Considerando o exemplo teste:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda \cdot x(t) \qquad , \quad x(0) = x_0 \quad , \ \lambda > 0$$

Cuja solução analítica é: $x(t) = e^{-\lambda \cdot t} x_0$

Tem-se então: $x(t_i) = e^{-\lambda \cdot t_i} x_0$ e $x(t_{i-1}) = e^{-\lambda \cdot t_{i-1}} x_0$

A razão entre estes dois pontos fornece: $x(t_i) = e^{-\lambda \cdot (t_i - t_{i-1})} x(t_{i-1})$.

Como $t_i - t_{i-1} = h$, então: $x(t_i) = e^{-\lambda \cdot h} x(t_{i-1}) = p(\lambda \cdot h) \cdot x(t_{i-1})$, onde $p(\lambda \cdot h) = e^{-\lambda \cdot h}$

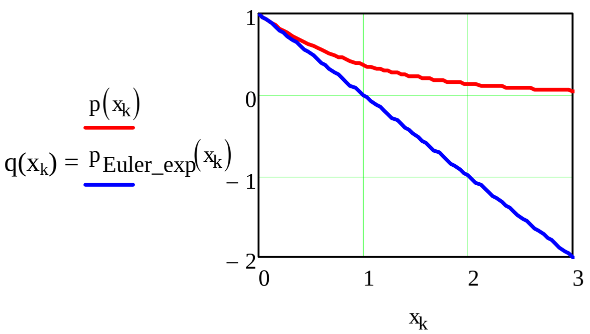
Para o método de Euler explícito temos: $u_i = (1 - \lambda \cdot h) \cdot u_{i-1}$

<u>Euler simples explícito</u>: $q(\lambda \cdot h) = 1 - \lambda \cdot h$, havendo três possibilidades:

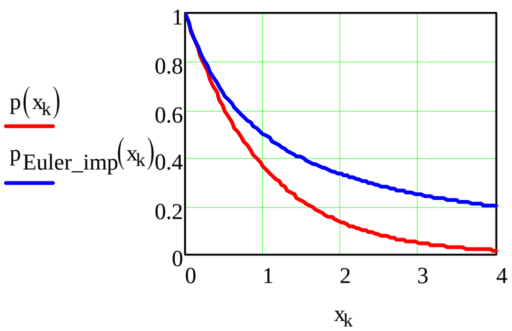
(i) $0 < h < \frac{1}{\lambda} \Rightarrow 0 < q(\lambda \cdot h) < 1$ solução numérica estável e não oscilatória;

(ii) $\frac{1}{\lambda} < h < \frac{2}{\lambda} \Rightarrow -1 < q(\lambda \cdot h) < 0$ solução numérica estável e oscilatória;

(iii) $\frac{2}{\lambda} < h \Rightarrow q(\lambda \cdot h) < -1$ solução numérica instável e oscilatória.



<u>Euler simples implícito</u>: $q(\lambda \cdot h) = \frac{1}{1 + \lambda \cdot h}$, como $0 < q(\lambda \cdot h) < 1$ para todo $h > 0$, a solução numérica é sempre estável e não oscilatória (método robusto).

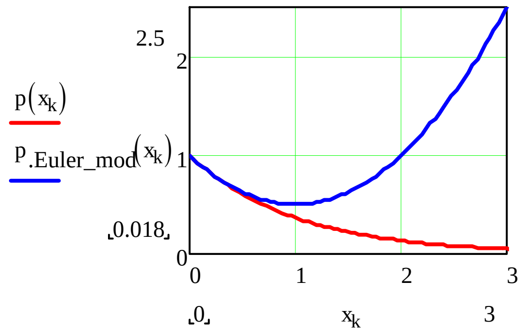


<u>Euler explícito de dois estágios</u>: $q(\lambda \cdot h) = 1 - \lambda \cdot h + \dfrac{(\lambda \cdot h)^2}{2}$

havendo duas possibilidades:

(i) $0 < h < \dfrac{2}{\lambda} \Rightarrow \dfrac{1}{2} < q(\lambda \cdot h) < 1$ solução numérica estável e não oscilatória;

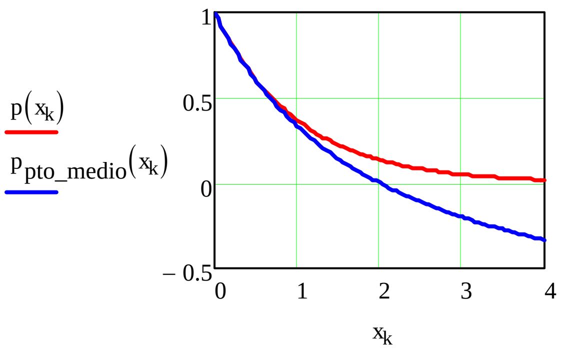
(ii) $\dfrac{2}{\lambda} < h \Rightarrow 1 < q(\lambda \cdot h)$ solução numérica instável e não oscilatória.



<u>Euler implícito – ponto médio</u>: $q(\lambda \cdot h) = \dfrac{1 - \dfrac{\lambda \cdot h}{2}}{1 + \dfrac{\lambda \cdot h}{2}}$, havendo duas possibilidades:

(i) $0 < h < \dfrac{2}{\lambda} \Rightarrow 0 < q(\lambda \cdot h) < 1$ solução numérica estável e não oscilatória;

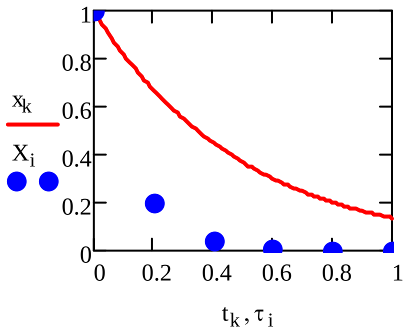
(ii) $\dfrac{2}{\lambda} < h \Rightarrow -1 < q(\lambda \cdot h) < 0$ solução numérica estável e oscilatória.



Exemplo numérico: $\lambda = 2$

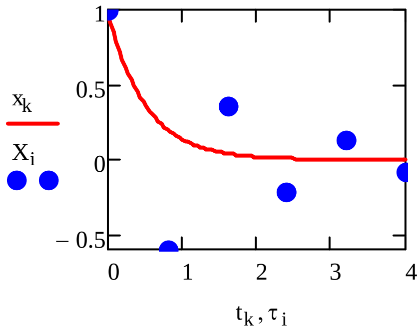
Euler simples explícito:

(i) $0 < h < 0,5$, por exemplo $h = 0,2 \Rightarrow q = 0,6$ valor exato: $p = e^{-0,4} = 0,67$



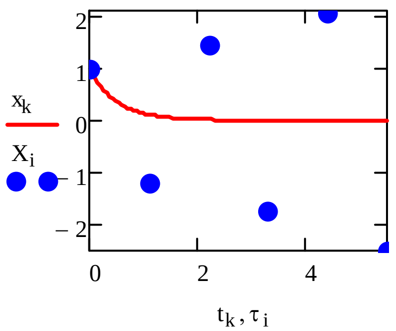
t	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
x_{exato}	1,000	0,6703	0,4493	0,3012	0,2019	0,1353
$x_{numérico}$	1,000	0,600	0,360	0,216	0,1296	0,07776

(ii) $0,5 < h < 1$, por exemplo $h = 0,8 \Rightarrow q = -0,6$ valor exato: $p = e^{-1,6} = 0,202$



t	0,0	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0
x_{exato}	1,000	0,2019	0,0408	0,0082	0,0017	0,0003
$x_{numérico}$	1,000	-0,600	0,3600	-0,216	0,1296	-0,07776

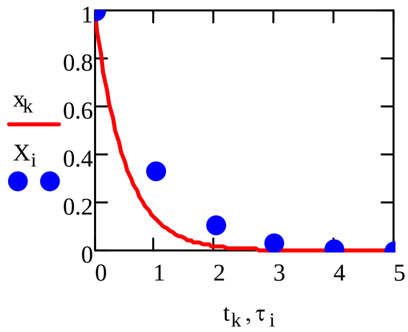
(iii) $1 < h$, por exemplo $h = 1,1 \Rightarrow q = -1,2$ valor exato: $p = e^{-2,2} = 0,111$



t	0,0	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5
x_{exato}	1,000	0,1108	0,0123	0,0014	0,0002	0,0000
$x_{numérico}$	1,000	-1,200	1,4400	-1,728	2,0736	-2,4883

Euler simples implícito:

com $h = 1,0 \Rightarrow q = \dfrac{1}{1+2} = 1/3$ valor exato: $p = e^{-2} = 0,135$

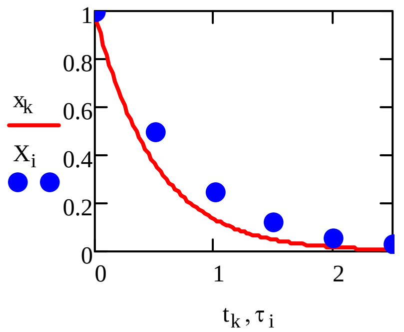


t	0	1	2	3	4	5
x_{exato}	1,000	0,1353	0,0183	0,0025	0,0003	0,0000
$x_{numérico}$	1,000	0,3333	0,1111	0,03704	0,01235	0,00411

Euler explícito de duas etapas: $q(\lambda \cdot h) = 1 - \lambda \cdot h + \dfrac{(\lambda \cdot h)^2}{2}$,

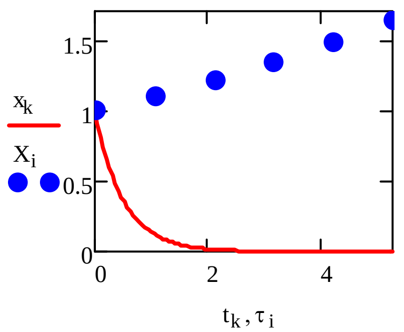
havendo duas possibilidades:

(i) $0 < h < 1 \Rightarrow h = 0,5 \Rightarrow q = 0,5$ e $p = e^{-1} = 0,368$;



t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
x_{exato}	1,000	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067
$x_{numérico}$	1,000	0,5000	0,2500	0,1250	0,0625	0,03125

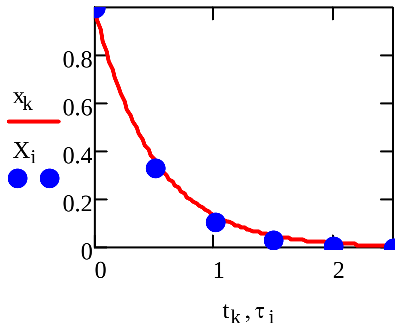
(ii) $1 < h \Rightarrow h = 1,05 \Rightarrow q = 1,105$ e $p = e^{-2,1} = 0,1225$



t	0	1,05	2,1	3,15	4,2	5,25
x_{exato}	1,000	0,1225	0,015	0,0018	0,0002	0,0000
$x_{numérico}$	1,000	1,105	1,221	1,3492	1,4909	1,6474

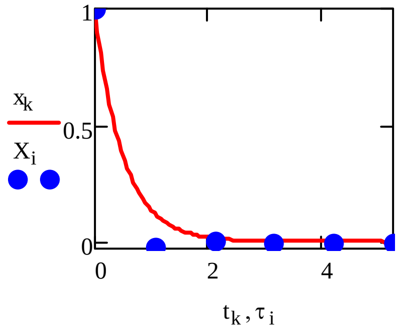
Euler implícito – ponto médio: $q = \dfrac{1-h}{1+h}$, havendo duas possibilidades:

(i) $0 < h < 1 \Rightarrow h = 0,5 \Rightarrow q = \dfrac{1}{3}$ e $p = e^{-1} = 0,368$;



t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
x_{exato}	1,000	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067
$x_{numérico}$	1,000	0,3333	0,1111	0,03704	0,01235	0,00411

(ii) $1 < h \Rightarrow h = 1,05 \Rightarrow q = -0,024$ e $p = e^{-2,1} = 0,1225$



t	0	1,05	2,1	3,15	4,2	5,25
x_{exato}	1,000	0,1225	0,015	0,0018	0,0002	0,0000
$x_{numérico}$	1,000	-0,0244	0,0006	-0,00001	0,0000	-0,0000