SME 0200 - Cálculo Numérico I

Docente: Prof. Dr. Marcos Arenales
Estagiário PAE: Pedro Munari

Obtenção de raízes complexas
Método de Newton-Bairstow

Material baseado nos slides do Prof. Dr. Alysson Costa

Obtenção de raízes complexas

- O método de Newton também pode ser usado para obter raízes complexas, utilizando aritmética complexa.

- Neste caso, veremos um método que obtém raízes complexas usando aritmética real.

- Se P(x) é um polinômio da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

e os coeficientes são reais, então as raízes complexas aparecem em pares conjugados, como solução de uma equação:

$$x^2 - \alpha x - \beta = 0$$

Quociente e resto:

- Podemos expressar P(x) como:

$$P(x) = \left(x^2 - \alpha\, x - \beta\right) Q(x) + b_1(x - \alpha) + b_0$$

$$Q(x) = b_n\, x^{n-2} + b_{n-1}\, x^{n-3} + \ldots + b_2$$

- Vamos determinar quem são os coeficientes de Q(x). Multiplicamos Q(x) pelo termo quadrático e igualamos os coeficientes:

Igualando termos

$$P(x) = \left(x^2 - \alpha\, x - \beta\right) Q(x) + b_1(x-\alpha) + b_0$$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 \left(b_n\, x^{n-2} + b_{n-1}\, x^{n-3} + \ldots + b_2\right) \\ &- \alpha x \left(b_n\, x^{n-2} + b_{n-1}\, x^{n-3} + \ldots + b_2\right) \\ &- \beta \left(b_n\, x^{n-2} + b_{n-1}\, x^{n-3} + \ldots + b_2\right) \\ &+ b_1(x-\alpha) + b_0 \end{aligned}$$

Rearrumando:

$$\begin{aligned} &= b_n\, x^n + (b_{n-1} - \alpha\, b_n)\, x^{n-1} + (b_{n-2} - \alpha\, b_{n-1} - \beta\, b_n)\, x^{n-2} \\ &+ \ldots + (b_1 - \alpha\, b_2 - \beta\, b_3)\, x + (b_0 - \alpha\, b_1 - \beta\, b_2)\,. \end{aligned}$$

=

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Termo a termo:

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \ , \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha \, b_n \ , \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha \, b_{n-1} + \beta \, b_n \ , \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha \, b_2 + \beta \, b_3 \ , \\
b_0 &= a_0 + \alpha \, b_1 + \beta \, b_2 \ .
\end{aligned}
$$

Como anteriormente, fazemos um "esquema prático" para cálculo:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
α		+ αb_n	+ αb_{n-1}	...	+ αb_3	+ αb_2	+ αb_1
β			+ βb_n	...	+ βb_4	+ βb_3	+ βb_2
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_2	b_1	b_0

Sistema não linear

- O que queremos são valores de α e β que façam com que b_0 e b_1 se anulem.

$$P(x) = (x^2 - \alpha x - \beta) Q(x) + b_1(x-\alpha) + b_0$$

$$\begin{cases} b_1(\alpha, \beta) = 0 \\ b_0(\alpha, \beta) = 0 \end{cases}$$

Note que b_0 e b_1 são funções de α e β.

Podemos resolver este sistema usando o método de Newton para sistemas não lineares:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + z$$

$$F'(x_k, y_k)\ z = -F(x_k, y_k)$$

No nosso caso...

$$F(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} b_1(\alpha,\beta) \\ b_0(\alpha,\beta) \end{bmatrix}$$

$$F'(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial b_1(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_1(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial b_0(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_0(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} z^{\alpha} \\ z^{\beta} \end{bmatrix}$$

No nosso caso...

Resolva:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial b_1(\alpha_k,\beta_k)}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_1(\alpha_k,\beta_k)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial b_0(\alpha_k,\beta_k)}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_0(\alpha_k,\beta_k)}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^\alpha \\ z^\beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_1(\alpha_k,\beta_k) \\ b_0(\alpha_k,\beta_k) \end{bmatrix}$$

Atualize a solução:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k + z^\alpha \\ \beta_k + z^\beta \end{bmatrix}$$

É possível simplificar a expressão da matriz Jacobiana?

Calculando as derivadas parciais (α)

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \,, \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha\, b_n \,, \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha\, b_{n-1} + \beta\, b_n \,, \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha\, b_2 + \beta\, b_3 \,, \\
b_0 &= a_0 + \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 \,.
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial \alpha} = 0 \,,$$

$$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha} = b_n \,,$$

$$\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha} = b_{n-1} + \alpha \frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha} \,,$$

$$\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \alpha} = b_{n-2} + \alpha \frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha} \,,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = b_2 + \alpha \frac{\partial b_2}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial b_3}{\partial \alpha} \,,$$

$$\frac{\partial b_0}{\partial \alpha} = b_1 + \alpha \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial b_2}{\partial \alpha} \,.$$

Calculando as derivadas parciais (α)

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \ , \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha\, b_n \ , \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha\, b_{n-1} + \beta\, b_n \ , \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha\, b_2 + \beta\, b_3 \ , \\
b_0 &= a_0 + \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 \ .
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial \alpha} = 0 \ ,$$

$$\cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} = b_n \ ,$$

$$\cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha}} = b_{n-1} + \alpha \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} \ ,$$

$$\cancelto{c_{n-2}}{\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \alpha}} = b_{n-2} + \alpha \cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} \ ,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cancelto{c_2}{\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}} = b_2 + \alpha \cancelto{c_3}{\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_4}{\frac{\partial b_3}{\partial \alpha}} \ ,$$

$$\cancelto{c_1}{\frac{\partial b_0}{\partial \alpha}} = b_1 + \alpha \cancelto{c_2}{\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_3}{\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}} \ .$$

Assim...

$$
\begin{aligned}
c_n &= b_n \ , \\
c_{n-1} &= b_{n-1} + \alpha c_n \ , \\
c_{n-2} &= b_{n-2} + \alpha c_{n-1} + \beta c_n \ , \\
c_{n-3} &= b_{n-3} + \alpha c_{n-2} + \beta c_{n-1} \ , \\
&\vdots \\
c_2 &= b_2 + \alpha c_3 + \beta c_4 \ , \\
c_1 &= b_1 + \alpha c_2 + \beta c_3 \ .
\end{aligned}
$$

Procedimento prático aplicável

$$\frac{\partial b_n}{\partial \alpha} = 0 \ ,$$

$$\cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} = b_n \ ,$$

$$\cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha}} = b_{n-1} + \alpha \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} \ ,$$

$$\cancelto{c_{n-2}}{\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \alpha}} = b_{n-2} + \alpha \cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-1}}{\partial \alpha}} \ ,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cancelto{c_2}{\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}} = b_2 + \alpha \cancelto{c_3}{\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_4}{\frac{\partial b_3}{\partial \alpha}} \ ,$$

$$\cancelto{c_1}{\frac{\partial b_0}{\partial \alpha}} = b_1 + \alpha \cancelto{c_2}{\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}} + \beta \cancelto{c_3}{\frac{\partial b_2}{\partial \alpha}} \ .$$

Procedimento prático:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
α		$+$ αb_n	$+$ αb_{n-1}	...	$+$ αb_3	$+$ αb_2	$+$ αb_1
β			$+$ βb_n	...	$+$ βb_4	$+$ βb_3	$+$ βb_2
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_2	b_1	b_0
α		αc_n	αc_{n-1}	...	αc_3	αc_2	
β			$+$ βc_n	...	$+$ βc_4	$+$ βc_3	
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	...	c_2	c_1	
						$\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial b_0}{\partial \alpha}$

Assim, podemos atualizar a matriz Jacobiana

c_2

c_1

$$F'(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial b_1(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial b_1(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial b_0(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial b_0(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

Ainda precisamos calcular as derivadas parciais em relação ao β...

Calculando as derivadas parciais (β)

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \;, \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha\, b_n \;, \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha\, b_{n-1} + \beta\, b_n \;, \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha\, b_2 + \beta\, b_3 \;, \\
b_0 &= a_0 + \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 \;.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b_n}{\partial \beta} &= \frac{\partial b_{n-1}}{\partial \beta} = 0 \\
\cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \beta}} &= bn \;, \\
\cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \beta}} &= b_{n-1} + \alpha\, \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \beta}} \;, \\
\cancelto{c_{n-2}}{\frac{\partial b_{n-4}}{\partial \beta}} &= b_{n-2} + \alpha \cancelto{c_{n-1}}{\frac{\partial b_{n-3}}{\partial \beta}} + \cancelto{c_n}{\frac{\partial b_{n-2}}{\partial \beta}} \;,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cancelto{c_3}{\frac{\partial b_1}{\partial \beta}} &= b_3 + \alpha \cancelto{c_4}{\frac{\partial b_2}{\partial \beta}} + \beta \cancelto{c_5}{\frac{\partial b_3}{\partial \beta}} \;, \\
\cancelto{c_2}{\frac{\partial b_0}{\partial \beta}} &= b_2 + \alpha \cancelto{c_3}{\frac{\partial b_1}{\partial \beta}} + \beta \cancelto{c_4}{\frac{\partial b_2}{\partial \beta}} \;.
\end{aligned}
$$

Assim, podemos atualizar a matriz Jacobiana

$$F'(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \cancelto{c_2}{\dfrac{\partial b_1(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}} & \cancelto{c_3}{\dfrac{\partial b_1(\alpha,\beta)}{\partial \beta}} \\ \cancelto{c_1}{\dfrac{\partial b_0(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}} & \cancelto{c_2}{\dfrac{\partial b_0(\alpha,\beta)}{\partial \beta}} \end{bmatrix}$$

Logo:

$$F'(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} c_2(\alpha,\beta) & c_3(\alpha,\beta) \\ c_1(\alpha,\beta) & c_2(\alpha,\beta) \end{bmatrix}$$

Com os coeficientes:

$$
\begin{aligned}
c_n &= b_n \,, \\
c_{n-1} &= b_{n-1} + \alpha c_n \,, \\
c_{n-2} &= b_{n-2} + \alpha c_{n-1} + \beta c_n \,, \\
c_{n-3} &= b_{n-3} + \alpha c_{n-2} + \beta c_{n-1} \,, \\
&\vdots \\
c_2 &= b_2 + \alpha c_3 + \beta c_4 \,, \\
c_1 &= b_1 + \alpha c_2 + \beta c_3 \,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n \,, \\
b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha\, b_n \,, \\
b_{n-2} &= a_{n-2} + \alpha\, b_{n-1} + \beta\, b_n \,, \\
&\vdots \\
b_1 &= a_1 + \alpha\, b_2 + \beta\, b_3 \,, \\
b_0 &= a_0 + \alpha\, b_1 + \beta\, b_2 \,.
\end{aligned}
$$

Calculados pelo procedimento prático:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
α		$+$ αb_n	$+$ αb_{n-1}	...	$+$ αb_3	$+$ αb_2	$+$ αb_1
β			$+$ βb_n	...	$+$ βb_4	$+$ βb_3	$+$ βb_2
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_2	b_1	b_0
α		αc_n	αc_{n-1}	...	αc_3	αc_2	
β			$+$ βc_n	...	$+$ βc_4	$+$ βc_3	
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	...	c_2	c_1	

Método de Newton-Bairstow

- Algoritmo...

Entrada: coeficientes do polinômio; (α_0, β_0); ε; k_max;
Saída: par conjugado complexo (zeros do polinômio);

Início

```
(α, β) := (α0, β0);
k := 0;
Pare := falso;
Enquanto ( (Pare = falso) E (k < k_max) ) faça
   Calcule os coeficientes bi e ci pelo procedimento prático;
   Se ( |b1| < ε  E |b0| < ε )
      então Pare := verdadeiro;
   Senão
      Resolva o sistema linear:
```

$$\begin{bmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^\alpha \\ z^\beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

```
      Atualize a solução:
```

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + z^\alpha \\ \beta + z^\beta \end{bmatrix}$$

```
      k := k + 1;
Fim_enquanto
Se( k = k_max ) então "O método não convergiu";
Senão Resolva a equação x^2 - αx - β = 0;
```

Fim

Exemplo

- Utilize o método de Newton- Bairstow para calcular duas raízes conjugadas da equação polinomial

$$P(x) = x^4 -2x^3 + 4x^2 - 4x + 4 = 0$$

iniciando com $(\alpha_0, \beta_0) = (0, 0)$.

(Use $\varepsilon = 10^{-3}$ e 5 algarismos significativos)

Iteração 1

$(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0) = (0, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
α					
β					
b_i					
α					
β					
c_i					

Iteração 1

$(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0) = (0, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
0					
0					
b_i					
0					
0					
c_i					

Iteração 1

$(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0) = (0, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
0					
0					
b_i	1				
0					
0					
c_i	1				

Iteração 1

$(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0) = (0, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
0		0			
0					
b_i	1	-2			
0		0			
0					
c_i	1	-2			

Iteração 1

$(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0) = (0, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
0		0	0	0	0
0			0	0	0
b_i	1	-2	4	-4 $\lvert b_1 \rvert > \varepsilon$	4 $\lvert b_0 \rvert > \varepsilon$
0		0	0	0	
0			0	0	
c_i	1	-2 c_3	4 c_2	-4 c_1	

Iteração 1

$(\alpha, \beta) = (0, 0)$

Assim:

$$\begin{aligned} b_1 &= -4 \\ b_0 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad F(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= -2 \\ c_2 &= 4 \\ c_1 &= -4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad F'(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$(\alpha, \beta) = (0, 0)$

Resolva o sistema:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Atualize a solução:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iteração 2

$(\alpha, \beta) = (1, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1					
0					
b_i					
1					
0					
c_i					

Iteração 2

$(\alpha, \beta) = (1, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1		1			
0					
b_i	1				
1		1			
0					
c_i	1				

Iteração 2

$(\alpha, \beta) = (1, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1		1			
0					
b_i	1	-1			
1		1			
0					
c_i	1	0			

Iteração 2

$(\alpha, \beta) = (1, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1		1	-1		
0			0		
b_i	1	-1	3		
1		1	0		
0			0		
c_i	1	0	3		

Iteração 2

$(\alpha, \beta) = (1, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1		1	-1	3	
0			0	0	
b_i	1	-1	3	-1	
1		1	0	3	
0			0	0	
c_i	1	0	3	2	

Iteração 2

$(\alpha, \beta) = (1, 0)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1		1	-1	3	-1
0			0	0	0
b_i	1	-1	3	-1 $\lvert b_1 \rvert > \varepsilon$	3 $\lvert b_0 \rvert > \varepsilon$
1		1	0	3	
0			0	0	
c_i	1	0 c_3	3 c_2	2 c_1	

Iteração 2

$(\alpha, \beta) = (1, 0)$

Assim:

$$b_1 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad F(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$b_0 = 3$$

$$c_3 = 0$$
$$c_2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad F'(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$c_1 = 2$$

Iteração 2

$(\alpha, \beta) = (1, 0)$

Resolva o sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33333 \\ -1.2222 \end{bmatrix}$$

Atualize a solução:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.33333 \\ -1.2222 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ -1.2222 \end{bmatrix}$$

Iteração 3

$(\alpha, \beta) = (1.3333, -1.2222)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.3333					
-1.2222					
b_i					
1.3333					
-1.2222					
c_i					

Iteração 3

$(\alpha, \beta) = (1.3333, -1.2222)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.3333					
-1.2222					
b_i	1				
1.3333					
-1.2222					
c_i	1				

Iteração 3

$(\alpha, \beta) = (1.3333, -1.2222)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.3333		1.3333			
-1.2222					
b_i	1	-0.6667			
1.3333		1.3333			
-1.2222					
c_i	1	0.6666			

Iteração 3

(α, β) = (1.3333, -1.2222)

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.3333		1.3333	-0.88891		
-1.2222			-1.2222		
b_i	1	-0.6667	1.8889		
1.3333		1.3333			
-1.2222					
c_i	1	0.6666			

Iteração 3

$(\alpha, \beta) = (1.3333, -1.2222)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.3333		1.3333	-0.88891		
-1.2222			-1.2222		
b_i	1	-0.6667	1.8889		
1.3333		1.3333	0.88878		
-1.2222			-1.2222		
c_i	1	0.6666	1.5555		

Iteração 3

$(\alpha, \beta) = (1.3333, -1.2222)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.3333		1.3333	-0.88891	2.5185	-0.88886
-1.2222			-1.2222	0.81484	-2.3086
b_i	1	-0.6667	1.8889	-0.66666 $\lvert b_1 \rvert > \varepsilon$	0.80254 $\lvert b_0 \rvert > \varepsilon$
1.3333		1.3333	0.88878	2.0739	
-1.2222			-1.2222	-0.81472	
c_i	1	0.6666 c_3	1.5555 c_2	0.59252 c_1	

Iteração 3

$(\alpha, \beta) = (1.3333, -1.2222)$

Assim:

$$b_1 = -0.66666$$
$$b_0 = 0.80254$$

$$\Rightarrow \quad F(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -0.66666 \\ 0.80254 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = 0.6666$$
$$c_2 = 1.5555$$
$$c_1 = 0.59252$$

$$\Rightarrow \quad F'(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1.5555 & 0.6666 \\ 0.59252 & 1.5555 \end{bmatrix}$$

Iteração 3

(α, β) = (1.3333, -1.2222)

Resolva o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1.5555 & 0.6666 \\ 0.59252 & 1.5555 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.66666 \\ 0.80254 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.77643 \\ -0.81169 \end{bmatrix}$$

Atualize a solução:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3333 \\ -1.2222 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.77643 \\ -0.81169 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1097 \\ -2.0339 \end{bmatrix}$$

Iteração 4

$(\alpha, \beta) = (2.1097, -2.0339)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
2.1097					
-2.0339					
b_i	1				
2.1097					
-2.0339					
c_i	1				

Iteração 4

$(\alpha, \beta) = (2.1097, -2.0339)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
2.1097		2.1097	0.23143	4.6361	0.87126
-2.0339			-2.0339	-0.22312	-4.4695
b_i	1	0.1097	2.1975	0.41298 $\lvert b_1 \rvert > \varepsilon$	0.40176 $\lvert b_0 \rvert > \varepsilon$
2.1097		2.1097	4.6823	10.223	
-2.0339			-2.0339	-4.514	
c_i	1	2.2194 c_3	4.8459 c_2	6.122 c_1	

Iteração 4

$(\alpha, \beta) = (2.1097, -2.0339)$

Assim:

$$b_1 = 0.41298 \qquad \Rightarrow \qquad F(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 0.41298 \\ 0.40176 \end{bmatrix}$$
$$b_0 = 0.40176$$

$$c_3 = 2.2194$$
$$c_2 = 4.8459 \qquad \Rightarrow \qquad F'(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 4.8459 & 2.2194 \\ 6.122 & 4.8459 \end{bmatrix}$$
$$c_1 = 6.122$$

Iteração 4

(α, β) = (2.1097, -2.0339)

Resolva o sistema:

$$\begin{bmatrix} 4.8459 & 2.2194 \\ 6.122 & 4.8459 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.41298 \\ 0.40176 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.11213 \\ 0.058751 \end{bmatrix}$$

Atualize a solução:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1097 \\ -2.0339 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.11213 \\ 0.058751 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9976 \\ -1.9751 \end{bmatrix}$$

Iteração 5

$(\alpha, \beta) = (1.9976, -1.9751)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.9976					
-1.9751					
b_i	1				
1.9976					
-1.9751					
c_i	1				

Iteração 5

$(\alpha, \beta) = (1.9976, -1.9751)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.9976		1.9976	-0.0047942	4.0354	0.080184
-1.9751			-1.9751	0.0047402	-3.9899
b_i	1	-0.0024	2.0201	$\lvert b_1 \rvert > \varepsilon$ 0.04014	$\lvert b_0 \rvert > \varepsilon$ 0.090284
1.9976		1.9976	3.9856	8.0515	
-1.9751			-1.9751	-3.9407	
c_i	1	1.9952 c_3	4.0306 c_2	4.1509 c_1	

Iteração 5

$(\alpha, \beta) = (1.9976, -1.9751)$

Assim:

$$b_1 = 0.04014$$
$$b_0 = 0.090284$$

$$\Rightarrow \quad F(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 0.04014 \\ 0.090284 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = 1.9952$$
$$c_2 = 4.0306$$
$$c_1 = 4.1509$$

$$\Rightarrow \quad F'(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 4.0306 & 1.9952 \\ 4.1509 & 4.0306 \end{bmatrix}$$

Iteração 5

$(\alpha, \beta) = (1.9976, -1.9751)$

Resolva o sistema:

$$\begin{bmatrix} 4.0306 & 1.9952 \\ 4.1509 & 4.0306 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.04014 \\ 0.090284 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0023037 \\ -0.024772 \end{bmatrix}$$

Atualize a solução:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9976 \\ -1.9751 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0023037 \\ -0.024772 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9999 \\ -1.9999 \end{bmatrix}$$

Iteração 6

$(\alpha, \beta) = (1.9999, -1.9999)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.9999					
-1.9999					
b_i	1				
1.9999					
-1.9999					
c_i	1				

Iteração 6

$(\alpha, \beta) = (1.9999,-1.9999)$

Procedimento prático para o cálculo de b_i e c_i

	1	-2	4	-4	4
1.9999		1.9999	-0.00019999	3.9996	-0.0004
-1.9999			-1.9999	0.00019999	-3.9996
b_i	1	-0.0001	1.9999	-0.00020001	0
1.9999		1.9999	3.9994	7.9984	
-1.9999			-1.9999	-3.9994	
c_i	1	1.9998	3.9994	3.9988	

$|b_1| < \varepsilon$ $|b_0| < \varepsilon$

Iteração 6

(α, β) = (1.9999,-1.9999)

$|b_1| < \varepsilon$ e $|b_0| < \varepsilon$

Critério de parada satisfeito! Uma solução do sistema não-linear foi encontrada.

Resolva a equação:

$$x^2 - \alpha x - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1.9999x + 1.9999 = 0$$

Com isso, obtemos duas raízes complexas da equação polinomial $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 4 = 0$:

$$x = 0.99995 + i \qquad x = 0.99995 - i$$

FIM DO ALGORITMO!

E as outras raízes?

- Para obter outras raízes complexas de P(x) podemos prosseguir com o método, considerando o polinômio

$$Q(x) \;=\; b_n\, x^{n-2} \;+\; b_{n-1}\, x^{n-3} \;+\; \ldots \;+ b_2$$

pois temos $|b_1| < \varepsilon$ e $|b_0| < \varepsilon$ e, assim,

$$P(x) \;=\; (x^2 - \alpha\, x \;-\; \beta)\, Q(x) \;+\; \cancel{b_1(x-\alpha)} \;+\; \cancel{b_0}$$