

Capítulo 3

Interpolação Polinomial

Teorema de Weierstrass: se $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então para cada $\varepsilon > 0$, existe um polinômio de grau $n(\varepsilon)$ tal que:

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Embora seja um teorema motivador para usar polinômios, o valor de $n(\varepsilon)$ geralmente não é conhecido, principalmente quando $f(x)$ não é dada explicitamente. Outro motivo para usar polinômios na aproximação de funções é que suas derivadas e integrais são fáceis de determinar e também são polinômios.

Como o polinômio de Taylor, descrito no capítulo anterior, concentra a sua precisão próxima ao ponto x_0 , ele não é adequado para a maioria das aplicações práticas onde, geralmente, se deseja uma boa aproximação em todo o intervalo de definição da função $f(x)$. Contudo, o polinômio de Taylor é de grande utilidade na análise numérica para estimativas de erros de técnicas numéricas. Portanto, neste capítulo são abordados polinômios que utilizam dados em vários pontos do intervalo, chamados de **polinômios interpoladores**.

Dados $n+1$ pares de valores $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, existe um e somente um polinômio $p_n(x)$ de grau $\leq n$ no qual

$$f(x_i) = p_n(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, embora existam várias fórmulas de interpolação polinomial, se elas utilizarem as mesmas informações nos **pontos nodais** $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, então os polinômios obtidos serão os mesmos.

Naturalmente, se $f(x)$ for um polinômio de grau $\leq n$, então a aproximação também será exata $\forall x \neq x_i$.

Expressando o polinômio interpolador na forma: $p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$

os coeficientes c_i são soluções do sistema abaixo de $n+1$ equações algébricas lineares:

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \cdots + c_nx_0^n = f(x_0) \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \cdots + c_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \cdots + c_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

cujo determinante da matriz dos coeficientes:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

é chamado de determinante de Vandermonde, sendo não-nulo se $x_i \neq x_j \forall i \neq j$.

O problema desta técnica de determinação dos coeficientes é a sua tendência de propagar os erros de arredondamento à medida que os pontos nodais se aproximam uns dos outros, pois o determinante de Vandermonde tende a zero nestas situações, gerando um sistema de equações mal condicionado.

Exercício: implementar o código abaixo no MATLAB ou SCILAB para interpolar a função

$$y = f(x) = \frac{\sinh(\Phi x)}{x \sinh(\Phi)}$$

que é a solução analítica do problema de reação com difusão em um partícula catalítica esférica isotérmica com reação de primeira ordem (x é o raio adimensional e y é a concentração adimensional). Utilizar como pontos nodais, pontos igualmente espaçados entre 0,1 e 0,9, com espaçamento uniforme de 0,1 para o caso (a) e de 0,04 para o caso (b). Após obter o polinômio, interpolar a função nos valores de 0 a 1 em intervalos de 0,01. Note que entre 0 e 0,1 e entre 0,9 e 1 os valores serão extrapolados. Comparar os dois casos.

```
dx=0.1; % para o caso (a)
dx=0.04; % para o caso (b)

x=[0.1:dx:0.9]'; % pontos nodais

phi=5;
y=sinh(phi*x)./(x*sinh(phi)); % valor da função nos pontos nodais

n=length(x); % número de pontos

xc=[0:0.01:1]'; % pontos para interpolação
m=length(xc);
yc(1)=phi/sinh(phi);
yc(2:m)=sinh(phi*xc(2:m))./(xc(2:m)*sinh(phi));
% formação da matriz de Vandermonde
Um=ones(n,1); % vetor de tamanho n x 1 com todos elementos iguais a 1
M=Um;
for i=1:n-1
    M=[M x.^i];
end

C=inv(M)*y; % coeficientes polinomiais (inversão sem pivotamento)
% C=M\y; % coeficientes polinomiais (inversão com pivotamento parcial)
```

```

pn1=C'*(Um*xc').^([0:n-1]*ones(1,m)); % valores interpolados

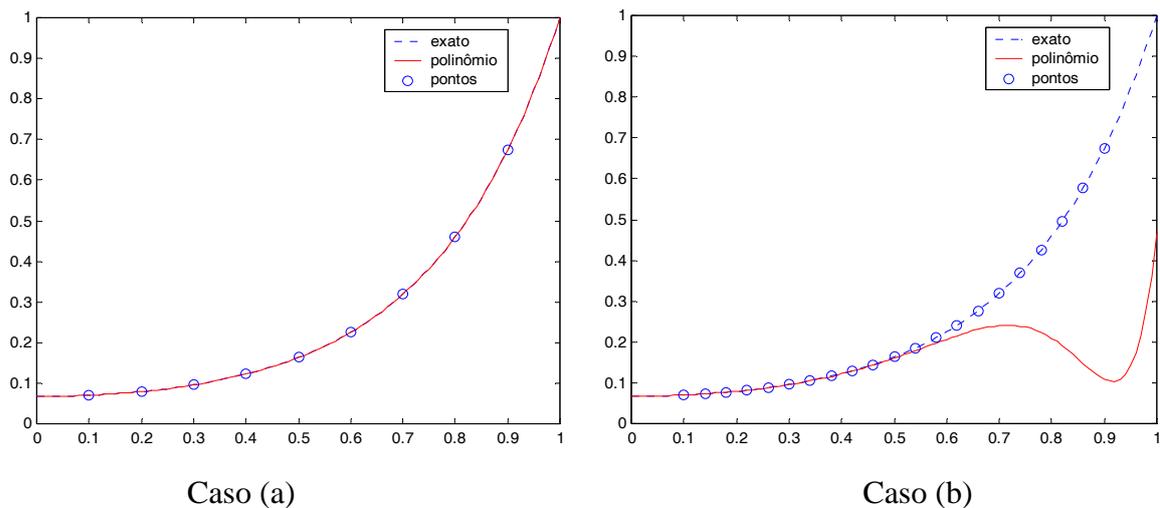
%
% forma alternativa calcular os valores interpolados
%
%for i=1:m
%   pn1(i)=C(n);
%   for j=n-1:-1:1
%       pn1(i)=pn1(i)*xc(i)+C(j);
%   end
%end

condM=cond(M) % número de condicionamento da matriz dos coeficientes

plot(xc,yc,'b',xc,pn1,'r',x,y,'o');
legend('exato','polinômio','pontos');

```

O resultado do exercício acima é mostrado na figura abaixo, onde se observa no caso (b) o efeito dos erros de arredondamento devido à inversão matricial sem pivotamento do sistema de Vandermonde que neste caso é mal condicionado. Este problema não ocorreria se fosse realizada a inversão matricial com pivotamento (parcial ou total).



Outro aspecto sobre a formulação $p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ é a sua forma ineficiente de cálculo de interpolação. A forma alternativa (aninhada):

$$p_n(x) = c_0 + x \cdot (c_1 + x \cdot (c_2 + \cdots + x \cdot (c_{n-1} + x \cdot c_n) \cdots))$$

requer um número bem menor de operações de multiplicação ($2n-1$ contra $n \cdot (n+1)/2$) e pode ser implementada conforme o algoritmo:

$$p \leftarrow c_n$$

Para $i = n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$, faça

$$p \leftarrow p \cdot x + c_i$$

Este algoritmo está implementado de forma comentada no código acima.

As fórmulas de interpolação mais comumente usadas e que não fazem uso do determinante de Vandermonde são a fórmula interpoladora das diferenças divididas de Newton e os polinômios interpoladores de Lagrange.

3.1 Tabela de diferenças de Newton

Partindo do conceito de derivada:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a aproximação $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv f[x, x_0]$ para $x \neq x_0$ é chamada de primeira diferença dividida ou diferença dividida de ordem 1 com relação a x e x_0 .

Aplicando o **teorema do valor médio diferencial**:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{para } f(x) \in C^1[a, b] \text{ e algum } \xi \in [a, b], \text{ então:}$$

$$f[x, x_0] = f'(\xi) \quad \text{para algum } \xi \in [x, x_0],$$

ou seja, $f[x, x_0]$ está relacionada com a derivada primeira de $f(x)$.

Considerando o problema da interpolação linear passando pelos pontos $\{x_0, f(x_0)\}$ e $\{x_1, f(x_1)\}$, temos:

$$f(x) \cong p_1(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0)$$

$$\text{como } f(x_0) = p_1(x_0) \rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$f(x_1) = p_1(x_1) \rightarrow f(x_1) = f(x_0) + a_1 \cdot (x_1 - x_0)$$

$$\text{e } a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0], \text{ ou seja, } p_1(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0] \cdot (x - x_0).$$

Usando a definição de erro (ou resíduo) da aproximação:

$$f(x) = p_1(x) + R_1(x)$$

e sabendo que $R_1(x)$ deve se anular em x_0 e x_1 :

$$R_1(x) = g(x) \cdot (x - x_1)(x - x_0)$$

$$\text{ou ainda } R_1(x) = f(x) - f(x_0) - f[x_1, x_0] \cdot (x - x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) - f[x_1, x_0] \cdot (x - x_0)$$

$$R_1(x) = (f[x, x_0] - f[x_1, x_0]) (x - x_0) = \frac{f[x, x_0] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} (x - x_1)(x - x_0)$$

$$\text{onde } \frac{f[x, x_0] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} \equiv f[x, x_1, x_0].$$

Definindo a função:

$$Q(t) = f(t) - p_1(t) - (t - x_1)(t - x_0)g(x)$$

ela se anula pelo menos em $t = x_1$, $t = x_0$ e $t = x$, logo $Q'(t)$ deve se anular pelo menos duas vezes no intervalo $[x, x_0]$ e $Q''(t)$ deve se anular pelo menos uma vez em um ponto $t = \xi \in [x, x_0]$:

$$Q''(\xi) = f''(\xi) - p_1''(\xi) - 2!g(x) = 0$$

como $p_1''(\xi) = 0$ (polinômio de grau 1) temos:

$$g(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}$$

Agora, se mais um ponto $\{x_2, f(x_2)\}$ for incluído no conjunto de pontos nodais:

$$f(x) \cong p_2(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_1)(x - x_0)$$

fica evidente pelo exposto acima que

$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

podendo também ser tomado como uma boa aproximação para $R_1(x)$ se $f''(x)$ for uma função suave (que não muda bruscamente para diferentes valores de x). Isto mostra que as fórmulas das diferenças divididas de Newton podem ser usadas para determinar o grau apropriado do polinômio interpolador em função da qualidade desejada da aproximação.

$$\text{Retomando a expressão: } f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_0] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} = \frac{(x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_0)) - (x_2 - x_0)(f(x_1) - f(x_0))}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{(x_1 - x_0)f(x_2) + (x_0 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad \text{ou ainda}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{(x_1 - x_0)f(x_2) - (x_1 - x_0)f(x_1) - (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{(x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_1)) - (x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_0))}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

ou seja, $f[x_2, x_1, x_0] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_2, x_0, x_1]$, a ordem dos argumentos das fórmulas das diferenças divididas é indiferente. Das expressões acima, podemos observar também que:

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Generalizando para n pontos nodais, com a inclusão da diferença dividida de ordem zero:

$$f[x_i] \equiv f(x_i)$$

temos para a **diferença dividida de ordem k** :

$$f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_2, x_1] - f[x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1, x_0]}{x_k - x_0}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\text{e } f[x, x_{k-1}, \dots, x_2, x_1, x_0] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad \xi \in [x, x_0].$$

O erro da interpolação por um polinômio de grau n é:

$$R_n(x) = f[x, x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1, x_0] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$\text{ou } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \xi \in [x, x_0]$$

sendo que a segunda forma é útil somente quando a função $f(x)$ for dada explicitamente.

Exemplo: obter o polinômio interpolador de grau 3 usando as fórmulas das diferenças divididas de Newton para os dados abaixo:

i	x_i	y_i	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0	0	-5			
			6		
1	1	1		2	
			12		1
2	3	25		6	
			30		
3	4	55			

$$p_3(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0] \cdot (x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0] \cdot (x - x_1)(x - x_0) + f[x_3, x_2, x_1, x_0] \cdot (x - x_2)(x - x_1)(x - x_0)$$

$$p_3(x) = -5 + 6 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (x - 1)(x - 0) + 1 \cdot (x - 3)(x - 1)(x - 0) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

A tabela das diferenças divididas de Newton é construída da seguinte maneira:

i	x_i	y_i					
0	x_0	$f[x_0]$					
			$f[x_1, x_0]$				
1	x_1	$f[x_1]$		$f[x_2, x_1, x_0]$			
					$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$		
2	x_2	$f[x_2]$					
							\dots
							$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$
							\dots
							$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}]$
$n-1$	x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$		$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$			
			$f[x_n, x_{n-1}]$				
n	x_n	$f[x_n]$					

Para um x qualquer entre x_0 e x_n , a interpolação polinomial de grau n é obtida através das expressões:

$$f[x_0, x] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_0, x], \text{ mas:}$$

$$f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_1, x_0] - f[x_0, x]}{x_1 - x} \Rightarrow f[x_0, x] = f[x_1, x_0] + (x - x_1) \cdot f[x_1, x_0, x], \text{ mas:}$$

$$f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_2, x_1, x_0] - f[x_1, x_0, x]}{x_2 - x} \Rightarrow f[x_1, x_0, x] = f[x_2, x_1, x_0] + (x - x_2) \cdot f[x_2, x_1, x_0, x]$$

\dots

$$f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] - f[x_{n-2}, \dots, x_0, x]}{x_{n-1} - x} \Rightarrow$$

$$f[x_{n-2}, \dots, x_0, x] = f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] + (x - x_{n-1}) \cdot f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, x]$$

e, finalmente:

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0, x]}{x_n - x} \Rightarrow$$

$$f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0, x] = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] + (x - x_n) \cdot f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, x]$$

onde o último termo: $f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ é o erro da interpolação, que pode ser estimado com o uso de um ponto adicional $\{x_{n+1}, f(x_{n+1})\}$ próximo a x .

Exemplos:

a) A tabela abaixo contém os valores da viscosidade (em centipoise) de uma solução contendo 60% de sacarose a várias temperaturas. Construa a Tabela de Diferenças destes dados.

T (°C)	μ (centipoise)	Δ_1	Δ_2	Δ_3
10	113,9			
		-5,72		
20	56,7		0,17255	
		-2,269		-0,004088
30	34,01		0,0499	
		-1,271		
40	21,30			

b) Refaça a Tabela de Diferenças adotando $\ln(\mu)$ no lugar de μ :

T (°C)	$\ln(\mu)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
10	4,735321			
		-0,069755		
20	4,037774		0,000932	
		-0,051112		-0,000024
30	3,526655		0,000216	
		-0,046795		
40	3,058707			

Algoritmo: Interpolação polinomial de Newton

Dados $n+1$ pontos $\{x_i, y_i\}$, deseja-se interpolar a função em $x = x^*$

Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, faça

$A_{i,0} \leftarrow y_i$

Para $i = 1, 2, \dots, n$, faça

Para $j = 0, 1, 2, \dots, n-i$, faça

$$A_{j,i} \leftarrow \frac{A_{j+1,i-1} - A_{j,i-1}}{x_{i+j} - x_j}$$

$p \leftarrow 1$

$y^* \leftarrow A_{0,0}$

Para $i = 1, 2, \dots, n$, faça

$p \leftarrow (x^* - x_{i-1}) \cdot p$

$y^* \leftarrow y^* + p \cdot A_{0,i}$

i	x_i	y_i	Δ_1	Δ_2	\ddots	Δ_{n-2}	Δ_{n-1}	Δ_n
0	x_0	$A_{0,0}$	$A_{0,1}$	$A_{0,2}$	\ddots	$A_{0,n-2}$	$A_{0,n-1}$	$A_{0,n}$
1	x_1	$A_{1,0}$	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	\ddots	$A_{1,n-2}$	$A_{1,n-1}$	
2	x_2	$A_{2,0}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	\ddots	$A_{2,n-2}$		
3	x_3	$A_{3,0}$	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	\ddots			
\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots	\ddots			
$n-2$	x_{n-2}	$A_{n-2,0}$	$A_{n-2,1}$	$A_{n-2,2}$				
$n-1$	x_{n-1}	$A_{n-1,0}$	$A_{n-1,1}$					
n	x_n	$A_{n,0}$						

Ao final do algoritmo y^* contém o valor interpolado de $f(x)$ em $x = x^*$.

3.2 Interpolação de Lagrange

Na derivação das fórmulas das diferenças divididas foi adotada a forma polinomial:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_1)(x - x_0) + \dots + a_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

para a determinação dos coeficientes a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$. No caso da interpolação de Lagrange, a forma polinomial adotada é a seguinte:

$$p_n(x) = b_0 \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) + b_1 \cdot (x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n) + \dots + b_i \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) + \dots + b_n \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

cujos coeficientes b_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ são determinados diretamente pelas condições $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, resultando em:

$$b_i = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Definindo os **interpoladores de Lagrange**:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

que são polinômios de grau n , temos:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) f(x_i).$$

Pela definição de $\ell_i(x)$, podemos observar que:

$$\ell_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$$

ou seja, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ são as n raízes de $\ell_i(x)$.

Se $f(x) = x^k$, então $x^k = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) x_i^k$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$, pois a aproximação é exata se $f(x)$ for um polinômio de grau $\leq n$. Desta relação resulta para $k = 0$:

$$\sum_{i=0}^n \ell_i(x) = 1.$$

Definindo o **polinômio nodal**, que tem como raízes $x = x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, logo de grau $n + 1$:

$$P_{n+1}(x) = a_{n+1} \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) = a_{n+1} \cdot \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

e chamando de $q_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$ o numerador de $\ell_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, resulta que:

$$\ell_i(x) = \frac{q_i(x)}{q_i(x_i)} \quad \text{e} \quad a_{n+1} \cdot q_i(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_i}.$$

Aplicando o limite para $x \rightarrow x_i$ na segunda expressão: $\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_i} = P'_{n+1}(x_i)$, temos:

$$a_{n+1} \cdot q_i(x_i) = P'_{n+1}(x_i) \quad \text{e} \quad \ell_i(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_i)P'_{n+1}(x_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Sabendo que $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ e que $R_n(x)$ deve se anular em x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, então $R_n(x) = P_{n+1}(x) \cdot G(x)$, que procedendo de maneira análoga à seção anterior, a função:

$$Q(t) = f(t) - p_n(t) - P_{n+1}(t) \cdot G(x)$$

deve se anular em $t = x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ e em $t = x$, ou seja, em no mínimo $n + 2$ vezes dentro do intervalo $[x_0, x_n]$. Portanto, $Q^{(n+1)}(t)$ deve se anular em pelo menos um ponto neste intervalo, $t = \xi$:

$$Q^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - p_n^{(n+1)}(\xi) - P_{n+1}^{(n+1)}(\xi) \cdot G(x)$$

como $p_n^{(n+1)}(\xi) = 0$ (polinômio de grau n) e $P_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = a_{n+1} \cdot (n+1)!$, temos:

$$G(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{a_{n+1} \cdot (n+1)!} \quad \text{e} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \text{com } \xi \in [x_0, x_n].$$

Exemplo: obter o polinômio interpolador de Lagrange de grau 2 para os seguintes dados:

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 3)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{3}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 3)} = \frac{-x^2 + 3x}{2}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(3 - 0)(3 - 1)} = \frac{x^2 - x}{6}$$

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^2 \ell_i(x) f(x_i) = -5 \cdot \ell_0(x) + \ell_1(x) + 25 \cdot \ell_2(x) = 2x^2 + 4x - 5$$

Comparando com as diferenças divididas de Newton, a interpolação de Lagrange tem como desvantagens a sua dificuldade em obter uma estimativa do erro e a necessidade de reconstruir todos os interpoladores de Lagrange com a adição de novos pontos. Ou seja, não é um método adequado quando o grau do polinômio não é conhecido a priori. Além disto, demanda uma quantidade maior de cálculos quando várias interpolações precisam ser obtidas com o mesmo conjunto de pontos nodais. Uma maneira de construir os polinômios de Lagrange de maneira recursiva para a inclusão gradual de novos pontos até uma precisão desejada é através do uso do método de Neville (não abordado aqui, mas pode ser encontrado em Burden e Faires, 2003).

Algoritmo: Interpolação polinomial de Lagrange

Dados $n+1$ pontos $\{x_i, y_i\}$, deseja-se interpolar a função em $x = x^*$

Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, faça

$$p_i \leftarrow 1$$

Para $j = 0, 1, 2, \dots, n$, faça

$$\text{Se } i \neq j: p_i \leftarrow \left(\frac{x^* - x_j}{x_i - x_j} \right) \cdot p_i$$

$$y^* \leftarrow 0$$

Para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, faça

$$y^* \leftarrow y^* + p_i \cdot y_i$$

Ao final do algoritmo y^* contém o valor interpolado de $f(x)$ em $x = x^*$.

3.3 Análise de erros

Ao aproximarmos uma função $f(x)$ pelo polinômio de Taylor de grau n , vimos que o erro de truncamento da aproximação é dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[\xi(x)]}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \text{com } \xi \in [x_0, x].$$

Contudo, como o valor de $f^{(n+1)}[\xi(x)]$ não pode, geralmente, ser calculado por não conhecermos a função $\xi(x)$, podemos apenas estabelecer um limite superior para o erro da aproximação, tomando o valor máximo de $|f^{(n+1)}(x)|$ no intervalo $[a, b]$.

No caso da interpolação polinomial, vimos que o erro da aproximação é dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[\xi(x)]}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \text{com } \xi \in [x_0, x_n]$$

e os mesmos comentários acima se aplicam, com o agravante que neste caso, geralmente, a função $f(x)$ não é conhecida para podermos encontrar o valor máximo de $|f^{(n+1)}(x)|$. Neste caso podemos recorrer ao uso da tabela de diferenças divididas de Newton para encontrarmos uma estimativa para o erro usando a relação:

$$\frac{f^{(n+1)}[\xi(x)]}{(n+1)!} = f[x, x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1, x_0]$$

e um valor adicional de $f(x)$ em um novo ponto x_{n+1} .

Naturalmente, se $f(x)$ for conhecida, então $R_n(x)$ também pode ser obtida diretamente de:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Neste caso, uma informação útil é o erro médio quadrático (MSE, *Mean Square Error*) da aproximação no intervalo $[a, b]$:

$$MSE = \frac{1}{b-a} \int_a^b R_n^2(x) dx$$

ou normalizando x para o intervalo $[0, 1]$:

$$y = \frac{x-a}{b-a} \quad \rightarrow \quad dx = (b-a) dy, \quad \text{resulta em:}$$

$$MSE = \int_0^1 R_n^2(y) dy$$

que pode ser usado para determinar a melhor aproximação para $f(x)$ dentre várias alternativas.

Exemplo: construir os gráficos das aproximações de $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ usando interpolações polinomiais de 2^a, 3^a e 10^a graus com pontos igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$, os gráficos dos erros da interpolação e calcular o MSE.

Interpolação	Comparação da Função Real com a Interpolada	Erro da Interpolação	$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} R_n(x)^2 \cdot dx$
Interpolação Polinomial de Segundo Grau com Pontos Igualmente Espaçados			0,207
Interpolação Polinomial de Terceiro Grau com Pontos Igualmente Espaçados			0,0595
Interpolação Polinomial de Décimo Grau com Pontos Igualmente Espaçados			0,337
Interpolação Polinomial de Décimo Grau como Pontos as Raízes do 11º Polinômio de Chebyshev			$3,23 \cdot 10^{-3}$

Neste exemplo foram usados pontos igualmente espaçados para construir os polinômios interpoladores. Porém, é possível determinar os pontos nodais que geram um polinômio interpolador com o menor resíduo possível entre polinômios de mesmo grau. Para determinar estes pontos nodais ótimos, partimos da expressão do erro:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[\xi(x)]}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}[\xi(x)]}{(n+1)!} P_{n+1}(x)$$

onde $P_{n+1}(x)$ é o polinômio nodal com $a_{n+1} = 1$. Reescrevendo $P_{n+1}(x)$ na forma:

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \sum_{i=0}^n c_i x^i$$

os $n+1$ coeficientes c_i podem ser determinados de maneira a minimizar o MSE:

$$\mathbf{c} = \arg \min_{c_0, c_1, \dots, c_n} MSE(\mathbf{c})$$

sendo

$$MSE(\mathbf{c}) = \int_0^1 R_n^2(x; \mathbf{c}) dx = \int_0^1 \left\{ \frac{f^{(n+1)}[\xi(x; \mathbf{c})]}{(n+1)!} \left(x^{n+1} + \sum_{i=0}^n c_i x^i \right) \right\}^2 dx$$

Aplicando o teorema do valor médio da integral:

$$MSE(\mathbf{c}) = \left\{ \frac{f^{(n+1)}[\xi(\mathbf{c})]}{(n+1)!} \right\}^2 \int_0^1 \left(x^{n+1} + \sum_{i=0}^n c_i x^i \right)^2 dx$$

Como o mínimo do $MSE(\mathbf{c})$ ocorre quando $\nabla_{\mathbf{c}} MSE = 0$, temos:

$$\frac{\partial MSE(\mathbf{c})}{\partial c_k} = 2 \frac{f^{(n+1)}[\xi(\mathbf{c})]}{[(n+1)!]^2} \frac{df^{(n+1)}(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi(\mathbf{c})}{\partial c_k} \int_0^1 P_{n+1}^2(x) dx + 2 \left\{ \frac{f^{(n+1)}[\xi(\mathbf{c})]}{(n+1)!} \right\}^2 \int_0^1 x^k P_{n+1}(x) dx = 0,$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

Se considerarmos ξ independente de \mathbf{c} [válido quando $f^{(n+1)}(x)$ for constante], então,

$$\int_0^1 x^k P_{n+1}(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

O que permite concluir que $P_{n+1}(x)$ é um polinômio ortogonal no intervalo $[0, 1]$ em relação à função peso $w(x) = 1$. O polinômio que satisfaz essa condição de ortogonalidade é o polinômio de Jacobi, $P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x)$, com $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Portanto, uma boa aproximação para os pontos nodais que minimizam o MSE são as raízes do polinômio de Jacobi $P_{n+1}^{(0,0)}(x)$. Se o intervalo utilizado fosse $[-1, 1]$, então teríamos o polinômio de Legendre.

3.4 Critério de minimização do erro máximo

Até o momento utilizamos as condições:

$$f(x_i) = p_n(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

para determinarmos os coeficientes de $p_n(x)$. Outro critério que pode ser utilizado é a minimização do erro absoluto máximo da aproximação nos pontos dados:

$$\min_{c_0, c_1, \dots, c_n} \max_i |f(x_i) - p_n(x_i)|$$

ou para o caso de $f(x)$ ser conhecida:

$$\min_{c_0, c_1, \dots, c_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)|$$

Este critério é conhecido como **princípio minimax** de Chebyshev e o polinômio obtido é chamado de polinômio ótimo ou minimax.

Normalizando $z \in [a, b]$ para o intervalo $[-1, 1]$:

$$x = \frac{2z - b - a}{b - a}$$

é possível observar que os monômios $1, x, x^2, \dots, x^n$ de $p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ possuem magnitude

máxima em $x = \pm 1$ e mínima em $x = 0$, não havendo uma distribuição uniforme dos erros. Logo, se for possível encontrar um polinômio que distribua os erros de forma mais uniforme, a minimização do erro máximo resultará na melhor aproximação possível. Os polinômios que apresentam esta propriedade são os polinômios de Chebyshev:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

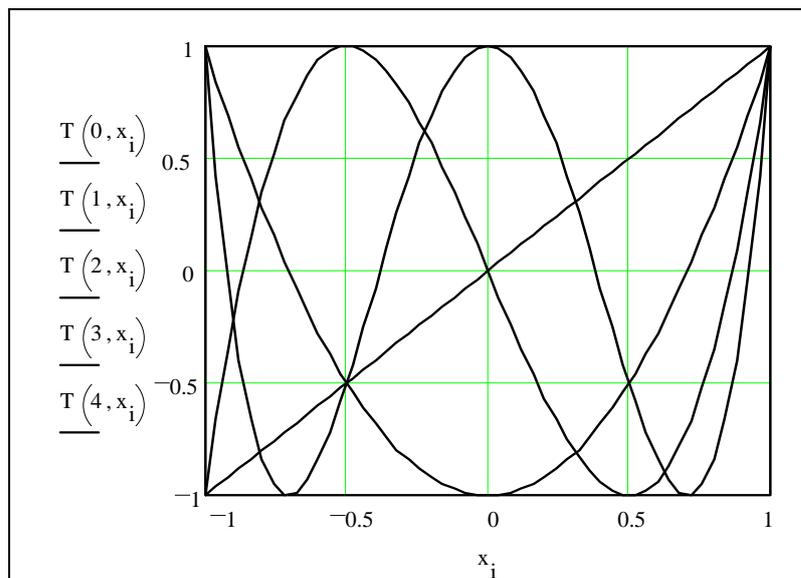
$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

Fórmula de Recorrência:

$$T_{n+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{com } T_0(x) = 1 \text{ e } T_1(x) = x$$

Gráfico dos 5 primeiros polinômios de Chebyshev



Os polinômios de Chebyshev são ortogonais em $x \in [-1, 1]$ com respeito a função peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ou seja:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi = \|T_0(x)\|^2, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} = \|T_n(x)\|^2, & n = m > 0 \end{cases}$$

Estes polinômios originaram das funções trigonométricas $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$, $\cos(3\theta)$, ..., $\cos(n\theta)$ que distribuem seus máximos e mínimos de maneira uniforme no intervalo $[0, \pi]$. Ao aplicar a mudança de variável:

$$x = \cos(\theta) \quad \rightarrow \quad x \in [-1, 1]$$

e a propriedade: $\cos(n\theta) = 2 \cos(\theta) \cos[(n-1)\theta] - \cos[(n-2)\theta]$, resulta nos polinômios de Chebyshev.

Pela condição de ortogonalidade, os coeficientes da aproximação:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n a_i T_i(x)$$

podem ser determinados por: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ e $a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Como $d\theta = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, então $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) d\theta$ e $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos(k\theta) d\theta$, $k = 1, 2, \dots, n$.

As n raízes de $T_n(x)$ são reais (característica de um polinômio ortogonal), ocorrem no intervalo $[-1, 1]$ e são dadas por:

$$r_k = \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Usando as $n+1$ raízes de $T_{n+1}(x)$ como pontos nodais da interpolação de Lagrange, a aproximação da função também pode ser realizada por:

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) f(x_i), \quad \text{com } x_i = r_{i+1}.$$

Representando os monômios x^k por: $x^k = \sum_{i=0}^k a_i T_i(x)$, é possível construir a tabela:

Potências de x em função dos polinômios de Chebyshev:

$$1 = T_0(x)$$

$$x = T_1(x)$$

$$x^2 = [T_2(x) + T_0(x)]/2$$

$$x^3 = [T_3(x) + 3T_1(x)]/4$$

$$x^4 = [T_4(x) + 4T_2(x) + 3T_0(x)]/8$$

$$x^5 = [T_5(x) + 5T_3(x) + 10T_1(x)]/16$$

$$x^6 = [T_6(x) + 6T_4(x) + 15T_2(x) + 10T_0(x)]/32$$

$$x^7 = [T_7(x) + 7T_5(x) + 21T_3(x) + 35T_1(x)]/64$$

$$x^8 = [T_8(x) + 8T_6(x) + 28T_4(x) + 56T_2(x) + 35T_0(x)]/128$$

$$x^9 = [T_9(x) + 9T_7(x) + 36T_5(x) + 84T_3(x) + 126T_1(x)]/256$$

que tem utilidade na telescopagem de séries.

Normalizando os polinômios de Chebyshev de tal forma que o coeficiente de maior grau seja igual 1, obtém-se os **polinômios de Chebyshev mônicos**:

$$\bar{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

Que possui a propriedade de um polinômio miminal:

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x \in [-1,1]} |\bar{T}_n(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| \quad \forall P_n(x)$$

E se $\max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| = \max_{x \in [-1,1]} |\bar{T}_n(x)|$, então $P_n(x) = \bar{T}_n(x)$.

3.5 Telescopagem de séries

A telescopagem de séries de potências ou economia de Chebyshev consiste em expressar os monômios da série em termos dos polinômios de Chebyshev, coletar os coeficientes de cada polinômio $T_i(x)$ e truncar a série nos monômios de Chebyshev de alta ordem sabendo que seu coeficiente representa o erro máximo da aproximação, pois $|T_i(x)| \leq 1$. A série truncada pode então ser re-expressa em termos dos monômios de x . Este procedimento é equivalente a fazer sucessivas reduções de grau do polinômio até a precisão desejada usando o polinômio Chebyshev mônico:

$$p_{n-1}(x) = p_n(x) - a_n \bar{T}_n(x), \quad \text{com } |p_n(x) - p_{n-1}(x)| = |a_n \bar{T}_n(x)| \leq \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

onde a_n é o coeficiente de x_n de $p_n(x)$.

Exemplo: reduzir o grau do seguinte polinômio que aproxima a função $f(x) = e^x$:

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \approx e^x \quad x \in [-1, 1]$$

Mantendo um erro máximo inferior a 0,05.

O erro da aproximação por $p_4(x)$ é: $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi) x^5}{5!} \rightarrow |R_4(x)| \leq \frac{e}{5!} \approx 0,023$

Reduzindo o grau da aproximação para $p_3(x)$:

Caso 1) Sem telescopagem: $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, temos:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi) x^4}{4!} \rightarrow |R_3(x)| \leq \frac{e}{4!} \approx 0,113, \text{ que está acima de } 0,05.$$

Caso 2) Com telescopagem:

$$p_4(x) = 1 + T_1(x) + \frac{T_2(x) + T_0(x)}{2 \cdot 2} + \frac{T_3(x) + 3T_1(x)}{4 \cdot 6} + \frac{T_4(x) + 4T_2(x) + 3T_0(x)}{8 \cdot 24}$$

Que após coletar os termos comuns de $T_i(x)$, resulta em:

$$p_4(x) = 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{64}\right)T_0(x) + \left(1 + \frac{1}{8}\right)T_1(x) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{48}\right)T_2(x) + \frac{T_3(x)}{24} + \frac{T_4(x)}{192}$$

Truncando no termo de grau 3:

$$p_3(x) = 1 + \frac{17}{64}T_0(x) + \frac{9}{8}T_1(x) + \frac{13}{48}T_2(x) + \frac{T_3(x)}{24}, \text{ o erro entre as duas aproximações é:}$$

$$|p_4(x) - p_3(x)| = \left| \frac{T_4(x)}{192} \right| \leq \frac{1}{192} \approx 0,0052$$

Portanto, o erro máximo ao aproximar $f(x)$ por $p_3(x)$ é: $0,023 + 0,0052 = 0,0282 < 0,05$.

Reescrevendo o polinômio em termos das potências de x :

$$p_3(x) = 1 + \frac{17}{64} \cdot 1 + \frac{9}{8} \cdot x + \frac{13}{48} \cdot (2x^2 - 1) + \frac{4x^3 - 3x}{24} = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{x^3}{6}$$

com $|R_3(x)| \leq 0,0282$.

Ou de maneira similar: $p_3(x) = p_4(x) - a_4 \bar{T}_4(x)$, isto é:

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{24} \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \right), \text{ pois } a_4 = 1/24, \text{ que após rearranjo dos termos}$$

resulta em:

$$p_3(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{x^3}{6}.$$

Reduzindo mais um grau na aproximação: $p_2(x) = p_3(x) - a_3 \bar{T}_3(x)$, temos:

$$p_2(x) = \frac{191}{192} + x + \frac{13}{24}x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6} \left(x^3 - \frac{3}{4}x \right), \text{ levando a:}$$

$$p_2(x) = \frac{191}{192} + \frac{9}{8}x + \frac{13}{24}x^2, \text{ com } |p_3(x) - p_2(x)| = \left| \frac{\bar{T}_3(x)}{6} \right| \leq \frac{1}{6 \cdot 4} \approx 0,042.$$

Portanto, o erro máximo ao aproximar $f(x)$ por $p_2(x)$ é: $0,0282 + 0,042 = 0,0702 > 0,05$.

1-) TELESCOPAGEM DE SÉRIES

Exponencial de x – com x no intervalo $-1 \leq x \leq +1$ com erro inferior a 10^{-3}

e^x

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880}$$

Expansão em série feita simbolicamente pelo MATHCAD até a nona potência de x

$$1 = T_0(x)$$

$$x = T_1(x)$$

$$x^2 = [T_2(x) + T_0(x)]/2$$

$$x^3 = [T_3(x) + 3T_1(x)]/4$$

$$x^4 = [T_4(x) + 4T_2(x) + 3T_0(x)]/8$$

$$x^5 = [T_5(x) + 5T_3(x) + 10T_1(x)]/16$$

$$x^6 = [T_6(x) + 6T_4(x) + 15T_2(x) + 10T_0(x)]/32$$

$$x^7 = [T_7(x) + 7T_5(x) + 21T_3(x) + 35T_1(x)]/64$$

$$x^8 = [T_8(x) + 8T_6(x) + 28T_4(x) + 56T_2(x) + 35T_0(x)]/128$$

$$x^9 = [T_9(x) + 9T_7(x) + 36T_5(x) + 84T_3(x) + 126T_1(x)]/256$$

Aproximação da exponencial por um polinômio de terceiro grau: $\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{8} = 5.21 \times 10^{-3}$

Erro da aproximação do primeiro termo após x^3

Como apenas este termo excede 10^{-3} o Erro total será então superior a 10^{-3}

Aproximação da exponencial por um polinômio de quarto grau: $\frac{1}{120} \cdot \frac{1}{16} = 5.21 \times 10^{-4}$

Erro da aproximação do primeiro termo após x^4

Erro inferior a 10^{-3}

Cálculo do Erro Máximo (em módulo) Total:

$$E_{\max} = \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{720} \cdot \left(\frac{1+6}{32} \right) + \frac{1}{5040} \cdot \left(\frac{1+7}{64} \right) + \frac{1}{40320} \cdot \left(\frac{1+8}{128} \right) + \frac{1}{362880} \cdot \left(\frac{1+9+36}{256} \right) + \frac{e}{10!} = 8.52 \times 10^{-4}$$

Erro máximo inferior a 10^{-3}

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{5 \cdot (4x^3 - 3x) + 10x}{120 \cdot 16} + \frac{6 \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) + 15 \cdot (2x^2 - 1) + 10}{720 \cdot 32} \dots$$

$$+ \frac{21 \cdot (4x^3 - 3x) + 35x}{5040 \cdot 64} + \frac{28 \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) + 56 \cdot (2x^2 - 1) + 35}{40320 \cdot 128} + \frac{84 \cdot (4x^3 - 3x) + 126x}{362880 \cdot 256}$$

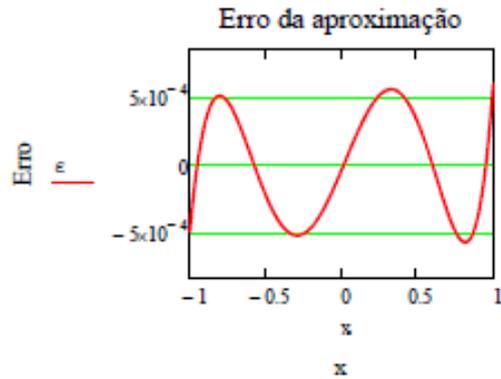
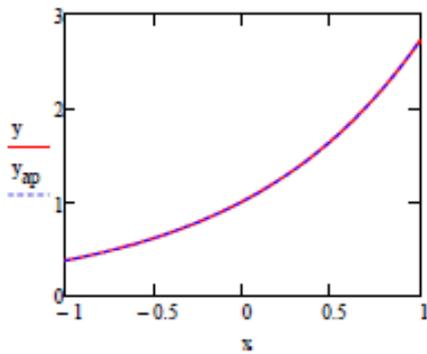
$$\begin{pmatrix} 245771 \\ 245760 \\ 147059 \\ 147456 \\ 23003 \\ 46080 \\ 49033 \\ 276480 \\ 1009 \\ 23040 \end{pmatrix}$$

Coefficientes calculados simbolicamente pelo MATHCAD

$$C := \begin{pmatrix} 245771 \\ 245760 \\ 147059 \\ 147456 \\ 23003 \\ 46080 \\ 49033 \\ 276480 \\ 1009 \\ 23040 \end{pmatrix}$$

$$f_{ap}(x) := \sum_{i=0}^4 (C_i \cdot x^i) \quad E(x) := e^x - f_{ap}(x)$$

$$k := 0..100 \quad x_k := -1 + \frac{k}{50} \quad y_k := e^{x_k} \quad y_{ap,k} := f_{ap}(x_k) \quad \epsilon_k := E(x_k)$$



$$c_0 := 1 \quad i := 1..4 \quad c_i := \frac{c_{i-1}}{i}$$

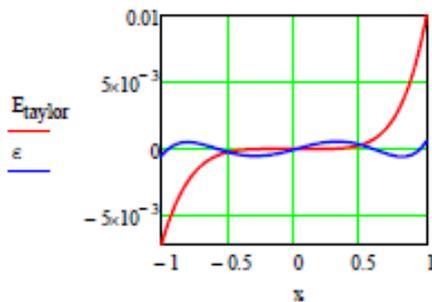
$$c^T = (1 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.166666666666666666 \quad 0.041666666666666666)$$

$$E_{taylor,k} := y_k - \sum_{i=0}^4 [c_i (x_k)^i]$$

Coefficientes resultantes do simples truncamento da série de Taylor após o termo em x^4

$$c^T = (1.0000447591145833 \quad 0.9973076714409722 \quad 0.49919704861111114 \quad 0.17734736689814815 \quad 0.04379340277777777)$$

Coefficientes resultantes da telescopiação da série de Taylor



Comparação entre o erro resultante do simples truncamento da série após o termo em x^4 (curva em vermelho) e o erro resultante da série telescopada usando Chebishev (curva em azul)

2-)TELESCOPAGEM DE SÉRIES

Cosseno de x – com x no intervalo $-1 \leq x \leq +1$ com erro inferior a 10^{-3}

$\cos(x)$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \quad \text{Expansão em série feita simbolicamente pelo MATHCAD até a oitava potência de } x$$

Apresenta um erro de truncamento máximo (em módulo) de: $E_{10} := \frac{1}{10!} = 2.76 \times 10^{-7}$

Aproximação da exponencial por um polinômio de segundo grau: $\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{8} = 5.21 \times 10^{-3}$

Erro da aproximação do termo em x^4

Como apenas este termo excede 10^{-3} o Erro total será então superior a 10^{-3}

Aproximação da exponencial por um polinômio de quarto grau: $\frac{1}{720} \cdot \frac{1}{32} = 4.34 \times 10^{-5}$

Erro da aproximação do termo de x^6

Erro inferior a 10^{-3}

Cálculo do Erro Máximo (em módulo) Total:

$$E_{\max} := \frac{1}{720} \left(\frac{1}{32} \right) + \frac{1}{40320} \left(\frac{1+8}{128} \right) + \frac{1}{10!} = 4.54 \times 10^{-5}$$

Erro máximo inferior a 10^{-3}

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{6 \cdot (8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1) + 15 \cdot (2 \cdot x^2 - 1) + 10}{720 \cdot 32} + \frac{28 \cdot (8 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 1) + 56 \cdot (2 \cdot x^2 - 1) + 35}{40320 \cdot 128}$$

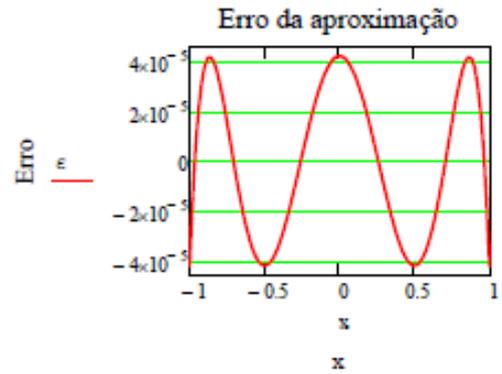
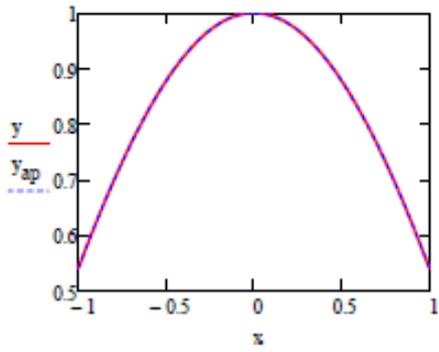
$$\begin{pmatrix} 737249 \\ 737280 \\ 0 \\ 4601 \\ 9216 \\ 0 \\ 913 \\ 23040 \end{pmatrix}$$

Coefficientes calculados simbolicamente pelo MATHCAD

$$C := \begin{pmatrix} 737249 \\ 737280 \\ 4601 \\ 9216 \\ 913 \\ 23040 \end{pmatrix}$$

$$f_{\text{ap}}(x) := \sum_{i=0}^2 (C_i \cdot x^{2-i}) \quad E(x) := \cos(x) - f_{\text{ap}}(x)$$

$$k := 0..100 \quad x_k := -1 + \frac{k}{50} \quad y_k := \cos(x_k) \quad y_{\text{ap}_k} := f_{\text{ap}}(x_k) \quad \epsilon_k := E(x_k)$$



$$c_0 := 1 \quad i := 1..2 \quad c_i := \frac{c_{i-1}}{2 \cdot i \cdot (2 \cdot i - 1)}$$

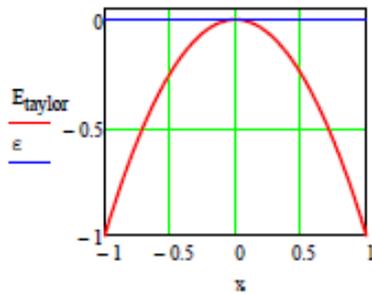
$$c^T = (1 \quad 0.5 \quad 0.041666666666666666 \quad 0.166666666666666666 \quad 0.041666666666666666)$$

$$E_{\text{taylor}_k} := y_k - \sum_{i=0}^2 [c_i (x_k)^{2 \cdot i}]$$

Coefficientes resultantes do simples truncamento da série de Taylor após o termo em x^4

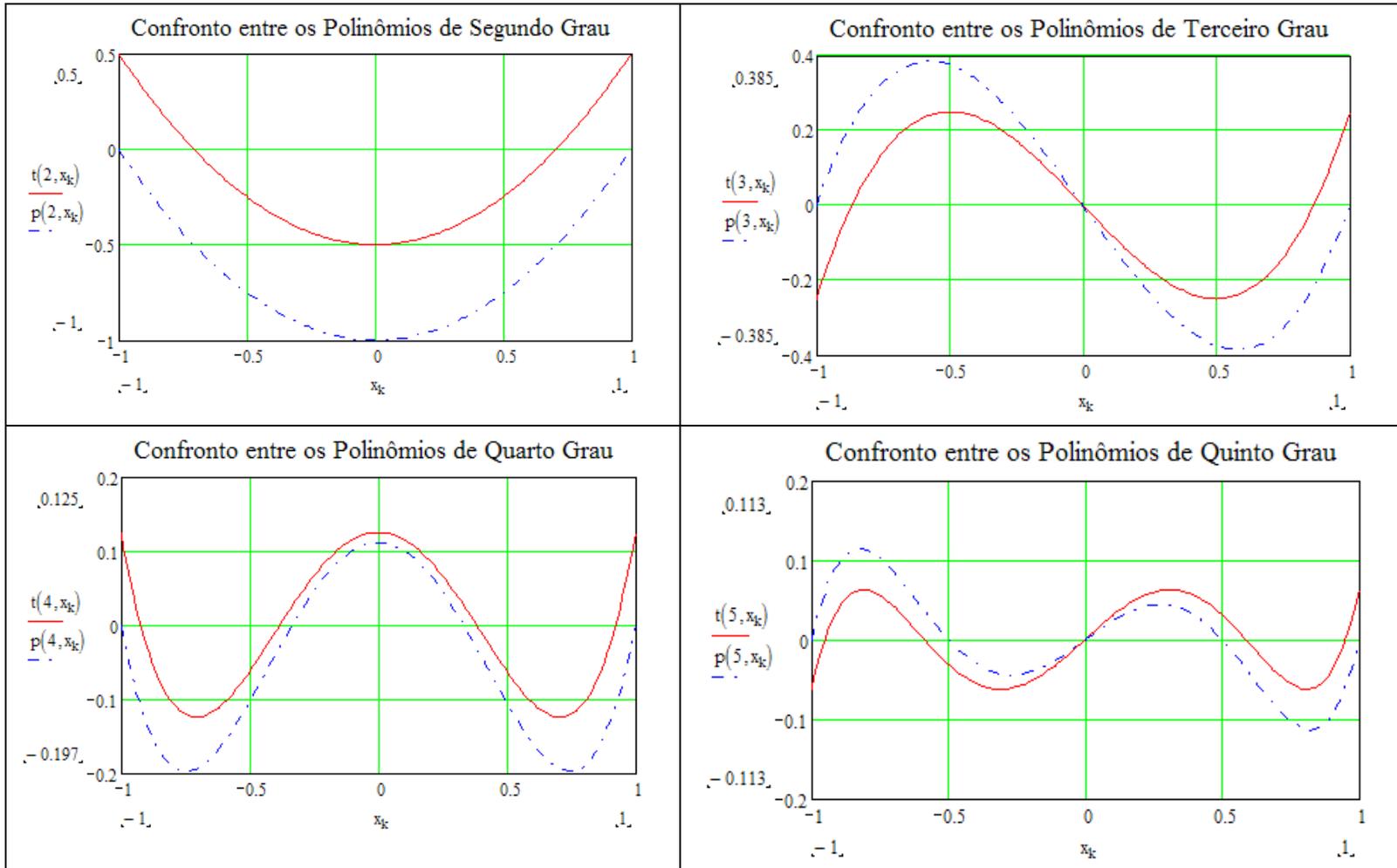
$$c^T = (0.9999579535590277 \quad -0.4992404513888889 \quad 0.03962673611111111)$$

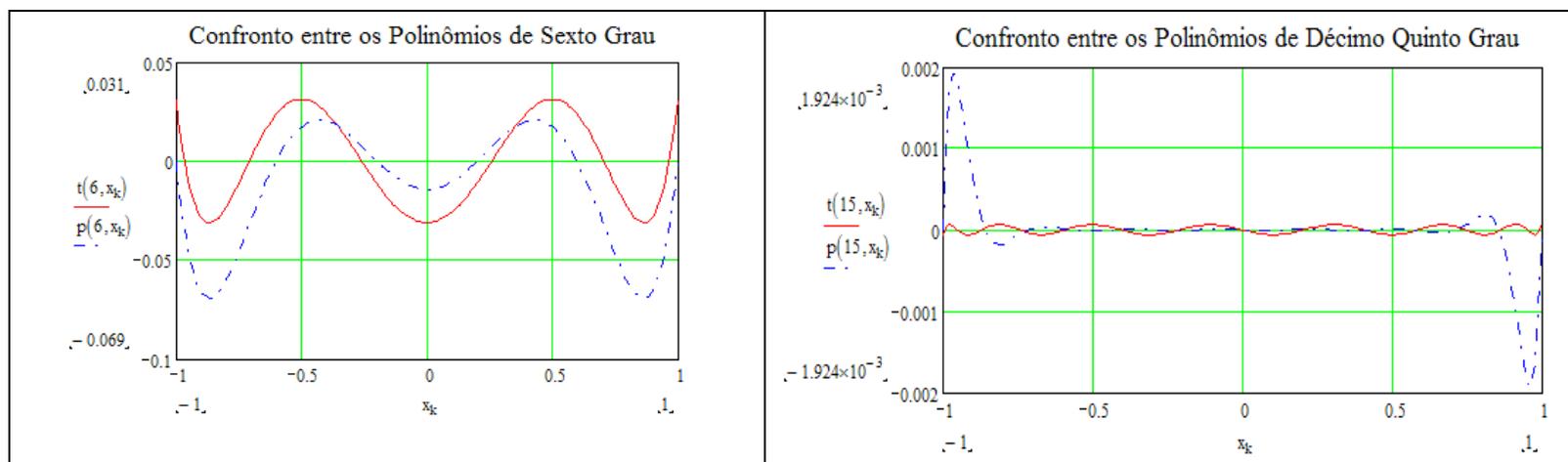
Coefficientes resultantes da telescopagem da série de Taylor



Comparação entre o erro resultante do simples truncamento da série após o termo em x^4 (curva em vermelho) e o erro resultante da série telescopada usando Chebishev (curva em azul)

Nas figuras a seguir são comparados os valores dos polinômios nodais com pontos igualmente espaçados com os polinômios nodais construídos a partir do polinômio de Chebyshev normalizados $[t_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ para $n \geq 1]$. Note que: $|t_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ para $n \geq 1$.





Lista de exercícios

1. Busque uma expressão de segundo grau e outra de terceiro grau que *melhor* aproximam a função x^4 no intervalo $2 \leq x \leq 8$. Analise e discuta seus resultados confrontando-os graficamente.
2. Aproxime a função e^x no intervalo: $0 \leq x \leq +2$ por um polinômio de menor grau em x , em que se assegura que o módulo do erro seja menor do que 10^{-2} .
3. *Hougen & Watson* sugerem a expressão empírica abaixo para o cálculo do calor específico molar do gás nitrogênio: $C_p = 6,3 + 1,82 \cdot 10^{-3} \cdot T - 0,345 \cdot 10^{-6} \cdot T^2$ onde: C_p : cal/gmol/K e T : Kelvin. Na faixa de 300 a 2100 K, o erro máximo do calor específico calculado por esta expressão é de 1,2 %.
 - a) determine a aproximação linear de C_p que minimiza o máximo do erro adicional na faixa de 1000 a 2000 K;
 - b) Calcule o erro percentual máximo da aproximação proposta em a).
4. A variação do coeficiente de expansão térmica do alumínio na faixa de 0 a 100° C é dada por:

$$k(T) = 0,22 \cdot 10^{-4} \cdot T + 0,009 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 \quad \text{com } T : ^\circ C .$$

- a) aproxime $k(T)$ por uma constante, na mesma faixa de 0 a 100° C, de modo que o valor do erro máximo seja mínimo;

- b) Calcule o valor médio de $k(T)$ $\left[\bar{k} = \frac{1}{100} \int_0^{100} k(T) \cdot dT \right]$ e sua média aritmética (na mesma

faixa de temperatura) e compare e discuta todos estes valores sugerindo que valor é o mais adequado!

5. Nas Tabelas abaixo, apresentam-se os valores da condutividade térmica do CO₂ e da viscosidade do etileno glicol líquido a várias temperaturas:

T (° F)	k (BTU/hr/ft/° F)
32	0,0085
212	0,0133
392	0,0181
572	0,0228

T (° F)	μ (lb/ft/hr)
0	242,00
50	82,10
100	30,50
150	12,60
200	5,57

Determine, em cada caso, o polinômio interpolador de menor grau possível que assegure um erro relativo inferior a 1,00 % na faixa tabelada de T .

Observação: a dependência polinomial de μ com T é mais adequadamente expressa por $\ln(\mu)$.

6. A tabela abaixo mostra a dependência da pressão parcial do vapor de amônia com a temperatura a diferentes concentrações:

Concentração percentual molal da amônia

Temperatura (° F)	0	10	20	25	30	35
60	0,26	1,42	3,51	5,55	8,65	13,22
80	0,51	2,43	5,85	9,06	13,86	20,61
100	0,95	4,05	9,34	14,22	21,32	31,16
140	2,89	9,98	21,49	31,54	45,73	64,78
180	7,51	21,65	44,02	62,68	88,17	121,68
220	17,19	42,47	81,91	113,81	156,41	211,24
250	29,83	66,67	124,08	169,48	229,62	305,60

por interpolação linear nas duas variáveis independentes [temperatura e concentração] calcule as pressões parciais da amônia nos seguintes casos:

T [° C]	126,5	126,5	126,5	60,0	237,5	237,5
Concentração Molal [%]	28,8	6,7	25,0	0,00	17,6	35,0