Zeros de Polinômios

*Iguer Luis Domini dos Santos[1], Geraldo Nunes Silva[2]

[1]DCCE/IBILCE/UNESP, São José do Rio Preto, SP, Brazil, iguerluis@hotmail.com
[2]DCCE/IBILCE/UNESP, São José do Rio Preto, SP,Brazil, gsilva@ibilce.unesp.br

Resumo No presente trabalho é feito um estudo sobre zeros de polinômios. Dessa forma, fazemos uma discussão sobre localização dos zeros, avaliação de polinômios e consideramos os Métodos de Newton e Newton-Bairstow.
Palavras-chave Zero de polinômio, cálculo de raízes, avaliação de polinômios

1 Resultados Básicos

Dados $a_0,\ a_1,\ ...\ , a_n,\ a_n \neq 0$, um polinômio de grau n é escrito na forma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

onde os a_i são chamados de coeficientes de $p(x)$.

Definição Diz-se que o número real ou complexo ξ é *raíz* (*zero*) de $p_n(x)$ se $p_n(\xi) = 0$.

Definição A raíz ξ é chamada de raíz múltipla de $p_n(x) = 0$ com multiplicidade m se

$$p_n(\xi) = p_n^{'}(\xi) = ... = p_n^{(m-1)} = 0 \quad \text{e} \quad p_n^{(m)}(\xi) \neq 0$$

Segue os principais resultados sobre zeros de polinômios:

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Se $p_n(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, então $p_n(x)$ possui pelo menos uma raíz (possivelmente complexa*

Corolário 1.1. *Sendo $p_n(x)$ um polinômio de grau $n \geq 1$ e $x_1, ..., x_k$ raízes de $p_n(x)$, então existem únicos números inteiros $m_1, ..., m_k$ tais que*

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$$

e

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2}\ ...\ (x - x_k)^{m_k}$$

Este corolário diz que $p_n(x)$ é escrito de modo único como produto de fatores de sua raízes x_i e multiplicidade m_i, sendo $i = 1, ..., k$.

Teorema 1.2. *Se $z_k = a_k + ib_k$ é uma raíz do polinômio de grau n, $p_n(x)$, então $\overline{z_k} = a_k - ib_k$ também é uma raíz de $p_n(x)$. Além disso, se z_k possui multiplicidade m, $\overline{z_k}$ também possui multiplicidade m.*

*Apoio fincanceiro: CAPES

2 Localização dos Zeros

Sendo $p_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1x + a_0$ um polinômio real (ou seja, todos os seus coeficientes são reais) de grau n, é possível determinar um círculo de raio R onde todas as raízes de $p_n(x)$ estão no interior desse círculo.

O seguinte resultado é devido a Augustin Cauchy:

Teorema 2.1. *Seja $p_n(x)$ um polinômio real de grau n e $A = max\{|a_0|, |a_1|, \ ... \ , |a_{n-1}|\}$. Então cada zero de $p_n(x)$ pertencem ao círculo centrado na origem e raio $R = 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$.*

Demonstração:Sabemos que $|a + b| \geq |a| - |b|$. Logo,

$$|p_n(x)| = |a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0| \geq$$

$$\geq |a_nx^n| - |a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1x + a_0| \geq ... \geq$$

$$\geq \ |a_n||x^n| - \Big(|a_{n-1}||x^{n-1}| + \ ... \ + |a_1||x| + |a_0|\Big) \geq$$

$$\geq |a_n||x|^n - A(|x_{n-1}|^{n-1} + \ ... \ + |x| + 1) = |a_n||x|^n - A\Big(\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}\Big) =$$

$$= |a_n||x|^n - A\tfrac{|x|^n}{|x|-1} + \tfrac{A}{|x|-1} \ > \ \Big(|a_n| - \tfrac{A}{|x|-1}\Big)|x|^n$$

Assim, $|a_n - \tfrac{A}{|x|-1}| \geq 0$ o que implica em $p_n(x) > 0$, ou seja, $\mathrm{p}_n(x)$ não tem raízes reais, o que nos dá uma contradição. Portanto as raízes de $p_n(x)$ devem satisfazer

$$|a_n| - \tfrac{A}{|x|-1} < 0 \ \Rightarrow \ |a_n| < \tfrac{A}{|x|-1} \ \Rightarrow \ |a_n||x| - |a_n| < A \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |a_n||x| < A + |a_n| \ \Rightarrow \ |x| < \tfrac{A}{|a_n|} + 1 = R. \qquad \blacksquare$$

Podemos também prever a localização das raízes de $p_n(x)$ através do seguinte resultado

Teorema 2.2. *Seja $p_n(x)$ polinômio real de grau n e $B = max\{|a_1|, |a_2|, \ ... \ , |a_n|\}$. Então as raízes de $p_n(x)$ estão fora do círculo de centro 0 e raio $r = \dfrac{1}{\Big(1 + \frac{B}{|a_0|}\Big)}$*

Demonstração:Seja $y = \frac{1}{x}$. Assim,

$$p_n(\frac{1}{y}) = a_n\frac{1}{y^n} + a_{n-1}\frac{1}{y^{n-1}} + \ ... \ + a_1\frac{1}{y} + a_0.$$

Considerando $Q_n(y) := y^nP_n(\frac{1}{y})$, segue que

$$Q_n(y) = y^n\Big(a_n\tfrac{1}{y^n} + a_{n-1}\tfrac{1}{y^{n-1}} + \ ... \ + a_1\tfrac{1}{y} + a_0\Big) \ =$$

$$= \ a_n + a_{n-1}y + \ ... \ + a_1y^{n-1} + a_0y^n.$$

Do teorema anterior segue que as raízes de $Q_n(y)$ devem satisfazer

$$|y| \leq 1 + \tfrac{B}{|a_0|} \ \Rightarrow \ |\tfrac{1}{x}| = |y| \leq 1 + \tfrac{B}{|a_0|} \ \Rightarrow \ r = \frac{1}{\Big(1 + \frac{B}{|a_0|}\Big)} \leq |x|.$$

$\blacksquare$

Dessa forma, dos dois últimos resultados segue que as raízes de um polinômio real de grau n, $p_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1x + a_0$ ($a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$) estão sempre no anel $\{z \in \mathbb{C}; \ r \leq |z| \leq R\}$.

Exemplo Seja $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Então, $n = 3$, $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ e $a_3 = 1$, além disso

$$|a_0| = |a_1| = |a_2| = 1$$

e do teorema 2.1 segue que $R = 1 + \frac{A}{|a_3|} = 1 + 1 = 2$, logo, os zeros de $p_3(x)$ se encontram num disco centrado na origem e raio 2. De fato os zeros de $p_3(x)$ são $x_1 = 1$, $x_2 = i$ e $x_3 = -i$.

Exemplo Considere $p_2(x) = (x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$. Logo, $n = 2$, $a_0 = -4$, $a_1 = 0$, e $a_2 = 1$, então

$$|a_0| = 4, |a_1| = 0$$

e do teorema 2.1 segue que $R = 1 + \frac{A}{|a_2|} = 1 + 4 = 5$, e portanto os zeros de $p_2(x)$ se encontram num disco centrado na origem e raio 5. De fato os zeros de $p_2(x)$ são $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

3 Avaliação de Polinômios

Seja

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots \ + a_1 x + a_0$$

um polinômio real de grau n.

Para calcular $p_n(x)$ num ponto x_0 dado é necessário efetuar n adições e $n + (n-1) + \ \dots \ + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ multiplicações.

Assim, para $n \gg 1$ este procedimento se torna inviável. Com o objetivo de minimizar esforços, temos a seguinte solução:

Teorema 3.1 (Método de Horner)**.** *Sendo* $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
Se

$$b_n = a_n \quad e \quad b_k = a_k + b_{k+1}x_0, k = 0, 1, \dots, n-1$$

então $b_0 = p(x_0)$. *Além disso, se*

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1$$

então

$$p(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$$

Demonstração:Da definição de $Q(x)$,

$$(x - x_0)Q(x) + b_0 = (x - x_0)(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1) + b_0 =$$

$$= (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x) - (b_n x_0 x^{n-1} + \dots + b_2 x_0 x + b_1 x_0) + b_0 =$$

$$= b_n x^n + (b_{n-1} - b_n x_0)x^{n-1} + \dots + (b_1 - b_2 x_0)x + (b_0 - b_1 x_0) =$$

$$= a^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

logo, $(x - x_0)Q(x) + b_0 = p(x)$ e $b_0 = p(x_0)$.

■

Do último teorema segue que

$$p_n(x_0) = b_0 = a_0 + b_1 x_0 = a_0 + (a_1 + b_2 x_0)x_0 = \dots = a_0 + (a_1 + (a_2 + (\dots + (a_{n-1} + a_n x_0)x_0 \dots)x_0)x_0)x_0$$

e neste caso efetuamos n adições e n multiplicações para calcular x_0. Observe que $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} > n \Leftrightarrow n \geq 2$ e então de fato vemos que o esforço para calcular $p_n(x_0)$ é reduzido.

4 Método de Newton

Seja $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0$ e x_0 uma aproximação inicial para uma raiz procurada de $p_n(x)$. O *Método de Newton* consiste, a partir da aproximação inicial x_0, desenvolver aproximações sucessivas para a raíz ξ a partir da iteração:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)} \tag{1}$$

Do método de Horner, sabemos que

$$p(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$$

sendo

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ... + b_2 x + b_1$$

dessa forma, derivando em relação a x

$$p'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x) \ \text{ e } \ p'(x_0) = Q(x_0)$$

Assim, podemos combinar o Método de Newton com o método de Horner, de modo que

$$p'(x_k) = Q(x_k)$$

e para cada x_k calculamos então $Q(x)$.

Exemplo Considere $p_2(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ e tomemos a aproximação inicial para a raíz $\xi = 1$, $x_0 = 0.5$. Utilizando o método iterativo (1) de Newton, temos as seguintes aproximações para ξ

Iteracao	x_k	$f(x_k)$
1	$0,875$	$0,140625$
2	$0,9875$	$0,012657$
3	$0,999848$	$1,520231.(10)^{-4}$
4	$0,999999$	$1.(10)^{-6}$

Neste caso, $|x_4 - \xi| = 1.10^{-6}$ e $|f(x_4) - f(\xi)| = 1.10^{-6}$.

5 Deflação

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n. Ao se obter um zero aproximado x_N de $P(x)$, por exemplo pelo método de Newton, do método de Horner segue que,

$$P(x) = (x - x_N)Q(x) + b_0 = (x - x_N)Q(x) + P(x_N) \approx (x - x_N)Q(x)$$

ou seja, $x - x_N$ é um fator aproximado de $P(x)$. Fazendo $x_1 = x_N$ como um zero aproximado de P e $Q_1 \equiv Q(x)$ como um fator de aproximação, temos

$$P(x) \approx (x - x_1)Q_1(x)$$

Podemos encontrar um segundo zero aproximado de P aplicando o método de Newton a $Q_1(x)$. Se $P(x)$ é um polinômio de grau n com n zeros reais, esse procedimento aplicado de forma repetida resultará em $(n-2)$ zeros aproximados de P e um fator de aproximação quadrático $Q_{n-2}(x)$. Nesse momento, $Q_{n-2}(x) = 0$ pode ser resolvido pela fórmula quadrática para encontrar os dois últimos zeros aproximados de P. Esse procedimento que acabamos de descrever é chamado *Deflação*.

A dificuldade na precisão dos zeros de $P(x)$ por este procedimento deve-se ao fato de que, quando obtemos os zeros aproximados de $P(x)$, o método de Newton é utilizado no polinômio reduzido $Q_k(x)$, ou seja, o polinômio que tem a propriedade

$$P(x) \approx (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)Q_k(x)$$

Assim, um zero aproximado x_{k+1} de Q_k dará um valor aproximado da raíz de $P(x) = 0$ e a imprecisão crescerá à medida que k crescer. Uma maneira de eliminar essa inconveniência é tomar os zeros aproximados de Q_k e então utilizá-los como dados iniciais no método de Newton sobre o polinômio $P(x)$, para então melhorar essas aproximações para os zeros de $P(x)$.

Exemplo Considere

$$p_3(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 10) = x^3 - 13x^2 + 32x - 20$$

e suponhamos que uma estimativa da raíz $\xi = 10$ seja 10.1. Dividindo $p_3(x)$ por $x - 10.1$ temos

$$p_3(x) = (x - 10.1)(x^2 - 2.9x + 2.71) + 7.371 \approx (x - 10.1)(x^2 - 2.9x + 2.71)$$

Sendo que os zeros de $(x^2 - 2.9x + 2.71)$ são dados por $\frac{2.9 \pm i\sqrt{2.43}}{2} \approx 1.45 \pm 0.78i$. E então, através de um erro de 10.1 - 10 = 0.1 na aproximação da raíz ξ considerada, o método da deflação produziu um grande erro na aproximação dos zeros restantes de $p_3(x)$. Agora, se considerarmos uma estimativa da raíz $\xi = 1$ como 1.1, segue que

$$p_3(x) = (x - 1.1)(x^2 - 11.9x + 18.91) + 0.801 \approx (x - 1.1)(x^2 - 11.9x + 18.91)$$

e neste caso as raízes de $(x^2 - 11.9x + 18.91)$ são $\xi_1 \approx 10.0111$ e $\xi_2 \approx 1.889$, e portanto são boas aproximações para os zeros restantes de p_3, uma vez que $|\xi_1 - 10| = 0.0111$ e $|\xi_2 - 2| = 0.111$.

Exemplo Considere agora $p_2(x) = (x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$ e 1.1 uma estimativa para a raíz $\xi = 1$. Temos que

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1.1)(x - 1.9) - 0.09 \approx (x - 1.1)(x - 1.9)$$

e como $\mu = 1.9$ é raíz de $(x - 1.9)$, segue que $\mu = 1.9$ será uma aproximação para a raíz $\alpha = 2$ de $p_2(x)$. O erro de aproximação neste caso será $|\mu - 2| = 0.1$.

6 Método de Newton-Bairstow

Seja $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ ... \ + a_{n-1}x + a_n$ um polinômio real de grau n, antes de mencionarmos o método de Newton-Bairstow faremos algumas considerações:

Inicialmente fazemos a divisão de $P_n(x)$ pelo fator quadrático $x^2 - px - q$, com $p, q \in \mathbb{R}$, e obtemos

$$P_n(x) = (x^2 - px - q)P_{n-2}(x) + b_{n-1}(x - p) + b_n$$

sendo

$$P_{n-2}(x) = b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-4} + ... + b_{n-4}x^2 + b_{n-3}x + b_{n-2}$$

e a relação entre os coeficientes dada por

x^n $\quad a_0 = b_0$

x^{n-1} $\quad a_1 = b_1 - pb_0$

x^{n-2} $\quad a_2 = b_2 - pb_1 - qb_0$

.

.

.

x^{n-j} $\quad a_j = b_j - pb_{j-1} - qb_{j-2} \quad (j = 2, 3, ..., n)$

Logo, os coeficientes de $P_{n-2}(x)$ são calculados através do seguinte algoritmo

$$\begin{array}{l} b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 + pb_0 \\ b_j = a_j + pb_{j-1} + qb_{j-2} \ \ (j = 2, 3, ..., n) \end{array} \tag{2}$$

O fator $x^2 - px - q$ é um divisor de $P_n(x)$ se, e somente se , o resto $R(x) = b_{n-1}(x - p) + b_n$ for nulo, ou seja, se tivermos $b_{n-1} = b_n = 0$. Dados os valores de p e q, os coeficientes de $P_{n-2}(x)$ e de $R(x)$ são unicamente determinados.

Tais coeficientes podem ser considerados como funções de duas variáveis, no caso, p e q. Dessa forma, o problema de encontrar o divisor quadrático considerado de $P_n(x)$ é equivalente a resolver o sistema de equações não lineares

$$b_{n-1}(p, q) = 0 \quad b_n(p, q) = 0 \tag{3}$$

nas variáveis p e q. Para solucionar (3) é utilizado o método iterativo de Newton, e para isto necessitamos das derivadas parciais de $b_{n-1}(p, q)$ e $b_n(p, q)$ com relação a p e q. De (2) segue que

$$\frac{\partial b_j}{\partial p} = b_{j-1} + p\frac{\partial b_{j-1}}{\partial p} + q\frac{\partial b_{j-2}}{\partial p} \quad (j = 2, 3, ..., n) \tag{4}$$

além disso,

$$\frac{\partial b_0}{\partial p} = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial b_1}{\partial p} = b_0. \tag{5}$$

Através de (4) e de (5) definimos

$$c_{j-1} = \frac{\partial b_j}{\partial p} \quad (j = 1, 2, 3, ..., n) \tag{6}$$

Assim, de (4) e (5) temos o seguinte algoritmo

$$\begin{array}{l} c_0 = b_0, \quad c_1 = b_1 + pc_0 \\ c_j = b_j + pc_{j-1} + qc_{j-2} \ \ (j = 2, 3, ..., n - 1) \end{array} \tag{7}$$

Novamente de (2), agora considerando as derivadas parciais com relação a q, temos

$$\frac{\partial b_j}{\partial q} = b_{j-2} + p\frac{\partial b_{j-1}}{\partial q} + q\frac{\partial b_{j-2}}{\partial q} \quad (j = 2, 3, ..., n) \tag{8}$$

além disso,

$$\frac{\partial b_0}{\partial q} = 0 \qquad \frac{\partial b_1}{\partial q} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial b_2}{\partial q} = b_0. \tag{9}$$

Então,

$$\frac{\partial b_j}{\partial q} = c_{j-2} \qquad (j = 2, 3, ..., n) \tag{10}$$

sendo que estas derivadas parciais satisfazem (7). Em particular, de (6) e de (10) as derivadas necessárias para o método de Newton são

$$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} = c_{n-2} \qquad \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} = c_{n-3} \qquad \frac{\partial b_n}{\partial p} = c_{n-1} \qquad \frac{\partial b_n}{\partial q} = c_{n-2} \tag{11}$$

Consideradas essas preliminares, pode-se iniciar o método iterativo de Newton para solucionar o sistema (3). A fórmula (11) define os elementos da matriz Jacobiana Φ e do método de Newton segue que

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \frac{b_n c_{n-3} - b_{n-1} c_{n-2}}{c_{n-2}^2 - c_{n-1} c_{n-3}} \ , \ q^{(k+1)} = q^{(k)} + \frac{b_{n-1} c_{n-1} - b_n c_{n-2}}{c_{n-2}^2 - c_{n-1} c_{n-3}} \tag{12}$$

O denominador $c_{n-2}^2 - c_{n-1} c_{n-3}$ é o determinante da matriz Jacobiana Φ. Se este determinante for nulo, não podemos utilizar a fórmula (12), neste caso, podemos utilizar o método de Newton simplificado ou os valores iterados $p^{(k)}$ e $q^{(k)}$ podem ser mudados pela adição de números aleatórios.

(Newton-Bairstow) O Método de Newton-Bairstow consiste na determinação de um fator quadrático $x^2 - px - q$ de um polinômio real $P_n(x)$ de grau $n > 2$, através dos seguintes passos:

(1) dadas as aproximações $p^{(k)}$ e $q^{(k)}$, calcule os valores de b_j através de (2) e os valores de c_j através de (7).
(2) se o determinante da matriz Jacobiana é não nulo, os valores iterados $p^{(k+1)}$ e $q^{(k+1)}$ são calculados através de (12).

Observe que o Método de Newton-Bairstow possui ordem de convergência quadrática, já que o sistema não linear (3) é solucionado pela iteração do método de Newton.

Exemplo Considere o polinômio $p_3(x) = (x-1)(x-2)(x-10) = x^3 - 13x^2 + 32x - 20$. Neste caso $n = 3$ aplicando o método de Newton-Bairstow para $p^{(0)} =$ e $q^{(0)} =$, segue que

k	0	1	2	3	4	5
$p^{(k)}$	1	3.03704	2.99470	2.99999	3	–
$q^{(k)}$	2	2.40741	-2.03530	-2.00002	-2	–
b_2	22	4.14950	0.0018281	0.00005	0	–
b_3	-22	-31.38273	0.36926	0.00037	0	–
c_0	1	1	1	1	1	–
c_1	-11	-6.92592	-7.0106	-7.00002	–	–
c_2	13	-14.47739	-23.02811	-22.99996	–	–
$\Delta p^{(k)}$	–	2.03704	-0.04234	0.00529	0.00001	–
$\Delta q^{(k)}$	–	0.40741	-4.44271	0.03528	0.00002	–

Assim, $x^2 - p^{(4)} - q^{(4)} = x^2 - 3x + 2$ é um fator quadrático de $p_3(x)$, cujos zeros são $\xi_1 = 2$ e $\xi_2 = 1$. Além disso

$$p_3(x) = (x^2 - 3x + 2)p_1(x) + b_2(x - 3) + b_3 = (x^2 - 3x + 2)(x - 10)$$

logo, $(x - 10)$ também é um fator de $p_3(x)$, cuja raíz é $\xi_3 = 10$.

Consideremos agora o caso de raízes complexas.

Exemplo Seja $p_4(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 4$. Temos que $n = 4$, e considerando $p_0 = 1$ e $q_0 = -1$, segue do último método que

k	0	1
$p^{(k)}$	1	2
$q^{(k)}$	-1	-2
b_3	-1	0
b_4	1	0
c_1	0	–
c_2	1	–
c_3	0	–
$\Delta p^{(k)}$	–	1
$\Delta q^{(k)}$	–	-1

Portanto $x^2 - p^{(1)} - q^{(1)} = x^2 - 2x + 2$ é um fator quadrático exato de $p_4(x)$. Temos também que

$$p_4(x) = (x^2 - 2x + 2)p_2(x) + b_3(x - 2) + b_4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2)$$

logo, as raízes de $p_4(x)$ são $1 \pm i$ e $\pm\, i\sqrt{2}$.

BIBLIOGRAFIA FUNDAMENTAL

[1] SCHWARZ, H. R., *Numerical Analysis - A comprehensive Introduction*, John Wiley, 1989.

[2] BURDEN, RICHARD L. , *Numerical Analysis*, PWS-Kent, Boston, 1993.

[3] RUGGIERO, MÁRCIA A. GOMES, *Cálculo Numérico*, Makron Books, São Paulo, 1997.

[4] JACQUES, IAN, *Numerical Analysis*, Chapman and Hall, London, 1987.

[5] ATKINSON, KENDALL E., *An Introduction to numerical analysis*, J. Wiley, New York, 1988.

[6]ALBRECHT, PETER, *Análise numérica*, LTC EDUSP, Rio de Janeiro, 1973.

[7] CONTE, SAMUEL DANIEL, *Elementos de Análise Numérica*, Editora Globo, Porto Alegre, 1977.

[8] RUAS, VITORIANO, *Curso de Cálculo Numérico*, LTC, Rio de Janeiro, 1977.