta) \\ flag \leftarrow 1 \text{ if } |\beta - \alpha| < TOL \\ flag \leftarrow 1 \text{ if } |f| < TOL \\ \alpha \leftarrow \beta \end{array} \right. \\ \beta \end{array} \right.$$

$a^T = (2.99719 \quad -1.62059 \quad 1.00284 \quad -0.73095$ $\alpha := \text{solução}(a)$ $\alpha^T = (2.99616 \quad -1.62083 \quad 1.00391 \quad -0.73129$ $S(\alpha) = 1.61 \times 10^{-11}$

$j := 0..50$ $\qquad X_j := .4 + .7 \cdot \frac{j}{50}$ $\qquad |\alpha - a| = 1.54 \times 10^{-3}$





Construindo a equação de diferenças como chute inicial e depois resolvendo a regressão não linear pelo *Minimize* do MATHCAD

$c := \text{Minimize}(S, a)$ $\qquad c^T = (2.99719 \quad -1.62059 \quad 1.00284 \quad -0.73095)$

$|c - a| = 0$ $\qquad$ Observa-se que o *Minimize* não conseguiu refinar os valores dos coeficientes!

10) y é uma função de x dada pela tabela abaixo, sabe-se que esta dependência é expressa por: $y(x) = C \cdot e^{-a \cdot x} \cdot sen(b \cdot x)$. Determine os valores de $\underline{C}$, $\underline{a}$ e $\underline{b}$

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$y(x)$	0.00000	0.15398	0.18417	0.16156	0.12301	0.08551	0.05537	0.03362	0.01909

$TOL := 10^{-9}$ $\quad i := 0..8$ $\quad x_i := i \cdot .2$

$$y := \begin{pmatrix} .00000 \\ .15398 \\ .18417 \\ .16156 \\ .12301 \\ .08551 \\ .05537 \\ .03362 \\ .01909 \end{pmatrix}$$

Construindo a equação de diferenças como chute inicial e depois resolvendo a regressão não linear por Newton-Raphson

$$s := -\left[\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{6} (y_i)^2 & \sum_{i=0}^{6} (y_i \cdot y_{i+1}) \\ \sum_{i=0}^{6} (y_i \cdot y_{i+1}) & \sum_{i=0}^{6} (y_{i+1})^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{6} (y_i \cdot y_{i+2}) \\ \sum_{i=0}^{6} (y_{i+1} \cdot y_{i+2}) \end{bmatrix}\right] \qquad s = \begin{pmatrix} 0.38135 \\ -1.19607 \end{pmatrix} \quad s_2 := 1$$

$$v := \text{polyroots}(s) \qquad v = \begin{pmatrix} 0.59803 + 0.15395i \\ 0.59803 - 0.15395i \end{pmatrix}$$

$a := 5 \cdot \ln\left(\left|\text{Re}(v_0)\right|\right)$ $\quad b := 5 \cdot \left|\arg(v_1)\right|$ $\quad a = -2.57053$ $\quad b = 1.2598$

$$C := \frac{\sum_i \left(e^{a \cdot x_i} \cdot \sin(b \cdot x_i) \cdot y_i\right)}{\sum_i \left(e^{a \cdot x_i} \cdot \sin(b \cdot x_i)\right)^2} \qquad y_{mod}(x, \alpha) := \alpha_0 \cdot e^{\alpha_1 \cdot x} \cdot \sin(\alpha_2 \cdot x) \qquad \text{erro}(i, \alpha) := y_i - y_{mod}(x_i, \alpha)$$

$$C = 1.08661 \qquad S(\alpha) := \sum_i \text{erro}(i, \alpha)^2$$

$$c := \begin{pmatrix} C \\ a \\ b \end{pmatrix} \qquad S(c) = 2.14 \times 10^{-4} \qquad \delta := 10^{-6} \qquad I := \text{identity}(3)$$

$$g(\alpha) := \left| \begin{array}{l} g_0 \leftarrow \sum_i \left(e^{\alpha_1 \cdot x_i} \cdot \sin(\alpha_2 \cdot x_i) \cdot \text{erro}(i, \alpha)\right) \\ g_1 \leftarrow \sum_i \left(e^{\alpha_1 \cdot x_i} \cdot \sin(\alpha_2 \cdot x_i) \cdot x_i \cdot \text{erro}(i, \alpha)\right) \\ g_2 \leftarrow \sum_i \left(e^{\alpha_1 \cdot x_i} \cdot \cos(\alpha_2 \cdot x_i) \cdot x_i \cdot \text{erro}(i, \alpha)\right) \\ g \end{array} \right.$$

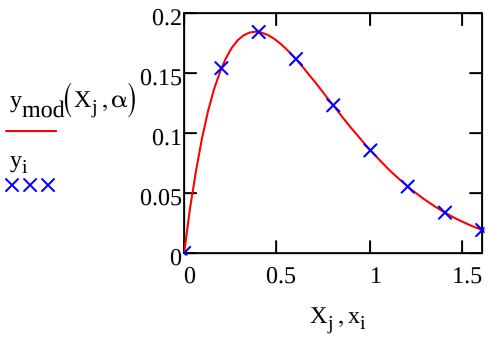
$$J(\alpha) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow g(\alpha) \\ \text{for } j \in 0..2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \beta \leftarrow \alpha + \delta \cdot I^{\langle j \rangle} \\ J^{\langle j \rangle} \leftarrow \dfrac{g(\beta) - f}{\delta} \end{array} \right. \\ J \end{array} \right.$$

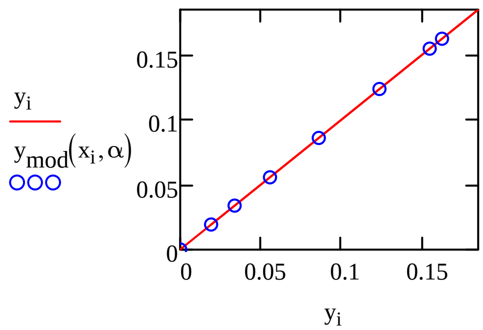
$$
\text{solução}(\alpha) := \left|
\begin{array}{l}
\text{flag} \leftarrow 0 \\
f \leftarrow g(\alpha) \\
\text{while flag} = 0 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\beta \leftarrow \alpha - J(\alpha)^{-1} \cdot f \\
f \leftarrow g(\beta) \\
\text{flag} \leftarrow 1 \ \text{ if } \ |\beta - \alpha| < TOL \\
\text{flag} \leftarrow 1 \ \text{ if } \ |f| < TOL \\
\alpha \leftarrow \beta
\end{array}
\right. \\
\beta
\end{array}
\right.
$$

$\alpha := \text{solução}(c)$ $\qquad \alpha^T = (1.00011 \quad -2.41007 \quad 1.25987)$

$S(\alpha) = 4.29 \times 10^{-11}$

$j := 0..50$ $\qquad X_j := 1.6 \cdot \frac{j}{50}$ $\qquad |\alpha - a| = 5.24$





Construindo a equação de diferenças como chute inicial e depois resolvendo a regressão não linear pelo *Minimize* do MATHCAD

$\beta := \text{Minimize}(S, c)$ $\qquad \beta^T = (1.00011 \quad -2.41007 \quad 1.25987)$ $\qquad |\alpha - \beta| = 3.3555 \times 10^{-7}$

Valor *quase* idêntico ao obtido por Newton-Raphson

$S(\beta) = 4.29 \times 10^{-11}$

11) y é uma função de x dada pela tabela abaixo, sabe-se que esta dependência é expressa por: $y(x) = A \cdot e^{-\alpha \cdot x} + B$. Determine os valores de A, B e α

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
y(x)	3.00767	2.79720	2.61553	2.45874	2.32340	2.20659	2.10576	2.01874	1.94363	1.87880	1.82284

$TOL := 10^{-9}$ $\quad i := 0..10$ $\quad x_i := 1 + .2 \cdot i$

$$y := \begin{pmatrix} 3.00767 \\ 2.79720 \\ 2.61553 \\ 2.45874 \\ 2.32340 \\ 2.20659 \\ 2.10576 \\ 2.01874 \\ 1.94363 \\ 1.87880 \\ 1.82284 \end{pmatrix} \qquad \delta := 10^{-6} \qquad I := \text{identity}(3)$$

Construindo a equação de diferenças como chute inicial e depois resolvendo a regressão não linear por Newton-Raphson

$$b := \frac{\sum_{i=0}^{8} \left[\left(y_{i+1} - y_i\right)\cdot\left(y_{i+2} - y_{i+1}\right)\right]}{\sum_{i=0}^{8} \left(y_{i+1} - y_i\right)^2} \qquad s := \begin{bmatrix} b \\ -(1+b) \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v := \text{polyroots}(s) \qquad v = \begin{pmatrix} 0.86313 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b = 0.86313$$

$$\alpha := 5 \cdot \ln(b) \quad A_{i,0} := 1 \quad A_{i,1} := e^{\alpha \cdot x_i} \qquad c := \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot y \qquad c = \begin{pmatrix} 1.46996 \\ 3.20994 \end{pmatrix} \qquad c_2 := \alpha \qquad c^T = (1.46996 \;\; 3.20994 \;\; -0.73596)$$

$$y_{mod}(x,\alpha) := \alpha_0 + \alpha_1 \cdot e^{\alpha_2 \cdot x} \qquad erro(i,\alpha) := y_i - y_{mod}\left(x_i,\alpha\right) \qquad S(\alpha) := \sum_i erro(i,\alpha)^2 \qquad S(c) = 1.22 \times 10^{-10}$$

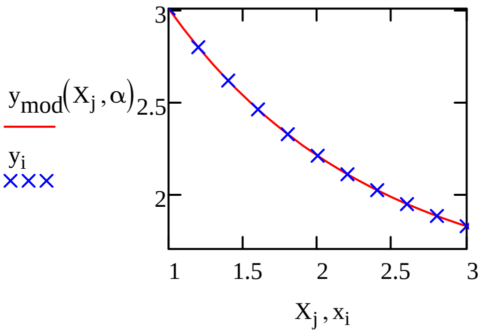
$$g(\alpha) := \left| \begin{array}{l} g_0 \leftarrow \sum_i erro(i,\alpha) \\ g_1 \leftarrow \sum_i \left(e^{\alpha_2 \cdot x_i} \cdot erro(i,\alpha)\right) \\ g_2 \leftarrow \sum_i \left(e^{\alpha_2 \cdot x_i} \cdot x_i \cdot erro(i,\alpha)\right) \\ g \end{array} \right.$$

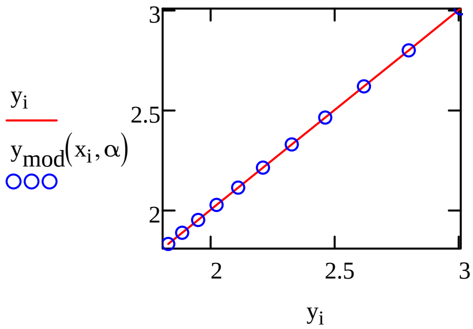
$$J(\alpha) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow g(\alpha) \\ \text{for } j \in 0..2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \beta \leftarrow \alpha + \delta \cdot I^{\langle j \rangle} \\ J^{\langle j \rangle} \leftarrow \dfrac{g(\beta) - f}{\delta} \end{array} \right. \\ J \end{array} \right.$$

$$\text{solução}(\alpha) := \left| \begin{array}{l} flag \leftarrow 0 \\ f \leftarrow g(\alpha) \\ \text{while } flag = 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \beta \leftarrow \alpha - J(\alpha)^{-1} \cdot f \\ f \leftarrow g(\beta) \\ flag \leftarrow 1 \text{ if } |\beta - \alpha| < TOL \\ flag \leftarrow 1 \text{ if } |f| < TOL \\ \alpha \leftarrow \beta \end{array} \right. \\ \beta \end{array} \right.$$

$$\alpha := \text{solução}(c) \qquad \alpha^T = (1.46998 \;\; 3.20997 \;\; -0.73598) \quad S(\alpha) = 6.72 \times 10^{-11}$$

$j := 0 .. 50 \qquad X_j := 1 + \frac{j}{20}$





Construindo a equação de diferenças como chute inicial e depois resolvendo a regressão não linear pelo *Minimize* do MATHCAD

$\beta := \text{Minimize}(S, c) \qquad \beta^T = (1.46998 \quad 3.20997 \quad -0.73598) \qquad S(\beta) = 6.72 \times 10^{-11}$

$|\alpha - \beta| = 4.02 \times 10^{-7}$ Valor *quase* idêntico ao obtido por Newton-Raphson

12) Através de fotografias estroboscópicas de pequenas bolhas de ar é possível medir o perfil de velocidade próxima à parede de um tubo no qual escoa um fluido. Com um número de Reynolds de 1200 e com um tubo de 1 polegada de diâmetro interno os seguintes pontos experimentais são obtidos:

y (distância à parede) cm	u (velocidade) cm/s	y (distância à parede) cm	u (velocidade) cm/s
0.003	0.03	0.056	0.85
0.021	0.32	0.061	0.92
0.025	0.30	0.070	1.05
0.025	0.33	0.078	1.117
0.037	0.57	0.085	1.32
0.043	0.66	0.092	1.38
0.049	0.74	0.106	1.57
0.053	0.80	0.113	1.65
0.055	0.84		

A função que melhor ajusta o perfil de velocidade é: $u(y) = p \cdot y + q \cdot y^2$, baseado nos dados acima determine os valores de p e q.

$TOL := 10^{-9}$

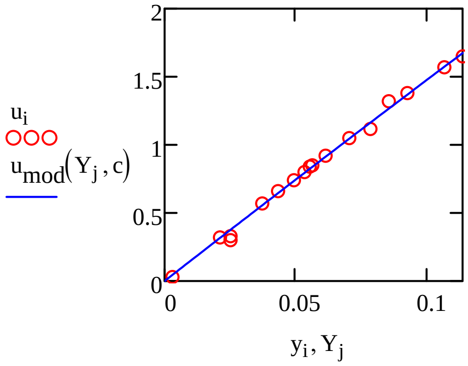
$$y := \begin{pmatrix} .003 \\ .021 \\ .025 \\ .025 \\ .037 \\ .043 \\ .049 \\ .053 \\ .055 \\ .056 \\ .061 \\ .070 \\ .078 \\ .085 \\ .092 \\ .106 \\ .113 \end{pmatrix} \qquad u := \begin{pmatrix} .03 \\ .32 \\ .30 \\ .33 \\ .57 \\ .66 \\ .74 \\ .80 \\ .84 \\ .85 \\ .92 \\ 1.05 \\ 1.117 \\ 1.32 \\ 1.38 \\ 1.57 \\ 1.65 \end{pmatrix}$$

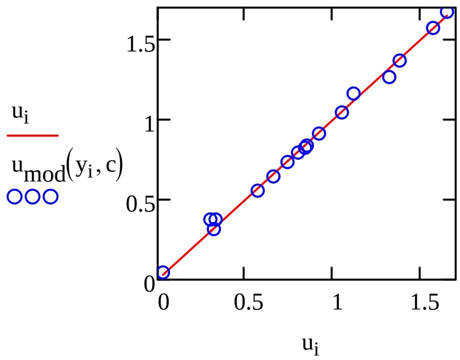
$i := 0 .. 16 \qquad A_{i,0} := y_i \qquad A_{i,1} := (y_i)^2$

$c := (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot u \qquad c = \begin{pmatrix} 15.12523 \\ -2.71883 \end{pmatrix}$

$u_{mod}(y, c) := y \cdot (c_0 + c_1 \cdot y)$

$j := 0 .. 100 \qquad Y_j := y_{16} \cdot \frac{j}{100}$





13) Os coeficientes de transferência de calor em trocadores da calor são adequadamente modelados por expressão do tipo:

$$Nu = \alpha \cdot \mathrm{Re}^{\beta} \cdot \mathrm{Pr}^{\gamma} \cdot r^{\delta}$$

Onde *Nu*, *Re* e *Pr* são, rspectivamente, os números de Nusselt, Reynolds e Prandt e *r* é a razão entre a viscosidade à temperatura média do fluido e à temperatura da parede; α, β, γ e δ são constantes. Os seguintes dados experimentais estão disponíveis:

Nu	*Re*	*Pr*	*r*
277	49000	2.30	0.947
348	68600	2.28	0.954
421	84800	2.27	0.959
223	34200	2.32	0.943
177	22900	2.36	0.936
114.8	1321	246	0.592
95.9	931	247	0.583
68.3	518	251	0.579
49.1	346	273	0.290
56.0	122.9	1518	0.294
39.9	54.0	1590	0.279
47.0	84.6	1521	0.267
94.2	1249	107.4	0.724
99.9	1021	186	0.612
83.1	465	414	0.512
35.9	54.8	1302	0.273

Estimar os valores de α, β, γ e δ que melhor ajustam os pontos acima.

$\mathrm{TOL} := 10^{-9}$

$$A := \begin{pmatrix} 277 & 49000 & 2.3 & .947 \\ 348 & 68600 & 2.28 & .954 \\ 421 & 84800 & 2.27 & .959 \\ 223 & 34200 & 2.32 & .943 \\ 177 & 22900 & 2.36 & .936 \\ 114.8 & 1321 & 246 & .592 \\ 95.9 & 931 & 247 & .583 \\ 68.3 & 518 & 251 & .579 \\ 49.1 & 346 & 273 & .29 \\ 56 & 122.9 & 1518 & .294 \\ 39.9 & 54 & 1590 & .279 \\ 47 & 84.6 & 1521 & .267 \\ 94.2 & 1249 & 107.4 & .724 \\ 99.9 & 1021 & 186 & .612 \\ 83.1 & 465 & 414 & .512 \\ 35.9 & 54.8 & 1302 & .273 \end{pmatrix}$$

Estimativa Inicial dos Parâmetros a Partir da Regressão Linear do Logaritmo da Função

$i := 0..15 \quad B_{i,0} := 1 \quad k := 1..3 \quad B^{\langle k\rangle} := \ln\left(A^{\langle k\rangle}\right)$

$c := \left(B^{T}\cdot B\right)^{-1}\cdot B^{T}\cdot \ln\left(A^{\langle 0\rangle}\right) \quad c^{T} = (-0.63 \ \ 0.56 \ \ 0.25 \ \ -0.07) \quad a_0 := e^{c_0} \quad a_k := c_k$

$\mathrm{Nusselt}(i,a) := a_0\cdot\left(A_{i,1}\right)^{a_1}\cdot\left(A_{i,2}\right)^{a_2}\cdot\left(A_{i,3}\right)^{a_3} \quad a^{T} = (0.5347 \ \ 0.5588 \ \ 0.2524 \ \ -0.0677)$

Minimização da Função Soma dos Quadrados dos Erros pelo *Minimize*

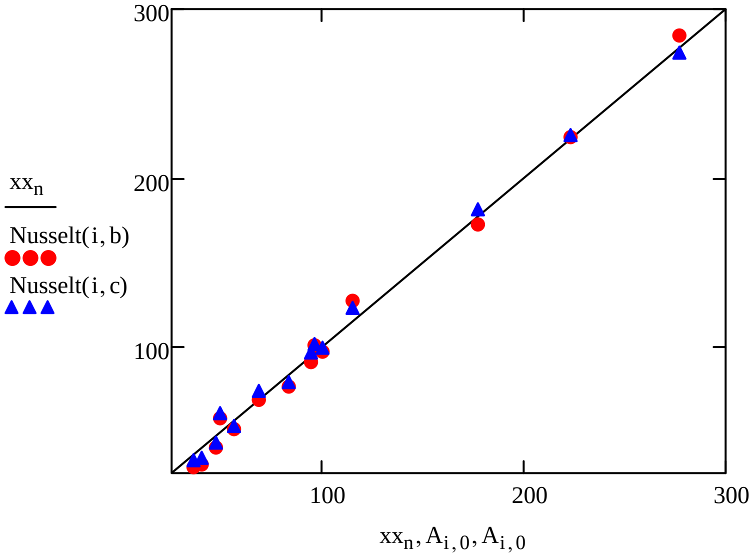
$$S(a) := \sum_i \left(A_{i,0} - \text{Nusselt}(i,a)\right)^2 \qquad S(a) = 2.82 \times 10^3$$

$$b := \text{Minimize}(S,a) \qquad b^T = (0.1512 \quad 0.6716 \quad 0.337 \quad -0.0991) \qquad S(b) = 8.2 \times 10^2$$

Minimização da Função Soma dos Quadrados dos Erros Relativos pelo *Minimize*

$$S_{rel}(a) := \sum_i \left(1 - \frac{\text{Nusselt}(i,a)}{A_{i,0}}\right)^2 \qquad S_{rel}(a) = 0.14 \qquad S_{rel}(b) = 0.19$$

$$c := \text{Minimize}(S_{rel},a) \qquad c^T = (0.5714 \quad 0.5519 \quad 0.2546 \quad -0.0052) \qquad S_{rel}(c) = 0.13 \qquad xx := \begin{pmatrix} 25 \\ 300 \end{pmatrix} \qquad n := 0..1$$



$$E_{1_i} := \left|A_{i,0} - \text{Nusselt}(i,b)\right| \qquad E_{2_i} := \left|A_{i,0} - \text{Nusselt}(i,c)\right| \qquad \max(E_1) = 12.44 \quad \max(E_2) = 51.28$$

$$Erel_{1_i} := \frac{E_{1_i}}{A_{i,0}} \cdot 100 \qquad Erel_{2_i} := \frac{E_{2_i}}{A_{i,0}} \cdot 100 \qquad \max(Erel_1) = 24.86 \quad \max(Erel_2) = 23.13$$

14) Encontre o mínimo das seguintes funções objetivo usando os métodos diretos e indiretos descritos nas seções 7.2 e 7.3 e compare os resultados em termos do número de funções objetivo avaliadas por cada método:

a) $S(x) = 100\,(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

R: $xo = [1 \quad 1]^T$ $\qquad S(xo) = 0$

b) $S(x) = [1{,}5 - x_1\,(1 - x_2)]^2 + [2{,}25 - x_1\,(1 - x_2^2)]^2 + [2{,}625 - x_1\,(1 - x_2^3)]^2$

R: $xo = [3 \quad 0{,}5]^T$ $\qquad S(xo) = 0$

c) $S(x) = 4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + x_2^2$

R: $xo = [0 \quad 0]^T$ $\qquad S(xo) = 0$

d) $S(x) = \exp(x_1)\,(4\,x_1^2 + 2\,x_2^2 + 4\,x_1\,x_2 + 2\,x_2 + 1)$

R: $xo = [0{,}5 \quad -1]^T$ $\qquad S(xo) = 0$

e) $S(x) = 4\,(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$

R: $xo = [5 \quad 6]^T$ $\qquad S(xo) = 0$

f) $S(x) = x_1^2 - 5\,x_1 + 3\,x_2^2 + 3$

R: $xo = [2{,}5 \quad 0]^T$ $\qquad S(xo) = -3{,}25$

g) $S(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$

R: $xo = [2 \quad 1]^T$ $\qquad S(xo) = 0$