Capítulo 2

Aproximações de Funções

Há basicamente dois tipos de problemas de aproximações:

i) encontrar uma função "mais simples", como um polinômio, para aproximar uma função dada de forma explícita;

ii) encontrar e ajustar a "melhor" função a dados (ou pontos) discretos.

O segundo problema será abordado no Capítulo 8, com a aplicação do método dos mínimos quadrados.

Existem inúmeras formas de aproximar uma função dada, $f(x)$, por funções "mais simples" ou com propriedades mais interessantes (diferenciação, integração, etc.), tais como:

- aproximação polinomial: $f(x) \cong p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$

- séries de potências: $f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

- frações continuadas: $f\left(x\right) \cong b_0\left(x\right) + \cfrac{a_1\left(x\right)}{b_1\left(x\right) + \cfrac{a_2\left(x\right)}{b_2\left(x\right) + \cfrac{a_3\left(x\right)}{b_3(x) + \cdots}}}$

- funções racionais: $f(x) \cong \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)} = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$

- séries de Fourier: $f(x) \cong a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)$

As aproximações polinomiais serão tratadas em detalhes no próximo capítulo. Portanto, começaremos pelas séries de potências.

2.1 Séries de potências

Se $f(x)$ é uma função contínua com n derivadas contínuas no intervalo $[a, b]$, ou seja, $f \in C^n[a, b]$ e $f^{(n+1)}(x)$ existe em $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$, então

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

onde $p_n(x)$ é o **polinômio de Taylor** de grau n:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

e $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}[\xi(x)]}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ é o erro de truncamento (ou resto) da série com $\xi \in [x_0, x]$.

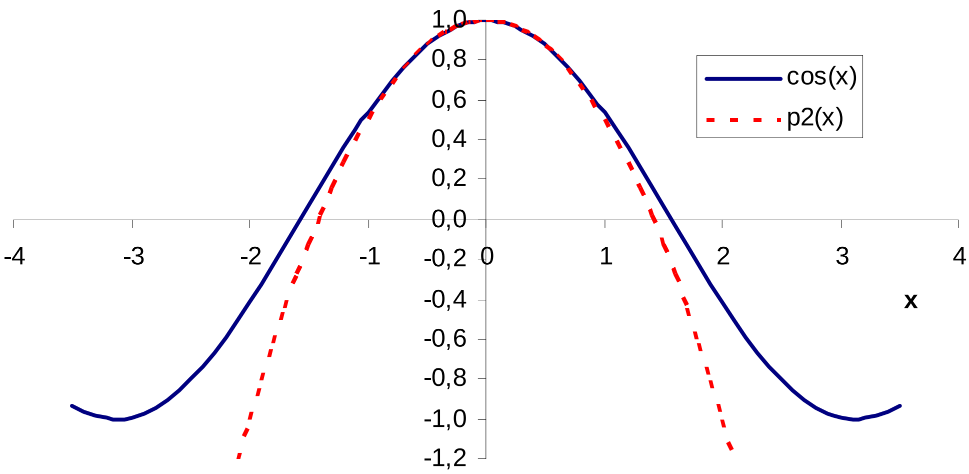
Quando $x_0 = 0$ tem-se o **polinômio de MacLaurin** e para $n \to \infty$ $p_n(x)$ é a série de Taylor (ou MacLaurin, $x_0 = 0$).

Exemplo: $f(x) = \cos(x)$, $n = 2$, $x_0 = 0$

$f'(x) = -\text{sen}(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f^{(3)}(x) = \text{sen}(x)$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$

$p_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ $\qquad R_2(x) = \text{sen}(\xi)\dfrac{x^3}{6}$



Os polinômios de Taylor concentram sua precisão próxima ao ponto x_0. Porém, uma boa aproximação deve ser relativamente precisa ao longo de todo o intervalo $[a, b]$.

Exemplo: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$f^{(k)}(x) = e^x \;\; \forall\, k$, $\quad f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

e $R_n(x) = \dfrac{e^{\xi(x)} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$, que é uma boa aproximação para $0 \le |\, x \,| < 1$.

Se $|\, x \,| \ge 1$ pode-se aplicar uma normalização do argumento x (mudança de variável):

$x \in [a, b] \to y = \dfrac{x-a}{b-a}$, $y \in [0, 1]$.

Por exemplo, se $x \in [0, 10] \to y = \dfrac{x}{10}$, $\quad f(x) = e^x \to f(y) = e^{10y} = (e^y)^{10}$

$$e^y \cong p_n(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{y^n}{n!}$$

Exercícios:

1) Implementar o algoritmo abaixo para aproximar $f(x) = e^x$ em polinômio de Taylor com critério de convergência δ para determinar o grau do polinômio:

$$\boxed{e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}}$$

$y \leftarrow x$
$m \leftarrow 0$
$n \leftarrow 0$
$T \leftarrow 1$
$S \leftarrow 1$

Enquanto $|\, y \,| \ge 1$, faça
    $m \leftarrow m + 1$
    $y \leftarrow y / 2$

Faça
    $n \leftarrow n + 1$
    $T \leftarrow \dfrac{y}{n} \cdot T$
    $S \leftarrow S + T$
enquanto $|\, T / S \,| > \delta$

Para $j = 1, 2, ..., m$, faça
    $S \leftarrow S \cdot S$

No final do algoritmo S contém o valor aproximado de e^x e n o número de termos necessários (grau de $p_n(x)$).

Exemplo numérico do exercício 1: x = -2,5 e $\delta = 10^{-4}$

Etapas do algoritmo passo-a-passo

PASSO	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
y	-2,5	-1,25	-0,625	-0,625	-0,625	-0,625	-0,625	-0,625	-0,625	-0,625	-0,625	-0,625
m	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
i	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	7	7
T	1	1	1	-0,625	0,19531	-0,0407	0,00636	-0,00079	0,00008	-0,00001	-0,00001	-0,00001
S	1	1	1	0,375	0,57031	0,52962	0,53598	0,53519	0,53527	0,53526	0,28650	0,08208
|T/S |				1,666667	0,34247	0,07683	0,01186	0,00148	0,00015	0,00001	0,00001	0,00001

O desempenho de um algoritmo para aproximação de funções por polinômios de Taylor depende da escolha apropriada do domínio da variável independente e do bom uso de propriedades da função $f(x)$. No exemplo a seguir são apresentados dois algoritmos diferentes para aproximar a função $f(x) = \cos(x)$ em polinômio de Taylor, sendo o primeiro de melhor desempenho.

2a) Implementar o algoritmo abaixo para aproximar $f(x) = \cos(x)$ em polinômio de Taylor com critério de convergência δ para determinar o grau do polinômio, sabendo-se que:

(i) $\cos(-x) = \cos(x)$: é uma função *par*;

(ii) $\cos(x + 2\cdot k\cdot\pi) = \cos(x)$: periodicidade da função cosseno;

(iii) $\cos(\alpha) = \cos(2\cdot\pi - \alpha)$ se $\pi < \alpha < 2\cdot\pi$;

(iv) $\cos(2\cdot\alpha) = 2\cdot[\cos(\alpha)]^2 - 1$.

<u>Primeira Etapa</u>: Redução do arco x a um arco entre 0 e π

Assim procede-se: $y \leftarrow |x|$

$$y \leftarrow y - 2\cdot k\cdot\pi \text{ sendo } k = \text{int}\left(\frac{y}{2\cdot\pi}\right)$$

Se $y > \pi$ então faça $y \leftarrow 2\cdot\pi - y$

Com esses procedimentos, assegura-se que: $0 \le y \le \pi$.

<u>Exemplo numérico</u>: $x = -12,5$; $y \leftarrow |x| = |-12,5| = 12,5$; $k = \text{int}\left(\frac{y}{2\cdot\pi}\right) = \text{int}\left(\frac{12,5}{2\cdot\pi}\right) = 1$;

$$y \leftarrow y - 2\cdot\pi = 6,21681 > \pi \Rightarrow y \leftarrow 2\cdot\pi - y = 0,06637 .$$

<u>Novo escalamento de y</u>: para assegurar um arco positivo com valor menor do que o unitário, divide-se y por 4, isto é: $y \leftarrow \frac{y}{4}$ e no final calculam-se: $\begin{cases} \cos(2\cdot\alpha) = 2\cdot[\cos(\alpha)]^2 - 1 \\ \cos(4\cdot\alpha) = 2\cdot[\cos(2\cdot\alpha)]^2 - 1 \end{cases}$.

<u>Cômputo recursivo da série</u>: $\cos(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}$. Adotando a notação,

$T_n = (-1)^n \cdot \frac{y^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!} \Rightarrow T_0 = 1$ e $S_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \frac{y^{2\cdot j}}{(2\cdot j)!} = \sum_{j=0}^{n} T_j \Rightarrow S_0 = 1$, assim:

$$T_n = (-1)^n \cdot \frac{y^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!} = -\frac{y^2}{(2\cdot n)\cdot(2\cdot n-1)} \cdot T_{n-1} \text{ e } S_n = S_{n-1} + T_n \text{ para } n = 1, 2, 3, \cdots \text{ com } T_0 = S_0 = 1$$

<u>Caracterização da convergência da série</u>: devido à alternância de sinal dos termos da série, assegura-se um erro de truncamento (em módulo) inferior ao primeiro termo não considerado, isto é, o erro de truncamento da série até o termo de ordem n é: $\Re_n \le |T_{n+1}|$. Em consequência, desejando-se um erro de truncamento (em módulo) inferior a δ impõe-se que: $|T_{n+1}| \le \delta$.

<u>Exemplo numérico</u>: calcular $\cos(-12,5)$ com erro inferior a $\delta = 10^{-9}$, valor de x entre 0 e π:

$y \leftarrow 0{,}06637$, valor de y normalizado: $y \leftarrow \frac{y}{4}$=0,01659

i	0	1	2	3
T_i	1	$-1{,}37658077\cdot10^{-4}$	$3.15829101\cdot10^{-9}$	$-2{,}898428447\cdot10^{-14}$
S_i	1	0,99986234	0,99986235	0,99986235

Assim, obteve-se convergência com apenas quatro termos da série e o valor 0,99986235 representa o cosseno do arco dividido por quatro, assim:

$$\begin{cases} \cos(2\cdot y) = 2\cdot[\cos(y)]^2 - 1 = 2\cdot[0{,}99986235]^2 - 1 = 0{,}999449418 \\ \cos(4\cdot y) = 2\cdot[\cos(2\cdot y)]^2 - 1 = 2\cdot[0{,}999449418]^2 - 1 = 0{,}997798279 \end{cases}$$

<u>Resumo do algoritmo</u>:

$$\boxed{\cos(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(y^2)^n}{(2n)!}}$$

$x \leftarrow |\, x \,|$

$cte \leftarrow 2\pi$

$x \leftarrow x - cte \cdot \text{int}\left(\frac{x}{cte}\right)$

Se $x > \pi$ Então $x \leftarrow cte - x$

$x \leftarrow \frac{x \cdot x}{16}$

$T \leftarrow 1$

$S \leftarrow 1$

$n \leftarrow 0$

$k \leftarrow 0$

Enquanto $|\, T \,| > \delta$, faça

- $n \leftarrow n + 1$
- $k \leftarrow k + 2$
- $T \leftarrow -\frac{y}{k\cdot(k-1)} \cdot T$
- $S \leftarrow S + T$

$S \leftarrow 2 \cdot S \cdot S - 1$

$S \leftarrow 2 \cdot S \cdot S - 1$

No final do algoritmo S contém o valor aproximado de cos(x) e n o número de termos necessários (grau de $p_n(x)$).

2b) Implementar o algoritmo abaixo para aproximar $f(x)$ = cos(x) em polinômio de Taylor com critério de convergência δ para determinar o grau do polinômio, sabendo-se que:

$\cos\left[(k+1)\cdot\theta\right] = 2\cdot\cos(\theta)\cdot\cos\left[k\cdot\theta\right] - \cos\left[(k-1)\cdot\theta\right]$ e cos(0) = 1, $0 \le \theta \le 2\pi$, k = 1, 2, ...

$$\boxed{\cos(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(y^2\right)^n}{(2n)!}}$$

$y \leftarrow x$

$\Delta \leftarrow \text{sinal}(x)\cdot 2\pi$

$n \leftarrow 0$

$T \leftarrow 1$

$S \leftarrow 1$

Enquanto $|\,y\,| \ge 2\pi$, faça

  $y \leftarrow y - \Delta$

$m \leftarrow \text{int}(|y|) + 1$

$y \leftarrow (y\,/\,m)^2$

Faça

  $n \leftarrow n + 1$

  $T \leftarrow -\dfrac{y}{2\cdot n\cdot(2\cdot n-1)}\cdot T$

  $S \leftarrow S + T$

enquanto $|\,T\,| > \delta$

Se $m > 1$ faça

  $P \leftarrow S$
  $S_{old} = S$
  $S \leftarrow 2\,S^2 - 1$

  Para j = 2, 3, ..., m–1, faça

    $S_{new} \leftarrow 2\,P\cdot S - S_{old}$
    $S_{old} = S$
    $S = S_{new}$

No final do algoritmo S contém o valor aproximado de cos(x) e n o número de termos necessários (grau de $p_n(x)$).

Nota: estes algoritmos podem ser utilizados para calcular sen(x), pois $\text{sen}(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exemplo numérico do exercício 2: x = -12,5 e $\delta = 10^{-4}$ com estes valores tem-se: $\Delta \leftarrow -2\pi$

Etapas do algoritmo passo-a-passo

PASSO	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
y	-12,5	-6,2168	0,78875	0,78875	0,78875	0,78875	0,78875	0,78875	0,78875	0,78875	0,78875	0,78875	0,78875
m		7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
n	0	0	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
T	1	1	1	-0,3944	0,02592	-0,0007	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
S	1	1	1	0,60563	0,63155	0,63087	0,63088	-0,2040	-0,8826	-0,9168	-0,2685	0,57803	0,9978
j									2	3	4	5	6
P								0,63088	0,63088	0,63088	0,63088	0,63088	0,63088
S_{old}								0,63088	-0,2040	-0,8826	-0,9168	-0,2685	0,57803
S_{new}									-0,8826	-0,9168	-0,2685	0,57803	0,9978

2.2 Frações continuadas

Como alternativa à aproximação por série de Taylor, podemos utilizar a expansão da função $f(x)$ em frações continuadas (ou contínuas).

De uma forma geral esta forma de expansão pode ser sumarizada pela expressão:

$$f(x) \cong b_0(x) + \cfrac{a_1(x)}{b_1(x) + \cfrac{a_2(x)}{b_2(x) + \cfrac{a_3(x)}{b_3(x) + \cfrac{a_4(x)}{b_4(x) + \cdots}}}}$$

ex: $1,785 \cong 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,785}} = 1 + \cfrac{1}{1,2739} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,2739}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3,651}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,651}}}}$

onde as formas das funções $a_i(x)$ e $b_i(x)$, i = 0, 1, 2, ..., n, podem ser encontradas em Manuais de Matemática para diferentes $f(x)$. A expansão em frações continuadas acima pode ser representada na forma *recursiva* (mais apropriada para implementação computacional) seguinte:

$y(x) \leftarrow b_n(x)$

Para $i = n–1, n–2, ..., 2, 1, 0$, faça

$$y(x) \leftarrow b_i + \frac{a_{i+1}(x)}{y(x)}$$

Exemplos:

1) $f(x) = e^x$

1a) $a_i = (-1)^{i+1}\,x$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$; $b_0 = 1$; $b_i = i$ para i ímpar e $b_i = 2$ para i par, assim:

$$e^x \cong 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{3 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{5 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{7 - \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{9 - \cfrac{x}{2 + \cdots}}}}}}}}}}$$

Na Tabela abaixo mostra-se o procedimento recursivo resultante para $x = 2$:

i	***y***	***i***	***y***
10	2,000000	5	4,140625
9	8,000000	4	2,483019
8	2,250000	3	2,194529
7	6,111111	2	2,911357
6	2,327273	1	0,313035
		0	**$f(x)$ = 7,389058**

1b) $a_1 = x$; $a_{i+1} = \dfrac{x^2}{4\cdot\left(4\cdot i^2 - 1\right)}$ para $i = 1, 2, ..., n$ e $b_0 = 1$; $b_1 = 1 – x/2$; $b_i = 1$ para $i = 2, 3, ..., n$

assim:

$$e^x \cong 1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{2} + \cfrac{\cfrac{x^2}{4\cdot 3}}{1 + \cfrac{\cfrac{x^2}{4\cdot 15}}{1 + \cfrac{\cfrac{x^2}{4\cdot 35}}{1 + \cfrac{\cfrac{x^2}{4\cdot 63}}{1 + \cdots}}}}}$$

Na Tabela abaixo mostra-se o procedimento recursivo resultante para $x = 2$:

i	***y***	***i***	***y***
10	1,000000	5	1,010031
9	1,003096	4	1,015715
8	1,003909	3	1,028129
7	1,005108	2	1,064843
6	1,006957	1	0,313035
		0	**$f(x)$ = 7,389056**

2) $f(x) = \ln(x)$

2a) $a_1 = x–1$; $a_i = [\text{int}^2(i/2) \cdot (x–1)]$ para $i = 2, 3, ..., n$ e $b_0 = 0$; $b_i = i$ para $i = 1, 2, ..., n$, assim:

$$\ln(x) \cong \cfrac{(x-1)}{1+\cfrac{(x-1)}{2+\cfrac{(x-1)}{3+\cfrac{4\cdot(x-1)}{4+\cfrac{4\cdot(x-1)}{5+\cfrac{9\cdot(x-1)}{6+\cfrac{9\cdot(x-1)}{7+\cfrac{16\cdot(x-1)}{8+\cdots}}}}}}}}$$

Na Tabela abaixo mostra-se o procedimento recursivo resultante para $x = 2$:

i	***y***	***i***	***y***
10	10,000000	5	6,279492
9	11,500000	4	4,636994
8	9,391304	3	3,862628
7	8,703704	2	2,258891
6	7,034043	1	1,442695
		0	***f*(*x*) = 0,693147**

2b) $a_1 = 2 \cdot z$; $a_i = -(i – 1)^2 \cdot z^2$ para $i = 2, 3, ...,$ n e $b_0 = 0$; $b_i = (2 \cdot i – 1)$ para $i = 1, 2,..., n$

onde $z = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, assim:

$$\ln(x) \cong \cfrac{2\cdot z}{1-\cfrac{z^2}{3-\cfrac{4\cdot z^2}{5-\cfrac{9\cdot z^2}{7-\cfrac{16\cdot z^2}{9-\cfrac{25\cdot z^2}{11-\cfrac{36\cdot z^2}{13-\cfrac{49\cdot z^2}{15-\cfrac{64\cdot z^2}{17-\cdots}}}}}}}}}$$

Na Tabela abaixo mostra-se o procedimento recursivo resultante para $x = 2$:

i	***y***	***i***	***y***
10	19,000000	5	8,739986
9	16,526316	4	6,796593
8	14,569710	3	4,852867
7	12,626318	2	2,908416
6	10,683201	1	0,961797
		0	***f*(*x*) = 0,693147**

3) $f(x) = \text{tg}(x)$

$a_1 = x$; $a_i = -x^2$ para $i = 2, 3, ..., n$ e $b_0 = 0$; $b_i = (2 \cdot i - 1)$ para $i = 1, 2, ..., n$, assim:

$$\text{tg}(x) \cong \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\cfrac{x^2}{11-\cfrac{x^2}{13-\cfrac{x^2}{15-\cfrac{x^2}{17-\cdots}}}}}}}}} \quad \text{para} \quad x \neq \frac{\pi}{2} \pm k \cdot \pi$$

Na Tabela abaixo mostra-se o procedimento recursivo resultante para $x = 2$:

i	*y*	*i*	*y*
10	19,000000	5	8,625670
9	16,789474	4	6,536268
8	14,761755	3	4,388030
7	12,729030	2	2,088429
6	10,685758	1	-0,915315
		0	**$f(x)$ = -2,185040**

4) $f(x) = \text{arctg}(x)$

$a_1 = x$; $a_i = (i-1)^2 \cdot x^2$ para $i = 2, 3, ..., n$ e $b_0 = 0$; $b_i = (2 \cdot i - 1)$ para $i = 1, 2, ..., n$, assim:

$$\text{arctg}(x) \cong \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{4 \cdot x^2}{5+\cfrac{9 \cdot x^2}{7+\cfrac{16 \cdot x^2}{9+\cfrac{25 \cdot x^2}{11+\cfrac{36 \cdot x^2}{13+\cfrac{49 \cdot x^2}{15+\cfrac{64 \cdot x^2}{17+\cdots}}}}}}}}}$$

Na Tabela abaixo mostra-se o procedimento recursivo resultante para $x = 2$:

i	*y*	*i*	*y*
10	19,000000	5	14,670654
9	34,052632	4	11,362450
8	22,517774	3	8,168331
7	21,704235	2	4,958785
6	17,634650	1	1,806649
		0	**$f(x)$ = 1,07022**

5) $f(x) = \operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$ (função erro)

$a_1 = -\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$; $a_i = (i-1)/2$ para i = 2, 3, ..., n e $b_0 = 1$; $b_i = x$ para i = 1, 2, ..., n, assim:

$$\operatorname{erf}(x) \cong 1 - \cfrac{e^{-x^2}/\sqrt{\pi}}{x + \cfrac{1/2}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{3/2}{x + \cfrac{2}{x + \cfrac{5/2}{x + \cfrac{3}{x + \cfrac{7/2}{x + \cfrac{4}{x + \cdots}}}}}}}}}$$

Na Tabela abaixo mostra-se o procedimento recursivo resultante para x = 2:

i	***y***	***i***	***y***
10	2,000000	5	2,850213
9	4,250000	4	2,701702
8	2,941176	3	2,555206
7	3,190000	2	2,391358
6	2,940439	1	2,209086
		0	***f*(*x*) = 0,995322**

2.3 Razão de polinômios

A desvantagem de usar polinômios para a aproximação é sua tendência à oscilação. Este comportamento pode ser reduzido com o uso de funções racionais, que são razões de polinômios:

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}$$

Exemplo: $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$$e^x = \frac{e^{x/2}}{e^{-x/2}} = \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \cdots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \cdots}$$

para n = 1: $e^x \cong \dfrac{2+x}{2-x}$

para n = 2: $e^x \cong \dfrac{8+4x+x^2}{8-4x+x^2}$, outra aproximação (Padé): $e^x \cong \dfrac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$

Técnica da aproximação de Padé:

Utiliza a condição $f^{(k)}(0) = r^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, ..., N$, ou seja, $f(x) - r(x)$ deve ter um zero de multiplicidade $N + 1$ em $x = 0$, onde $N = m + n$.

Fazendo $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, temos:

$$f(x) - r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i - \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j} = \frac{(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...)\cdot(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...)}{q_m(x)}$$

e para termos um zero de multiplicidade $N + 1$ em $x = 0$, os coeficientes de x^k do numerador devem se anular:

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \cdot b_{k-i} - a_k = 0, \text{ para } k = 0, 1, 2, ..., N$$

onde $b_{m+1} = b_{m+2} = ... = b_N = 0$ e $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = a_N = 0$ e para normalização: $b_0 = 1$.

Exemplos:

1) $f(x) = e^x$, $n = m = 2 \rightarrow N = 4$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$c_0 \cdot b_0 = a_0 \rightarrow a_0 = c_0 = 1$$

$$c_0 \cdot b_1 + c_1 \cdot b_0 = a_1 \rightarrow b_1 + 1 = a_1$$

$$c_0 \cdot b_2 + c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_0 = a_2 \rightarrow b_2 + b_1 + \frac{1}{2} = a_2$$

$$c_1 \cdot b_2 + c_2 \cdot b_1 + c_3 \cdot b_0 = 0 \rightarrow b_2 + \frac{b_1}{2} + \frac{1}{6} = 0$$

$$c_2 \cdot b_2 + c_3 \cdot b_1 + c_4 \cdot b_0 = 0 \rightarrow \frac{b_2}{2} + \frac{b_1}{6} + \frac{1}{24} = 0$$

Resolvendo as duas últimas equações: $b_1 = -\frac{1}{2}$ e $b_2 = \frac{1}{12}$, e com estes valores nas primeiras equações tem-se: $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = \frac{1}{12}$, ou seja:

$$f(x) \cong \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}} = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2}$$

A tabela abaixo mostra a aproximação de $f(x) = e^x$ para diferentes valores de $n = m$.

n	Função Aproximada	Máximo do módulo do erro no intervalo $-1 \le x \le +1$
1	$\dfrac{2+x}{2-x}$	0,28
2	$\dfrac{12+6\cdot x+x^2}{12-6\cdot x+x^2}$	$4{,}10^{-3}$
3	$\dfrac{120+60\cdot x+12\cdot x^2+x^3}{120-60\cdot x+12\cdot x^2-x^3}$	$2{,}8\cdot 10^{-5}$
4	$\dfrac{1680+840\cdot x+180\cdot x^2+20\cdot x^3+x^4}{1680-840\cdot x+180\cdot x^2-20\cdot x^3+x^4}$	$1{,}1\cdot 10^{-7}$

2) $f(x) = \cos(x)$, mudança de variável: $u = x^2$ (n é o grau dos polinômios em função de u)

n	Função $f(x)$ aproximada	Máximo do módulo do erro no intervalo $-1 \le x \le +1$
1	$\dfrac{12-5\cdot x^2}{12+x^2}$	$1{,}84\cdot 10^{-3}$
2	$\dfrac{1-0{,}456349\cdot x^2+0{,}020701\cdot x^4}{1+0{,}043651\cdot x^2+8{,}597884\cdot 10^{-4}\cdot x^4}$	$3{,}6\cdot 10^{-7}$
3	$\dfrac{1-0{,}470596\cdot x^2+0{,}027388\cdot x^4-0{,}000372\cdot x^6}{1+0{,}029404\cdot x^2+0{,}0000424\cdot x^4+3{,}235543\cdot 10^{-6}\cdot x^6}$	$1{,}3\cdot 10^{-11}$
4	$\dfrac{1-0{,}477862\cdot x^2+0{,}030842\cdot x^4-0{,}000587\cdot x^6+3{,}421843\cdot 10^{-6}\cdot x^8}{1+0{,}022138\cdot x^2+0{,}0000245\cdot x^4+1{,}666854\cdot 10^{-6}\cdot x^6+6{,}237545\cdot 10^{-9}\cdot x^8}$	$2{,}2\cdot 10^{-16}$

3) $f(x) = \ln(x)$, mudança de variável: $u = x - 1$ (n é o grau dos polinômios em função de u)

A aproximação de Padé foi feita em $\ln(u+1)/u$

n	Função $f(x)$ aproximada	Máximo do módulo do erro no intervalo $+1 \le x \le +2$
1	$\dfrac{6\cdot(x-1)+(x-1)^2}{6+4\cdot(x-1)}$	$6{,}85\cdot 10^{-3}$
2	$\dfrac{30\cdot(x-1)+21\cdot(x-1)^2+(x-1)^3}{30+36\cdot(x-1)+9\cdot(x-1)^2}$	$1{,}9\cdot 10^{-4}$
3	$\dfrac{420\cdot(x-1)+510\cdot(x-1)^2+140\cdot(x-1)^3+3\cdot(x-1)^4}{420+720\cdot(x-1)+360\cdot(x-1)^2+48\cdot(x-1)^3}$	$5{,}3\cdot 10^{-6}$
4	$\dfrac{3780\cdot(x-1)+6510\cdot(x-1)^2+3360\cdot(x-1)^3+505\cdot(x-1)^4+6\cdot(x-1)^5}{3780+8400\cdot(x-1)+6300\cdot(x-1)^2+1800\cdot(x-1)^3+150\cdot(x-1)^4}$	$1{,}52\cdot 10^{-7}$

2.4 Séries de Fourier

Antes de apresentar a expansão de uma função em série de Fourier é necessário conhecer o conceito de ortogonalidade de funções.

Ortogonalidade: funções y_0, y_1, y_2, y_3, ... definidas em um intervalo [a, b] são ortogonais em [a, b] com respeito a uma função peso $w(x) > 0$ se:

$$(y_n, y_m) \equiv \int_a^b w(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0 \quad \forall m \neq n$$

$$(y_n, y_n) = \int_a^b w(x) y_n^2(x) dx \equiv \| y_n \|^2$$ onde $\| y_n \|$ é a norma de $y_n(x)$.

Uma dada função $f(x)$, definida em um intervalo [a, b], pode ser representada em termos de um conjunto ortogonal por uma série convergente:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m(x)$$

chamada de série generalizada de Fourier, onde a_m são as constantes de Fourier.

Multiplicando $f(x)$ por $w(x)\, y_n(x)$ e integrando em [a, b]:

$$(f, y_n) = \int_a^b w(x) f(x) y_n(x) dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx$$

e aplicando a condição de ortogonalidade:

$$(f, y_n) = a_n \| y_n \|^2 \rightarrow a_n = \frac{(f, y_n)}{\| y_n \|^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

O conjunto de funções: {1, sen x, cos x, sen 2x, cos 2x, sen 3x, cos 3x, ...} é ortogonal em [-π, π] com respeito a função peso $w(x) = 1$, ou seja:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \text{sen}(x) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(2x) \cdot \cos(3x) dx = 0, ...$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(x) dx = \pi \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx = \pi$$

E a série: $f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos(mx) + b_m \text{sen}(mx) \right]$ é chamada de série de Fourier, onde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \text{ e } b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(mx) dx, \quad m = 1, 2, 3, ...$$

A série truncada em n termos é chamada de **polinômio de trigonométrico**, $S_n(x)$.

Exemplos:

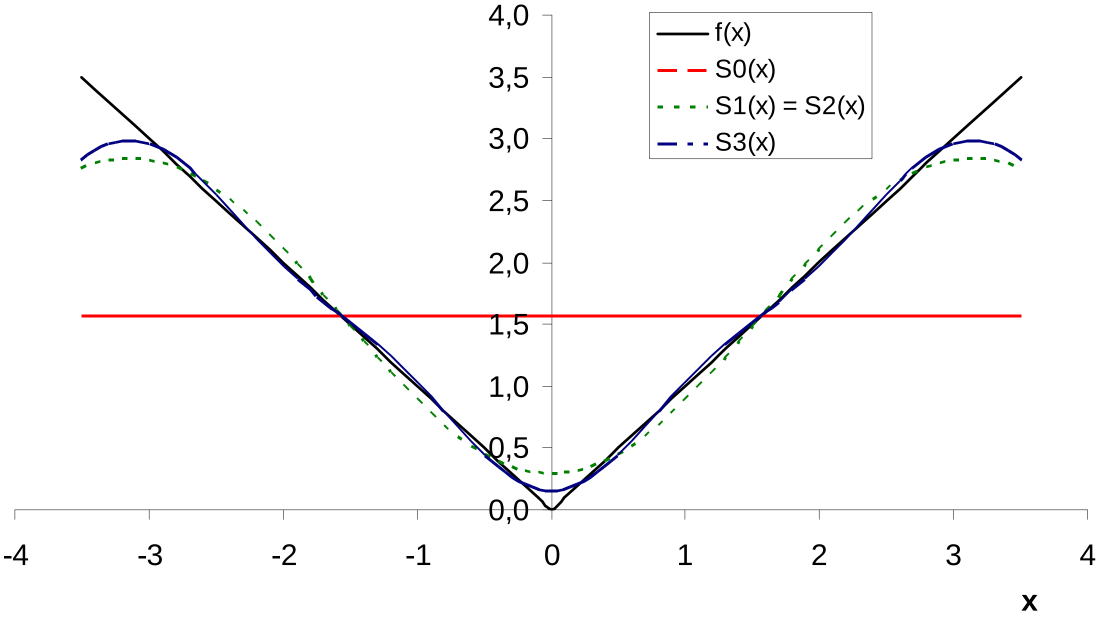
1) $f(x) = | x |$, $-\pi < x < \pi$, $n = 3$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} x dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(mx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(mx)dx = \frac{2}{\pi m^2}[(-1)^m - 1] \qquad , m = 1, 2, 3, ...$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{sen}(mx)dx = 0 \quad \text{(função ímpar)} \qquad , m = 1, 2, 3, ...$$

$$f(x) \cong \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x) - \frac{4}{9\pi}\cos(3x) = s_3(x)$$



Nota: i) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)dx & f(x)\text{: função par} \\ 0 & f(x)\text{: função ímpar} \end{cases}$

ii) $f(x) \cdot g(x)$ = função par se f e g são do mesmo tipo

$f(x) \cdot g(x)$ = função ímpar se f e g são de tipos diferentes.

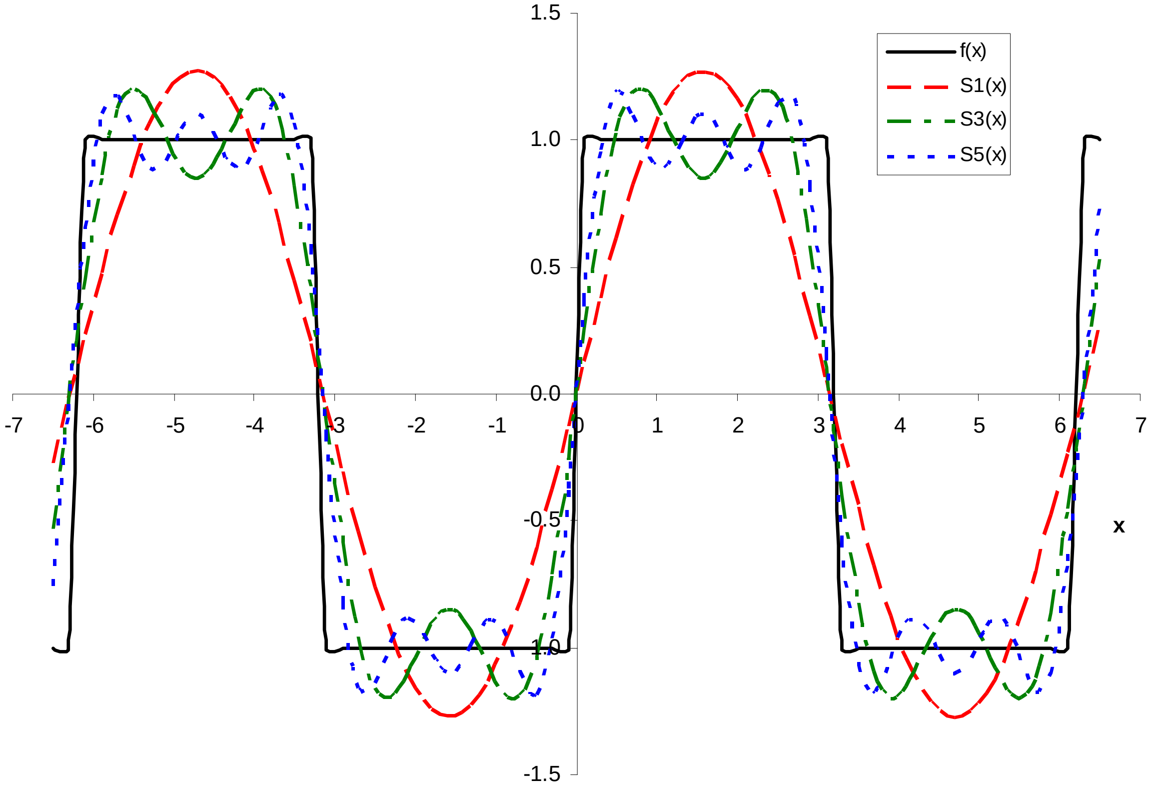
2) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x < \pi \\ f(x+2\pi) & \end{cases}$, $n = 5$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 0 \qquad , f(x) \text{ é função ímpar}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = 0 \qquad , m = 1, 2, 3, ...$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(mx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\text{sen}(mx)dx = \frac{2}{\pi m}[1-(-1)^m] \qquad , m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) \cong \frac{4}{\pi}\left(sen(x) + \frac{1}{3}sen(3x) + \frac{1}{5}sen(5x) \right) = s_5(x)$$



Lista de exercícios

1. Proponha um algoritmo computacional que compute automaticamente, com uma precisão preestabelecida, o logaritmo neperiano de x segundo a série de potências:

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{(x-1)^k}{k} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

Observações:

i) para $0 < x < 2$ a série é convergente;

ii) para $x > 2$ utilize o procedimento recursivo: $z^{(k)} = \sqrt{z^{(k-1)}}$ para k = 1, 2, ..., n, com $z^{(0)} = x$ e n é escolhido tal que $z^{(n)} < 2$. Encontrado o valor de n utilizando as propriedades: $y = z^{(n)} = x^{\frac{1}{\alpha}} < 2$ onde $\alpha = 2^n$ e $x = \left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} = (y)^{\alpha} \Rightarrow \ln(x) = \alpha\cdot\ln(y)$

2. Proponha um algoritmo computacional que compute automaticamente, com uma precisão preestabelecida, o logaritmo neperiano de x segundo a série de potências:

$$\ln(x) = 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot k-1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2\cdot k-1} = 2\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7+\cdots\right]$$

Note que em vista de $-1<\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<1$ para todo *x* real e positivo, tal série será sempre convergente não sendo necessário re-escalar a variável *x*.

3. Proponha um algoritmo computacional que compute automaticamente, com uma precisão preestabelecida, a potência *q* de *x* (*x* número real e positivo e *q* número real qualquer) segundo a série de potências:

$$x^q = 1+q\cdot(x-1)+\frac{q\cdot(q-1)}{2!}\cdot(x-1)^2+\frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)}{3!}\cdot(x-1)^3+\frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)\cdot(q-3)}{4!}\cdot(x-1)^4+\cdots$$

esta série é convergente para $0<x\le 2$.

Para re-escalar a variável *x* sugere-se o seguinte procedimento: quando *x* > 1 utilize o artifício $x^q = \frac{1}{\left(1/x\right)^q}$ e adote $y=\frac{1}{x}<1$, faça então a expansão de y^q e depois, após a convergência, inverta esta nova série.

4. Calcule os coeficientes a_0, a_1, a_2, b_1 e b_2 da aproximação de Padé da função cos(*x*) de acordo com $\cos(x)\cong\frac{a_0+a_1x^2+a_2x^4}{1+b_1x^2+b_2x^4}$, sabendo que a expansão em série de MacLaurin de cos(*x*) é expressa por $\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$; **(b)** Para $x \in [-1, 1]$, avalie o máximo erro absoluto desta aproximação.

5. Calcule os coeficientes a_0, a_1, a_2, b_1 e b_2 da aproximação de Padé da função sen(*x*) de acordo com $\mathrm{sen}(x)\cong\frac{a_0x+a_1x^3+a_2x^5}{1+b_1x^2+b_2x^4}$, sabendo que a expansão em série de MacLaurin de sen(*x*) é expressa por $\mathrm{sen}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Para $x \in [-1, 1]$, avalie o máximo erro absoluto desta aproximação.

6. Calcule os coeficientes a_0, a_1, a_2, b_1 e b_2 da aproximação de Padé da função *x* ln(*x*) de acordo com $x\ln(x)\cong\frac{a_0(x-1)+a_1(x-1)^2+a_2(x-1)^3}{1+b_1(x-1)+b_2(x-1)^2}$, sabendo que a expansão em série de Taylor de *x* ln(*x*) é expressa por $x\ln(x)=(x-1)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-1)^k}{k(k-1)}$. Para $x \in [1/2, 2]$, avalie o máximo erro absoluto desta aproximação.

7. Calcule os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 e b_3 da aproximação de Padé da função e^{-x} de acordo com $e^{-x} \cong \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$, sabendo que a expansão em série de MacLaurin de e^{-x} é expressa por $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^k}{k!}$. Para $x \in [-1, 1]$, avalie o máximo erro absoluto desta aproximação.